collection

DIDACTIQUES

MATHÉMATIQUES

AUTOUR DE LA MODÉLISATION EN PROBABILITÉS

Commission inter-IREM
Statistique et Probabilités

coordination Michel HENRY

Presses universitaires de Franche-Comté

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Auteurs Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités* :
CHAPUT Brigitte, COURTEBRAS Bernard, DANTAL Bernard, GIRARD Jean-Claude, HENRY Michel, PICHARD Jean-François, THIÉNARD Jean-Claude

Coordination HENRY Michel

Titre *Autour de la modélisation en probabilités*

Résumé Ce livre rassemble des articles sur les notions fondatrices du calcul des probabilités : hasard, expérience aléatoire, événement, probabilité. Dans une première partie, deux études traitent des origines historiques de la notion de probabilité, accompagnées d'une frise historique assez complète présentant les auteurs principaux et leurs œuvres des origines au 20ème siècle. Cette partie s'achève par une analyse philosophique et épistémologique des conceptions sur le hasard. Une deuxième partie traite des enjeux de la modélisation en probabilités, en vue de son enseignement. La notion d'expérience aléatoire y est revisitée pour préciser le statut d'un modèle probabiliste quand il est conçu pour décrire une réalité. La troisième partie présente quelques exemples typiques de modélisations et sujets de réflexion transposables comme activités en classe. On trouvera en annexes une liste des œuvres marquantes dans l'Histoire des probabilités, un recensement bibliographique des articles et ouvrages publiés au niveau national par le réseau des IREM, ainsi que d'autres données bibliographiques s'intéressant à l'enseignement des probabilités et de la statistique.

Public Enseignants de mathématiques dans le second degré, expérimentés ou en formation, formateurs en IUFM, animateurs des IREM, chercheurs universitaires en didactique et épistémologie des probabilités.

Soutien Ouvrage publié avec le soutien de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Franche-Comté.

Mots clé Hasard ; expérience aléatoire ; probabilité ; histoire des probabilités ; didactique des probabilités ; modèle probabiliste ; modélisation ; modèle de Poisson.

Langue Français

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Caractéristiques de l'édition papier

Réédition de la première partie du livre *Enseigner les probabilités au Lycée*, publié en 1997 par la CII *Statistique et Probabilités*, mise à jour et complétée d'articles originaux.

Éditeur	Presses universitaires de Franche-Comté Université de Franche-Comté 25030 BESANÇON Cedex - France
Année	2001
Collection	«*Didactiques*»
Série	«*Mathématiques*»
Format	16 x 22 cm 262 pages recto verso support papier ISBN 2 -84627-018-X
Maquette et mise en pages	Marie-Claire Rougeot
Couverture	nova mondo (03 80 68 25 02)
Imprimeur	Imprimerie commune de l'Université
Dépôt légal	4e trimestre 2001
Copyright	© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2001

Note de l'éditeur

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

«Mathématiques»

AUTOUR DE LA MODÉLISATION EN PROBABILITÉS

Commission inter-IREM
Statistique et Probabilités
Coordination : Michel HENRY

Presses universitaires de Franche-Comté 2001
Diffusé par C*i*D - 131 boulevard Saint-Michel - 75005 Paris

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

SOMMAIRE

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Présentation de l'ouvrage

Depuis plus de 30 ans, les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), accompagnent de leurs travaux les évolutions de programmes des enseignements primaire et secondaire et apportent aux enseignants des outils pour la classe et des matières pour leur réflexion. Organisés en réseau, les 26 IREM se sont dotés de commissions nationales, lieux de débats et de production d'ouvrages issus de colloques ou d'universités d'été. Cet ouvrage est le fruit d'une réflexion de 10 ans, menée au sein de la Commission Inter-IREM *Statistique et Probabilités*.

L'enseignement de la statistique et des probabilités, encore très jeune, a dû s'adapter à de multiples changements d'objectifs, souvent tributaires des différences légitimes de points de vue sur la place et le statut de ces deux grands domaines de l'enseignement des mathématiques, particulièrement concernés par les applications. Cette caractéristique conduit nécessairement les enseignants à s'interroger sur le sens pratique qu'ils peuvent donner aux objets théoriques intervenant dans la description des populations statistiques et dans le modèle probabiliste.

Au fur et à mesure des discussions qui se sont déroulées dans la commission, l'importance de mieux cerner « l'origine de l'idée de probabilité » s'est fait sentir. Diverses conceptions, qui tirent leurs origines du sens premier du terme « probabilité », ou « prouvabilité », comme degré de crédibilité, de certitude d'une proposition, d'un témoignage, etc., ainsi que différentes utilisations dans la langue courante, voire même l'évocation d'expressions élaborées comme celle de probabilité d'une probabilité, ont une interaction forte avec le concept de probabilité introduit en mathématique. Il est symptomatique d'ailleurs qu'il n'y ait pas consensus sur les interprétations des notions de base de la théorie probabiliste et sur leur impact sur l'outil statistique, ce qui conduit à des présentations diverses et quelquefois contradictoires. Cela fait que la théorie des probabilités est au sein des mathématiques le domaine où l'éclairage épistémologique est de la plus grande importance. Nous avons donc eu le souci, en première partie, de replacer les connaissances probabilistes naissantes dans leur perspective historique, faisant intervenir les acteurs fondateurs avec quelques problèmes que l'Histoire a immortalisés. Une frise historique sur la probabilité et la statistique, souligne les apports essentiels des principaux mathématiciens et probabilistes, des toutes premières origines à l'axiomatique de Kolmogorov.

Par suite de la modification des programmes des Premières et Terminales de 1991, qui proposaient de présenter la notion de probabilité à partir d'une approche fréquentiste, la commission s'est attelée à la tâche pour contribuer à la réflexion des enseignants et pour examiner l'impact de cette approche sur la compréhension des notions de base qui en résulte chez les élèves. Les nouveaux programmes des années 2000, encore plus orientés vers la maîtrise de l'outil statistique, renforcent la nécessité de clarifier le statut de la probabilité et le rôle de la modélisation.

Les concepts fondateurs de la théorie probabiliste sont difficiles et délicats à manier, en partie parce qu'aux difficultés de l'apprentissage des mathématiques s'ajoute un point de vue complètement nouveau par rapport au déterminisme de l'enseignement scientifique de collège et de lycée jusqu'à ce niveau. En outre, à la différence des autres notions enseignées en mathématiques, les connaissances introduites en statistique et probabilités prennent leur sens dans la réalité quotidienne de laquelle elles tirent leurs fondements. La démarche de modélisation intervient alors de façon essentielle et l'introduction des notions probabilistes pose des problèmes didactiques spécifiques.

C'est aussi une difficulté nouvelle pour les élèves qui reflète de véritables obstacles à la compréhension des notions probabilistes, quand ils doivent les relier à l'explication de la réalité sensible. Même si certains exercices de combinatoire peuvent paraître déroutants, la théorie des probabilités, limitée aux ensembles finis d'événements comme le prescrivent les programmes des lycées, est mathématiquement très simple. Cependant, son rôle de modèle abstrait n'est pas immédiat, il est particulièrement délicat à cerner dans les cadres quelque peu artificiels des situations présentées traditionnellement en classe.

Ainsi, faire l'impasse sur la modélisation induite par un rapport de type expérimental à ces connaissances que suppose notamment l'approche fréquentiste, c'est se confiner à un aspect formaliste et faire perdurer une certaine ignorance sur l'impact social de ce savoir. De toute façon une introduction purement axiomatique de la théorie probabiliste, telle qu'elle peut être présentée à l'université, n'évite pas ce passage délicat de la modélisation, du réel au formel, à tous ceux qui veulent utiliser cette théorie, en particulier dans les multiples domaines où intervient la statistique. Ces quelques remarques nous ont donc amenés à revisiter les notions de base enseignées en probabilités sous l'angle de la modélisation, d'un point de vue théorique en deuxième partie. En troisième partie, nous proposons des exemples qui nous ont paru significatifs de cette démarche.

Aussi nous souhaitons que les différents chapitres qui composent ce livre puissent apporter aux lecteurs un certain nombre de pistes de travail et peut-être des réponses, mais aussi des questions pour prolonger leur réflexion.

Jean-François PICHARD
Michel HENRY
Commission Inter-IREM
Statistique et Probabilités

Première partie

Points d'Histoire : hasard et probabilités

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

1 - Les probabilités au tournant du XVIIIe siècle

Jean-François Pichard

Mon intention est de présenter les commencements de la théorie probabiliste (c'est-à-dire l'émergence de la théorie probabiliste, pour paraphraser le titre de Hacking **[14]**) jusqu'à l'établissement des notions de base et des théorèmes limites (i.e. jusqu'au premier tiers du XVIIIe siècle et ses trois grands traités), en essayant de dégager les problématiques et les différentes formes des concepts de base.

0 - La préhistoire

La théorie des probabilités est une mathématisation de l'incertitude (une «géométrie du hasard», a dit Pascal), le hasard désignant le caractère fortuit, imprévisible des phénomènes observés. Cette partie des mathématiques est apparue récemment, il y a environ trois siècles et demi, contre vingt cinq siècles au moins pour la géométrie.

Le déroulement imprévisible de la vie d'un homme, l'incertitude de la situation présente et à venir, ont d'abord été attribués aux divinités (le Destin, Dieu, qui reste toujours omniprésent dans l'esprit de beaucoup de gens), à la Nature et à l'Homme. L'analyse philosophique pour la compréhension du monde va amener les savants de la Grèce antique à préciser davantage ce concept vague. La notion d'événement accidentel est dégagée très tôt, en particulier par Aristote[1] qui discute des opinions des Anciens et distingue les

1 - Aristote (IVe siècle avant J.C.) distingue les événements contingents, qui doivent nécessairement se produire ou qui se produisent fréquemment, i.e. très souvent, et les événements fortuits ou accidentels, qui peuvent ou non se produire (e.g. *Physique* II, 4,5,6, trad. par H. Carteron, Les Belles Lettres, Paris, 1983). L'utilisation faite par Aristote du terme "probable" [dans la traduction indiquée] est épistémique et porte sur des événements uniques et particuliers ; c'est un attribut qualitatif.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

événements contingents, qui doivent nécessairement se produire, et les événements fortuits, qui peuvent ou non se produire.

Par ailleurs, des expériences aléatoires sont réalisées depuis bien longtemps déjà : les jeux avec des astragales, des dés... étaient pratiqués en Mésopotamie[2] et dans l'ancienne Egypte par exemple (on a retrouvé des dés bien cubiques et homogènes dans des tombeaux).

De tels jeux de hasard étaient effectués parfois avec opiniâtreté. Contre cela, des lois sont édictées contre les tripots dans la Rome antique[3]. Par la suite, les jeux sont condamnés par l'Eglise catholique, par le pouvoir[4] et par la morale[5] ; cependant cette frénésie des jeux n'a pas cessé depuis.

D'autres activités avaient aussi des résultats incertains. Par exemple, dans le cas du transport maritime, les bateaux navigant sur les mers et océans n'arrivent pas toujours à bon port avec leurs cargaisons ; des Bourses avaient même été créées au XIII^e et XIV^e siècle pour assurer (parier sur) ce risque, de façon empirique. Les rentes viagères dont la valeur est un pari sur la durée de la vie humaine, existent depuis au moins la Rome antique[6].

On peut alors se poser deux questions : pourquoi la théorie des probabilités a-t-elle porté d'abord sur les jeux de pur hasard (lancers de pièces, de dés...) et non sur d'autres phénomènes aléatoires de la vie économique par exemple, et pourquoi cela est-il survenu si tardivement ?[7] En

2 - Dé en terre cuite du 3^e millénaire avant J.C. ; cf. David F.N. : *Games, Gods & Gambling*, Ch. Griffin, 1962.

3 - On a retrouvé des dés spécialement pipés datant de cette époque, d'où la notion complémentaire de dé équitable, et l'on peut conjecturer que des joueurs avaient empiriquement senti la fréquence d'apparition des différentes faces, c'est-à-dire une conception intuitive de la loi des grands nombres.

4 - Par exemple, Louis IX interdit en 1255 le jeu et les manufactures de dés : *"Ils devront s'abstenir... des jeux de dés, d'échec, de la fornication et de fréquenter les tavernes".*

5 - Dans le premier ouvrage sur le sujet **[8]**, Cardano écrit au chapitre 10 intitulé ***"Pourquoi le jeu fût condamné par Aristote"*** :
"Aristote donne une autre raison quand il dit (4. Ethique, *chap. 1,* in fin.*) que les joueurs, les voleurs et les pilleurs font un métier sordide pour lequel ils trafiquent pour un profit indigne ; en fait, ils font n'importe quoi pour l'amour du gain et de ce fait, ils encourent des reproches...*
Maintenant, les chrétiens tolèrent les jeux de hasard, quoique ce fût condamné par les anciens ; mais ils n'admettent pas ce fléau..."
(L'othographe reproduite ici est celle de la traduction d'origine, un peu différente de la nôtre. Il en sera de même pour un certain nombre d'autres citations).

6 - Les tables du jurisconsulte romain Ulpien (IIIe siècle) indiquent, suivant l'âge, la valeur à attribuer aux rentes viagères dans les successions.

7 - Voir par exemple **[14]** et dans **[25]**, en particulier les chapitres 6 : "La tardive émergence du calcul des probabilités au XVIIe siècle", et 7 : "Le contexte juridique et commercial de l'apparition du calcul des probabilités: les mathématiques et la spéculation sur l'avenir".

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

effet, les outils mathématiques utilisés par les inventeurs de cette théorie sont très simples et étaient connus dès l'antiquité grecque pour l'arithmétique et le calcul des proportions et le Moyen-Age pour les combinaisons[8] ; ainsi, dès cette époque, l'appareillage mathématique pour une telle théorie était disponible.

Sur le premier point, on peut remarquer que les jeux de hasard pur (où l'adresse des joueurs n'intervient pas) sont les plus simples conceptuellement et qu'ils sont faciles à modéliser ; Pascal a écrit à ce propos que cette théorie pourrait "s'arroger à bon droit ce titre étonnant : *Géométrie du hasard*." dans son Adresse de 1654 à l'Académie Parisienne Le Pailleur (qui faisait suite à l'académie de Mersenne)[9]. Ce sont des problèmes de ce genre qui ont été développés en premier, à l'encontre de l'hypothèse de Maistrov[10] qu'une science se développe pour répondre à des besoins économiques.

Sur le second point, une première raison est qu'un traité scientifique sur les jeux de hasard ne fait peut-être pas très sérieux, le jeu étant chose futile aux yeux des savants. Une autre raison, certainement plus importante, est que le résultat d'un tirage au «sort» est l'expression de la volonté divine, et comme telle on ne doit pas calculer dessus, on ne doit pas tenter Dieu (ou le Diable) ; cette attitude existe encore actuellement avec les attitudes superstitieuses de joueurs[11]. C'est peut-être une raison pour laquelle l'Eglise catholique avait prohibé les jeux de hasard[12].

L'établissement de règles aussi équitables que possibles[13] dans les jeux de hasard (qui étaient malgré tout pratiqués) suppose une appréciation des

8 - Le triangle arithmétique donnant les combinaisons de p objets pris parmi n était déjà connu des mathématiciens arabes du XII-XIIIème siècle (voir A. Djebbar : *L'analyse combinatoire au Maghreb. L'exemple d'Ibn Mun'Im*, Pub. Math. d'Orsay, 1985 ; dont des extraits sont donnés dans *Mathématiques Arabes*, IREM de Rouen, 1989) et des mathématiciens italiens de la Renaissance, en particulier Tartaglia, *General Trattato* de 1556.

9 - Cette académie était un salon où se rencontraient des gens de lettres, de sciences et de la noblesse pour discuter sur toutes sortes de sujets, en particulier scientifiques, c'est la préfiguration de l'Académie Royale de Paris.
Pour avoir une idée de la diversité des questions traitées lors de ces réunions, on peut voir :
Marin Mersenne : *Questions inouyes, questions harmoniques,* ... (1634), Fayard, Corpus des oeuvres de philosophie en langue française, 1985.

10 - L. E. Maistrov : *Probability Theory*, *A Historical Sketch*, Academic Press, 1974.

11 - Et même en général dans la vie courante. Il n'est que de voir, par exemple, le battage fait dans les médias lorsque survient un vendredi 13.

12 - Par exemple, sermon de St Cyprien de Carthage (240),..., de St Bernadin de Sienne (1423), etc...

13 - C'est-à-dire des règles analogues à une jurisprudence, une évaluation du droit des joueurs sur les mises.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

possibilités des résultats gagnants et perdants. Cependant, ce n'est pas avant la Renaissance, avec un certain nombre de savants qui basaient la connaissance sur la méthode expérimentale, que des tentatives vont avoir lieu (e.g. Cardan, voir ci-après). D'autre part, au début du XVII^e^ siècle, les milieux scientifiques et philosophiques cherchent des explications au monde et à ce qui s'y produit[14] et, s'appuyant sur les expériences, vont vers une rationalisation du réel. Il n'est donc pas étonnant qu'on se soit préoccupé aussi, à cette époque, des phénomènes aléatoires.

1 - Les premiers écrits : Cardan et Galilée

Les premiers textes connus sur le calcul des hasards (ou des chances) ont été écrits au XVI^e^ siècle (Cardan[15]) et au début du XVII^e^ siècle (Galilée[16]), mais ils n'ont été publiés que bien plus tard, c'est pourquoi ils n'ont eu aucune influence directe sur le développement public de cette théorie, parce que celle-ci avait déjà atteint un degré de sophistication supérieur à celui du travail de Cardan[17]. Ils donnent cependant un aperçu de la façon de concevoir les idées de hasard.

Des deux, le travail le plus complet et le plus intéressant est celui de Cardan, bien que Montmort (**[27]**, p. IX) en ait écrit :

"Jérôme Cardan a donné un Traité De Ludo Aleae; mais on n'y trouve que de l'érudition & des réflexions morales."

Libri en dit dans son *Histoire*,

"Cardan a écrit un traité spécial De Ludo Aleae, où se trouvent résolues plusieurs questions d'analyse combinatoire."

---

14 - Voir des exemples dans Mersenne op. cit, ainsi que dans Galilée, *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, Trad. et notes de Clavelin, Editions Colin, 1970.

15 - Gerolamo Cardano, (en français, Jérôme Cardan) : *Liber de ludo aleae* (écrit entre 1526 et 1560) in *Opera Omnia*, vol. 1, Lyon, 1663 ; traduit en anglais par Oystein Ore : Cardano, *the Gambling Scholar*, Princeton Univ. Press, 1953, Cf. **[8]** - les citations données ci-après (traduction libre) sont faites d'après **[8]**.

16 - Galilei Galileo : *"Considerazione sopra il giuco dei dadi"*, *Opere*, t.xiv, 293-296, Firenze, 1855 ; première édition de ce texte, viii 591-594 in *Opere*, 1718. La date de rédaction est inconnue, vers 1620 ; Galileo est mort en 1642. Il avait intitulé ce texte *Sopra le scoperte de i dadis*.

17 - Pour plus de précisions, voir e.g. **[14]**, **[24]**, **[34]**.

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

La vérité se situe entre les deux. Cardan étudie, entre autres choses, les différentes combinaisons possibles (qu'il distingue des résultats observables avec des dés indiscernables) avec un, deux et trois dés, et utilise cela pour calculer les chances lorsqu'il y a équipossibilité ou égale facilité des cas (terme que l'on retrouve chez Laplace). Il dit pour le cas d'un dé :

"Par exemple, je peux aussi facilement tirer le un, le trois ou le cinq que le deux, le quatre ou le six. Les paris sont donc posés conformément à cette égalité si le dé est honnête et sinon ils sont faits d'autant plus grands ou plus petits en proportion de l'écart à l'égalité vraie."

Cardan paraît assigner une égale facilité aux différentes faces en raison de la symétrie dans le cas d'un «dé honnête», ce qui revient à considérer le dé comme un cube parfait, c'est-à-dire passer d'un dé particulier par abstraction à un dé parfait, comme en géométrie on passe d'un fil bien tendu à la notion de ligne droite. D'autre part, cette allusion aux dés truqués montre que Cardan (et certainement d'autres joueurs avant lui) avait un sentiment empirique de la loi des grands nombres et proposait d'engager les paris selon une approche qu'on qualifie aujourd'hui de fréquentiste. Cependant, son exposé est fait fondamentalement selon une doctrine mathématique, les expériences effectives de jeux qui sont mentionnées devant être comprises comme des illustrations.

Il énonce alors un principe premier :

"Aussi il y a une règle générale, que nous devons considérer le circuit entier [i.e. toutes les possibilités], et le nombre de ces lancers qui représente en combien de façons les résultats favorables peuvent se produire, et comparer ce nombre au reste du circuit, et les paris mutuels devront être posés selon cette proportion, de sorte qu'on puisse disputer en termes égaux."

qui est le premier énoncé bien connu de la définition de la probabilité objective : lorsque les cas sont équipossibles (équiprobables), la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles. On remarque aussi que le jeu est un contrat passé entre deux ou plusieurs personnes, dont le résultat est imprévisible pour chacune d'entre elles, et que la convention pour établir les paris est basée sur une règle de justice «de sorte qu'on puisse disputer en termes égaux» (jeu équitable), ce que nous retrouverons plus tard.

Bien que ce traité n'ait pas été publié avant 1665, les idées de Cardan ont dû circuler en Italie, puis en France. En effet, Galilée, dans son petit mémoire sur le jeu de dés - écrit à la suite d'une demande du Grand Duc de Toscane vers 1620, mais publié seulement en 1718 - commence directement sa note en supposant l'équipossibilité des résultats des lancers ; et il en est de même dans la correspondance de Pascal et Fermat.

2 - Le début «officiel» : Pascal et Fermat

Un certain délai de publication s'est aussi produit pour la correspondance entre Pascal et Fermat de 1654, et pour le *Traité du Triangle Arithmétique* (1654) de Pascal ; ces oeuvres ont été publiées à peu près en même temps[18] que celles de Cardan (les oeuvres de Pascal ont été publiées en 1665) et avant celles de Galilée. Néanmoins, les discussions sur le sujet qui ont eu lieu dans l'Académie Parisienne et l'Adresse de Pascal communiquée à un certain nombre de savants, en ont fait connaître la substance à Christiaan Huygens (séjour à Paris en 1655) et a incité celui-ci à écrire et publier en 1657 le premier traité sur la théorie probabiliste.

L'accréditation de Pascal et Fermat comme fondateurs de la théorie probabiliste semble due à Huygens. En effet, il écrit, dans sa lettre à Frans van Schooten (qui a traduit en latin le traité de Huygens et l'a publié en 1657 avec l'édition latine de son ouvrage *Mathematische Oeffeningen*) :

"Il faut savoir d'ailleurs qu'il y a déjà un certain temps que quelques-uns des plus Célèbres Mathématiciens de toute la France[19] *se sont occupés de ce genre de Calcul, afin que personne ne m'attribue l'honneur de la première Invention qui ne m'appartient pas."*[20]

Leibniz, dans ses écrits et sa correspondance à ce sujet, ne cite que Pascal, Fermat et Huygens, pourtant les œuvres de Cardan étaient déjà parues depuis 1663. Montmort, quant à lui, avait eu connaissance de l'ouvrage de Cardan, puisqu'il le cite, mais d'une manière très restrictive, alors qu'il dit de Pascal et Fermat (p. XXI) :

"Je crois devoir parler maintenant de deux Geometres illustres à qui je dois les premiers vûes que j'ai eues sur le sujet que je traite. En 1654 M. Pascal resolut ce Problême... M. Pascal le proposa à M. Fermat avec qui il étoit en commerce d'amitié & de Geometrie, & qui en cette Science n'étoit inferieur qu'à M. Descartes."[21]

De sorte que la légende "Pascal et Fermat sont les fondateurs de la théorie probabiliste" a continué à se propager, en particulier en France où les historiens des sciences et les grands mathématiciens des siècles suivants ont consacré la primauté de Pascal et Fermat. On peut citer par exemple :

18 - Fermat : *Varia Opera mathematica*, Toulouse, 1679 ; voir **[12]**.
19 - Il s'agit surtout de Pascal et Fermat.
20 - **[17]**, t.14, p.57-58.
21 - La graphie (et l'orthographe) utilisée ici est celle de l'ouvrage original ; pour certains termes, elle est différente de celle en usage de nos jours ; il en sera de même pour un certain nombre d'autres citations.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Montucla (**[28]**, t. 3, p. 383) :

"Les premiers qui ayent frayé cette carrière sont Pascal et Fermat. L'un et l'autre de ces hommes célèbres examinoient vers le milieu du siècle passé quelques questions sur les jeux et les paris des joueurs."

Laplace (**[23]**, p. 197) :

"Depuis longtemps on a déterminé dans les jeux les plus simples les rapports des chances favorables ou contraires aux joueurs [...] Mais personne, avant Pascal et Fermat, n'avaient donné des principes et des méthodes pour soumettre cet objet au calcul [...] C'est donc à ces deux grands géomètres qu'il faut rapporter les premiers éléments de la science des probabilités."

Poisson (**[31]**, p. 1) décrit de façon plus précise :

"Un problème relatif aux jeux de hasard, proposé à un austère janséniste par un homme du monde, a été l'origine du calcul des probabilités. Il avait pour objet de déterminer la proportion suivant laquelle l'enjeu doit être partagé entre les joueurs, lorsqu'ils conviennent de ne point achever la partie, et qu'il leur reste à prendre, pour la gagner, des nombres de points inégaux. Pascal en donna le premier la solution, mais pour le cas de deux joueurs seulement; il fût ensuite résolu par Fermat, dans le cas général d'un nombre quelconque de joueurs." [22]

Cependant, si l'on considère que la date de publication fait foi, c'est à C. Huygens que revient l'honneur d'être appelé le père de la théorie probabiliste : si c'est la date de l'écrit qui compte, c'est à Cardan que revient ce droit[23].

Je vais donner ici seulement quelques indications sur les idées de Pascal-Fermat, bien que publiées environ une dizaine d'années après le traité de Huygens, en raison de l'influence qu'elles ont eue, en complément de ce traité de Huygens, sur le développement de la théorie probabiliste au début du XVIII^e^ siècle avec les trois grands traités de l'époque, qui seront étudiés

22 - Ce problème de partage de l'enjeu a été appelé en France "problème des partis", car on cherche le parti des joueurs, selon l'expression consacrée au XVII^e^ siècle et début du XVIII^e^ siècle.

23 - Comme l'écrit Montmort au début du XVIII^e^ siècle, le texte de Cardan est compté comme quantité négligeable pour le sujet (peut-être ne l'avait-il pas bien lu ?). De plus, Cardan avait une réputation de plagiaire, en raison notamment de ses disputes avec Tartaglia sur la résolution de l'équation du 3ème degré. On peut néanmoins se poser la question : pourquoi les auteurs français cités ont-ils attribué cela à Pascal (invention avec Fermat de la théorie probabiliste, triangle arithmétique dit de "Pascal") alors que Pascal a par ailleurs bien d'autres titres de gloire ?

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

plus loin. Sur Pascal-Fermat, ainsi que sur Huygens, des études plus approfondies ont été excellemment faites dès le début du XVIII^e^ siècle par Jacques Bernoulli, Pierre Rémond de Montmort et Abraham de Moivre, puis dans **[28]** et **[34]**, et tout récemment dans **[1]**, **[7]**, **[14]**, **[16]**, **[18]**, **[19]** (et certainement bien d'autres).

Pascal et Fermat présentent une approche probabiliste d'un problème juridique : comment répartir équitablement entre les joueurs l'enjeu d'une partie qui ne peut être achevée[24]. Pour ce faire, ils utilisent de façon implicite la propriété d'additivité et celle de multiplication pour des événements indépendants, comme si cela était généralement admis.

Pascal procède à une récurrence descendante à partir du droit d'espérer conditionnel à la situation considérée, comme on peut le voir dans sa lettre du 29 juillet 1654 (**[29]**, p. 43) :

"Posons que le premier en ait deux et l'autre une; ils jouent maintenant une partie dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez; le hasard est égal, partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres »."

On constate donc sur cet extrait que Pascal reprend, dans le cas d'une situation de jeu, l'analogue du calcul des espérances futures sur des biens des personnes dont on doit hériter, avec les propriétés communément admises : additivité et des héritiers de même rang ont les mêmes espérances pour un bien. Pour la question sur le jeu de dés posée par le chevalier de Méré, il sous-entend qu'il est couramment admis que les faces du dé sont également possibles et par là même qu'elles ont la même chance de se produire.

Fermat, quant à lui, utilise les combinaisons pour dénombrer les cas possibles et favorables, supposés ici «équiprobables», sur le nombre maximum de parties à jouer, comme le fait Pascal, pour une partie simple, en

24 - Le problème de la division (qui est le nom anglais) de l'enjeu semble d'origine arabe, antérieur au XIV^e^ siècle. Il avait déjà été étudié sans succès par Pacioli à la fin du XV^e^ siècle, puis par Cardan, Peverone, Tartaglia entre autres au XVI^e^ siècle.

disant «le hasard est égal», et en tirer la proportion d'argent mis en jeu qui revient à chaque joueur. On peut illustrer cela par un extrait de la lettre de Pascal à Fermat du 24 août 1654 (**[29]**, p. 47) :

"Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs : [...] d'où vous concluez qu'il faut voir [...] combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion."

Et de même dans la lettre de Fermat à Pascal du 29 août 1654 (**[12]**, p. 309) :

"Cependant je répondrai à votre question des trois joueurs qui jouent en deux parties. Lorsque le premier en a une, et que les autres n'en ont pas une, votre première solution est la vraie, et la division de l'argent doit se faire en 17, 5 et 5 : de quoi la raison est manifeste et se prend toujours du même principe, les combinaisons faisant voir d'abord que le premier a pour lui 17 hasards égaux, lorsque chacun des autres n'en a que 5."

Pascal regroupe et formalise les résultats qu'il a obtenus dans un traité connexe au *Traité du triangle arithmétique*. Il commence par énoncer une convention :

"en quelque terme que le jeu se trouve, ils peuvent le quitter; et, au contraire de ce qu'ils ont fait en y entrant, renoncer à l'attente du hasard, et rentrer chacun en la propriété de quelque chose. Et en ce cas, le règlement de ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avaient droit d'espérer de la fortune, que chacun d'eux trouve entièrement égal de prendre ce qu'on lui assigne ou de continuer l'aventure du jeu : et cette juste distribution s'appelle le parti"

c'est-à-dire que le parti est égal au droit d'espérer. Cette même convention avait été aussi indiquée par Cardan :

"Si le jeu recommençait, les parties en présence devraient miser la même somme que celle qu'elles ont reçue à condition de s'arrêter de jouer." [25]

Ensuite Pascal donne deux principes qui règlent ce droit d'espérer.

"Le premier principe... est celui-ci. Si un des joueurs se trouve en telle condition que, quoi qu'il arrive, une certaine somme lui doit appartenir en cas de perte et de gain, sans que le hasard la lui puisse ôter, il n'en doit faire aucun parti, mais la prendre entière comme assurée".

En notation moderne, on peut le traduire par : l'espérance mathématique d'une constante est cette même constante.

25 - Dans Cardan, *Practica arithmetica*, 1539.

"Le second est celui-ci : si deux joueurs se trouvent en telle condition que, si l'un gagne, il lui appartiendra une certaine somme, et s'il perd, elle appartiendra à l'autre; si le jeu est de pur hasard et qu'il y ait autant de hasard pour l'un que pour l'autre et par conséquent non plus de raison de gagner pour l'un que pour l'autre, s'ils veulent se séparer sans jouer, et prendre ce qui leur appartient légitimement, le parti est qu'ils séparent la somme qui est au hasard par la moitié."

La conclusion du corollaire premier est :

"Et, partant, si en cas de perte il lui appartient A, et en cas de gain A+B, le parti est qu'il prenne $A+\dfrac{B}{2}$ *."*

En langage moderne on dirait que le droit d'espérer est un opérateur additif.

Pascal applique ensuite ces propriétés au problème des partis, en utilisant les combinaisons dont il a établi les propriétés dans la première partie du *Traité du triangle arithmétique*.

3 - Le premier traité publié : Christiaan Huygens

J'ai indiqué succinctement ci-dessus les circonstances qui ont incité Christiaan Huygens, jeune hollandais âgé de 25 ans, en séjour à Paris en 1655, à s'intéresser à ce sujet. Son travail était bien avancé au printemps 1656 et Huygens se mit en rapport avec Pascal et Fermat à ce propos. Le traité de Huygens est d'abord paru en latin en 1657 sous le titre *De Ratiociniis in Ludo aleae*. Ecrit en hollandais, il a été traduit en latin par son professeur de mathématiques F. van Schooten qui l'a inséré à la suite de ses *Exercitationum Mathematicarum*, Liber V. Il est publié en hollandais trois ans plus tard.

Huygens commence, dès le tout début de son traité **[17]**[26], par formaliser la notion de droit d'espérer, que l'on a trouvé exprimée chez Pascal dans le *Traité du triangle arithmétique*, sous le nom de «valeur de la chance» :

"Quoique dans les jeux de hasard pur les résultats soient incertains, la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a cependant une valeur déterminée."

Cette notion de «valeur de la chance» a été traduite en latin par «expectatio», ce qui a donné en français «espérance mathématique». Ensuite, il indique ce qu'il entend par «jeu juste» :

26 - Voir aussi l'article plus détaillé de Denis Lanier, "*Huygens : l'espérance et l'infini*", dans **[16]**.

"je pars de l'hypothèse que dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si l'on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable, c'est-à-dire par un jeu qui ne vise au détriment de personne",

déjà signalé par Cardan. Huygens introduit aussi la notion de jeu équivalent.

Sa proposition I est :

"Avoir des chances égales d'obtenir a *ou* b *me vaut* $\frac{a+b}{2}$ *"*

ce qui est le corollaire second de Pascal, qui en était resté à cette propriété car c'était suffisant pour traiter le problème des partis où les deux joueurs ont des "hasards" égaux. Huygens généralise ce résultat dans sa proposition III :

"Avoir p *chances d'obtenir* a *et* q *d'obtenir* b*, les chances étant équivalentes, me vaut* $\frac{pa+qb}{p+q}$ *."*

A l'aide de cela, Huygens résout le problème des partis par récursivité ; il n'utilise pas de méthode combinatoire.

On a vu que, déjà avec Cardan, la notion d'équipossibilité avait été dégagée et postulée. On retrouve cela chez Huygens (**[17]**, p. 76) :

"D'abord qu'on peut faire avec un dé six coups différents également vraisemblables. Car je suppose que le dé a la forme d'un cube *parfait. Ensuite qu'on peut faire 36 coups différents avec deux dés, lesquels ont aussi des vraisemblances égales. En effet, avec chaque coup du premier dé chacun des 6 coups du deuxième dé peut se combiner. Et 6 fois 6 font 36."*

et il fait le décompte des points en appelant les dés A et B respectivement. On remarque, comme pour Cardan, que l'équipossibilité est admise, que ce soit pour un ou plusieurs dés. L'indépendance ne sera considérée que plus tard, avec de Moivre.

La proposition XIV est intéressante en ce qu'elle fait intervenir un nombre de parties qui n'est pas limité :

"Si un autre joueur et moi jettent tour à tour 2 dés à condition que j'aurai gagné dès que j'aurai jeté 7 points et lui dès qu'il en aura jeté 6, tandis que je lui laisse le premier coup, trouver le rapport de ma chance à la sienne."

Ici, si les deux ont manqué, on revient à une situation équivalente à celle de départ, de là Huygens propose implicitement une résolution par équation de récurrence périodique. Si x est la «valeur de sa chance» au début, ce sera de nouveau x à chaque fois que c'est son tour de jeter, et y est la «valeur de ma chance» quand c'est mon tour de jeter, on obtient un système de 2 équations entre les 2 inconnues x et y, facilement résoluble.

L'ouvrage se termine par cinq propositions (exercices) laissées à la sagacité du lecteur, dont deux sont dues à Fermat et une à Pascal. Le numéro V est le plus remarquable et fait aussi intervenir éventuellement un nombre non limité de parties : c'est le premier exemple sur la «durée du jeu», un sujet qui a excité la sagacité de Bernoulli, Montmort, de Moivre, Lagrange et Laplace, entre autres.

"Ayant pris chacun 12 jetons, A et B jouent avec trois dés à cette condition qu'à chaque coup de 11 points, A doit donner un jeton à B, mais que B en doit donner 1 à A à chaque coup de 14 points, et qui celui là gagnera qui sera le premier en possession de tous les jetons. On trouve dans ce cas que la chance de A est à celle de B comme 244140625 est à 282429536481."

Huygens pensait, pour la résolution de cet exercice, certainement à la méthode par équation de récurrence proposée pour la proposition XIV.

Le traité de Huygens est resté le seul ouvrage important en théorie des probabilités jusqu'au début du XVIIIe siècle. Peut-être est-ce dû au fait que les mathématiciens, pendant cette période, étaient occupés à développer le calcul différentiel et intégral inventé par Leibniz et la méthode équivalente des fluxions et des fluentes inventée par Newton, et aussi au fait que cette théorie ne semblait pas avoir d'application en sciences.

Il sera traduit et commenté dans un traité anglais anonyme de 1692, attribué maintenant à Arbuthnot. Il sera reproduit et commenté dans la première partie de l'*Ars conjectandi* de Bernoulli ; des solutions, interprétations et généralisations aux cinq problèmes laissés comme exercice sont proposées par Huygens lui-même, par Bernoulli, Montmort, de Moivre, etc...

4 - La probabilité et son aspect philosophique

On a pu remarquer qu'il n'est question de probabilité ni chez Pascal, ni chez Fermat, ni chez Huygens ; les calculs sont effectués en fonction des chances (ou hasards) de chacun des joueurs. D'ailleurs ce mot «probabilité» et ses dérivés avaient une autre signification que celle qui est actuellement acceptée, en particulier en théorie mathématique des probabilités.

Le terme «probabilité» a été introduit au Moyen-Age en jurisprudence, construit à partir du latin «*probare*» qui signifie «prouver», sens que l'on retrouve dans les mots «probant», «probation», etc... Il s'agissait d'apprécier les preuves, indices matériels ou témoignages, lors d'un jugement. Suivant la notoriété ou l'autorité morale du témoin, le témoignage avait plus ou moins de poids, ce qui donnait lieu à un «calcul des probabilités». Dans le *dictionnaire Hachette*, Langue-Encyclopédie-Noms propres, 1980, on trouve :

"> ***Calcul des probabilités*** : science dont le but est de déterminer la vraisemblance d'un événement. - 1360". De même pour le terme :

"> ***Probable*** : adj. Qui a une apparence de vérité, semble plutôt vrai que faux. *«Il est probable qu'il vienne»* ; Lat. *«probabilis»*, de *«probare»* ; *«proubable», qu'on peut prouver, 1285 ; 1380"* .

Le mot est utilisé dans ce sens par Mersenne en 1637[27]. La probabilité est considérée alors comme le degré de crédibilité d'une opinion ou d'un jugement sur un fait[28].

Sera probable un avis ou une opinion attesté par toutes les autorités morales ou religieuses, ou par un grand nombre, et par glissement par au moins une autorité ; on aboutit alors à la doctrine du :

"> ***Probabilisme*** *: n.m. PHILO Doctrine qui juge impossible d'arriver à la certitude et recommande de s'en tenir à ce qui est le plus probable."*,

préconisée par les jésuites, et contre laquelle Pascal s'élèvera, par exemple (**[29]** Pensées 981, p. 637) :

"Que serait-ce que les Jésuites sans la probabilité et que la probabilité sans les jésuites ?" et (P.985, p. 638) : "La probabilité est peu sans les moyens corrompus, et les moyens ne sont rien sans la probabilité."[29],

où le terme «probabilité» se réfère à cette doctrine.

Pascal, dans l'argument du pari (**[29]** *Pensées* , p. 418, *Infini-rien*, p. 550), utilise encore la propriété de l'espérance : gain × «nombre de hasards pour

27 - Mersenne (opus cit) : "*Question XXIV : Peut-on sçavoir au vray à quelle heure, à quel jour, en quel mois, et en quelle année le monde a commencé, et quand il finira.*
Il est certain que nul ne peut sçavoir sans revelation en quelle année... Dieu a creé le monde, car les plus sçavans Chronologues avoüent ingenuëment qu'ils ne vont qu'à tastons, et qu'ils n'ont que des conjectures, ou des ***probabilitez****, ...*".

28 - Cette acception est toujours utilisée, en particulier dans l'appareil judiciaire, comme on peut le voir dans l'extrait de l'ordonnance de renvoi du juge Courroye dans l'affaire Carignon : "*Il existe de fortes* ***probabilités*** *pour que le coût de ces avantages fournis par les sociétés concessionnaires ait été refacturé en bout de chaîne aux usagers et consommateurs du service public délégué.*", cité dans le Canard Enchaîné du 10 mai 1995.

29 - Pascal s'élève ici contre la doctrine du probabilisme ; voir e.g. Hacking **[14]**, p. 22-24, et **[7]**.

le gain» contre perte × «nombre de hasards pour la perte», il fait donc une utilisation de la toute jeune théorie des chances pour en tirer une décision. On peut dire qu'il est l'initiateur de la théorie de la décision. Sa «Géométrie du hasard» était un calcul algébrique des chances et des droits d'espérer qui permet de choisir une stratégie et de prendre une décision basée sur un critère scientifique.

Pascal faisait partie de la communauté janséniste de Port-Royal, où il y avait des discussions religieuses, bien sûr, mais aussi philosophiques et scientifiques. Arnauld et Nicolle ont aussi résidé à l'abbaye de Port-Royal et discuté de divers sujets avec Pascal.

Le mot «probabilité» dans le sens actuel est introduit pour la première fois en 1662 dans la *Logique*, ou l'Art de Penser, dite *Logique* de Port-Royal **[3]**[30]. Cet art de penser est structuré selon les quatre aspects de la pensée rationnelle : comprendre, juger, déduire, ordonner. C'est un ouvrage d'un intérêt considérable qui sera encore utilisé comme manuel durant tout le XVIIIe siècle. Dans la lignée d'Aristote sont établies la caractérisation (interne et externe) et les propriétés logiques des propositions certaines ou impossibles. Ensuite, les auteurs étudient les propositions incertaines, en particulier les témoignages sur des événements, plus ou moins probables, de la vie ordinaire et les miracles ; pour ces propositions, on a un «calcul des probabilités» dans le sens indiqué ci-dessus, i.e. sur des degrés de crédibilité. Après, Arnauld et Nicolle passent au cas des propositions concernant des événements futurs (ce qui est peut-être un résultat des discussions avec Pascal), dans le livre IV, chapitre XVI "Du jugement qu'on doit faire des accidens futurs", qui commence ainsi :

"Ces regles qui servent à juger des faits passés, peuvent facilement s'appliquer aux faits à venir."

Ils donnent l'exemple suivant sur un jeu simple :

"Il y a des jeux où dix personnes mettant chacun un écu, il n'y en a qu'un qui gagne le tout, & tous les autres perdent : ainsi chacun n'est au hazard que de perdre un écu, & en peut gagner neuf. Si l'on ne consideroit que le gain & la perte en soi, il sembleroit que tous y ont de l'avantage : mais il faut de plus considerer que si chacun peut gagner neuf écus, & n'est au hazard que d'en perdre un, il est aussi neuf fois plus probable à l'égard de chacun qu'il perdra son écu, & ne gagnera pas les neuf.

30 - Pascal a discuté en particulier de géométrie avec Arnauld, pour les *Elémens de géométrie* de celui-ci.

Ainsi chacun a pour soi neuf écus à esperer, un écu à perdre, neuf degrés de probabilité de perdre un écu, & un seul de gagner les neuf écus : Ce qui met la chose dans une parfaite égalité.

Tous les jeux qui sont de cette sorte sont équitables, ..., & ceux qui sont hors de cette proposition sont manifestement injustes."

On voit donc un glissement du sens du mot «probable», utilisé jusqu'à cette époque pour désigner le degré de crédibilité ou de possibilité d'une opinion ou d'un témoignage sur un événement passé, vers la notion actuelle concernant la probabilité mathématique d'un événement futur sur une expérience répétable, sous l'hypothèse d'équipossibilité. Les termes «chances» ou «hasards» utilisés par Pascal, Fermat et Huygens sont ici exprimés par «degrés de probabilité». On peut noter aussi que le schéma de jeu indiqué est basé sur une convention de justice, d'équité, explicitée par «ce qui met la chose dans une parfaite égalité».

Cette distinction a été bien résumée au XIX^e siècle par Cournot :

"Les explications que j'ai données... sur le double sens du mot de probabilité, qui tantôt se rapporte à une certaine mesure de nos connaissances, et tantôt à une mesure de la possibilité des choses, indépendamment de la connaissance que nous en avons : ces explications, dis-je, me semblent propres à résoudre les difficultés qui ont rendu jusqu'ici suspecte à de bons esprits toute la théorie de la probabilité mathématique."[31]

La *Logique* se termine par un raisonnement analogue, plus terre à terre, à celui du pari de Pascal ("Infini-rien") :

"Il y a, par exemple, beaucoup de personnes qui sont dans une frayeur excessive lorsqu'ils entendent tonner... si c'est le seul danger de mourir par le tonnerre[32]*, qui leur cause cette apprehension extraordinaire, il est aisé de leur faire voir qu'elle n'est pas raisonnable. Car de deux millions de personnes, c'est beaucoup s'il y en a une qui meure en cette maniere... Puis donc que la crainte d'un mal doit être proportionnée non seulement à la grandeur du mal, mais aussi à la probabilité de l'évenement, comme il n'y a gueres de genre de mort plus rare que de mourir par le tonnerre, il n'y en a gueres aussi qui nous dût causer moins de crainte."*

31 - **[10]**, p. IV. La suspicion, que Cournot signale ici, concerne l'application de la théorie mathématique probabiliste à la probabilité des témoignages, qu'on rencontre jusqu'au début du XIX^e siècle avec Laplace, Poisson et Cournot lui-même. Cet aspect sera complètement occulté par les mathématiciens probabilistes jusqu'au début du XX^e siècle, où il reviendra avec la théorie de la décision dans l'incertain (initiée par E. Borel, Ville,...) et dans l'approche subjectiviste de la probabilité (voir ci-après).

32 - i.e. par la foudre.

On voit ici de plus l'assimilation d'une fréquence[33] avec une probabilité.

Ils donnent aussi un autre exemple d'événement rare, toujours pour illustrer ce raisonnement analogue au pari de Pascal :

"Ainsi ce seroit une sottise de jouer vingt sols contre dix millions de livres, ..., à condition que l'on ne pourroit le gagner, qu'au cas qu'un enfant arrangeant au hazard les lettres d'une Imprimerie, composât tout d'un coup les vingt premiers Vers de l'Eneïde de Virgile."[34]

Dans la seconde moitié du XVII^e siècle, en ce qui concerne l'aspect philosophique de la probabilité, nous avons encore à mentionner G.W. Leibniz. Bien que n'ayant obtenu aucun résultat théorique significatif dans ce domaine, il a joué néanmoins un rôle important, à la fois comme mathématicien (il est l'inventeur du calcul différentiel, publié en 1684) et comme philosophe, par l'intermédiaire de sa correspondance[35].

Leibniz s'est intéressé très tôt, dès 1676, à la théorie initiée par Pascal-Fermat et Huygens (cf. **[24]**). Ses études juridiques l'ont amené à étudier la jurisprudence de l'antiquité et du Moyen Age. Les juristes, pour rendre leurs jugements, prenaient en compte diverses variétés de preuves : les preuves pleines, demi-pleines, etc... suivant la confiance qu'on pouvait leur accorder. L'ambition de Leibniz était de rendre la jurisprudence aussi rigoureuse que les mathématiques et d'obtenir une algèbre universelle. Il avait d'ailleurs présenté une thèse en 1666, quand il avait 20 ans, dont le titre est *De Arte Combinatoria*. Il va étendre, comme Arnauld et Nicolle, les opérations logiques sur les propositions certaines aux propositions incertaines, liées à des événements passés incomplètement connus ou aléatoires, avec des degrés de crédibilité sur une échelle de 0 à 1. On peut considérer que cette *caractéristique universelle*, dans l'esprit de Leibniz, s'apparente à la logique floue et à la théorie subjectiviste des probabilités, développée par F.P. Ramsey, D.V. Lindley, B. de Finetti[36], puis L.J. Savage[37], entre autres, c'est-à-

33 - Fréquence supposée car il n'y avait pas, à l'époque, de statistique à ce sujet.
34 - **[3]**, p.353. Cette idée sera reprise par Emile Borel (e.g. **[5]**) sous l'image des «singes dactylographes» pour illustrer un événement de probabilité extrêmement petite.
35 - *Die Philosophischen Schriften* von Gottfried Wilhelm Leibniz, Editions C.J. Gerhardt, tome III, 1887, réédition Olms, 1960, qui contient une partie de la correspondance de Leibniz entre 1673 et 1716.
36 - B. De Finetti : *Theory of Probability*, Wiley, 1974, édition italienne de 1970, premiers travaux vers 1937.
37 - L. J. Savage. : *The Foundations of Statistics*, 1954.

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

dire que la probabilité n'existe pas en soi, n'est pas intrinsèque à une chose, mais est une évaluation de *notre* incertitude sur cette chose, et pas seulement sur des événements futurs répétables. Nous pouvons assigner une probabilité à une proposition particulière par rapport à notre jugement personnel et notre état de connaissance, mais l'ensemble de toutes nos attributions de probabilité doit être soumis à des règles assez strictes de cohérence interne.

5 - Arithmétique politique[38]

Cette même année 1662 où parut la *Logique* de Port-Royal, un marchand londonien, John Graunt, publia un ouvrage *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality*, qui introduisait des problèmes nouveaux de démographie. Les choses les plus remarquables de son livre sont tout d'abord une table de mortalité, et ensuite une évaluation raisonnée de la population de Londres et de l'Angleterre, ainsi que son évolution dans le temps. W. Petty, son ami et contemporain, dans des études similaires, publiées à partir de 1683 et après sa mort (1687), introduit le terme «Arithmétique politique» qui est le titre d'un de ses ouvrages ; il préconise des recensements plus détaillés pour saisir tous les aspects de la vie sociale et économique[39].

Nous allons regarder ici la relation qui s'établit entre ces statistiques et la théorie naissante des probabilités. A cet égard, les idées des hollandais Christiaan et Ludwig Huygens, van Hudde et de Witt, sont intéressantes. Bien sûr, ces correspondances n'ont été publiées que bien plus tard, mais elles reflètent un état d'esprit de l'époque.

Christiaan Huygens, membre de l'Académie Royale, était à Paris en 1669, où son frère Ludwig lui écrit à propos de la table de mortalité de Graunt, avec laquelle il procède à un calcul d'espérance de vie conditionnelle à l'âge. Christiaan lui répond en terme de pari ("*gager avec égal avantage*") qui

38 - Je ferai ici une présentation succincte, me contentant de souligner les relations avec la théorie probabiliste ; un aperçu un peu plus détaillé est fait dans l'article "*Sur la durée de la vie et espérance de vie*" (cf le 2- de la troisième partie, p. 201), une étude plus complète sur cette période peut être trouvée dans l'article de Lanier sur Huygens dans **[16]**, et surtout dans Jacques et Michel Dupâquier, *Histoire de la démographie*, Perrin, 1985.

39 - Voir aussi l'article de A. Ropert : "*Naissance et destin de l'Arithmétique politique*", dans *Scholies* n°9, Actes du Séminaire d'Histoire des Sciences du lycée Malherbe de Caen, 1989.

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

correspond à la notion de durée de vie probable, puis reconnaît que ce sont deux notions distinctes :

"Ce sont deux choses différentes que l'espérance et la valeur de l'aage futur d'une personne, et l'aage auquel il y a égale apparence qu'il parviendra ou ne parviendra pas. Le premier est pour régler les rentes à vie, et l'autre pour les gageures... Deux personnes de 16 ans chascun, combien peuvent-ils espérer vivre ensemble sans que l'un ou l'autre meurt ?"[40]

Ces questions sont au centre des discussions avec Jan van Hudde (bourgmestre d'Amsterdam) et Jan de Witt (Pensionnaire de Hollande) en 1671, pour déterminer la valeur des rentes viagères. On a ainsi la première application en économie de la toute jeune théorie des probabilités.

En dehors de toute question sur la représentativité et l'adéquation des données, il semble admis comme évident par les frères Huygens, Leibniz, etc..., que les fréquences observées peuvent être considérées comme des valeurs de probabilité dans un jeu de hasard, la durée de vie étant le gain dans un jeu contre la Nature ; les calculs sur plusieurs têtes se font par multiplication, c'est-à-dire en supposant qu'il y a indépendance[41]. Leibniz, vers 1680, considérait aussi cette question comme analogue à un jeu de hasard, par exemple dans *L'estime des rentes viagères* :

"en réputant toutes les années de vie également fatales je veux dire qu'il meurt autant d'hommes une année qu'une autre et en les supposant d'une égale vitalité, j'imaginerai qu'un tirage au sort décide lequel décède chaque année"[42]

Lors de l'examen des registres de naissance (ou de baptêmes) qui distinguaient les sexes, il avait été remarqué qu'il y avait plus de garçons que de filles (par exemple, par Graunt). La philosophie naturelle de Newton consistait à chercher des lois pour expliquer le monde, ces lois étant le signe, le témoignage d'un ordre divin. Dans ce sens, John Arbuthnot présente un mémoire[43] dans lequel il soutient que le fait qu'il naît plus de garçons que de filles est une preuve de la divine Providence. Cette question va soulever de vives polémiques, depuis Nicolas Bernoulli jusqu'à Pierre Laplace en passant par de Moivre.

40 - Christiaan Huygens, *Oeuvres complètes*, t.6 (Correspondance), 1920.
41 - Cependant, la notion d'indépendance n'était pas encore dégagée à cette époque.
42 - **[24]**, p.297.
43 - J. Arbuthnot : "*An argument for Divine Providence, taken from the constant regularity observ'd in the Births of both Sexes*", *Philosophical Transactions*, London, pour 1710-1712.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

6 - Le tournant du XVIIIe siècle en théorie des probabilités

A l'aube du 18e siècle, depuis le traité de Huygens en 1657, peu de choses ont été publiées sur le sujet. Le véritable tournant en théorie des probabilités a lieu en 1708-1713 avec la publication de trois ouvrages majeurs : le livre *Essay d'Analyse sur les jeux de hazard* de Montmort en 1708, le mémoire *De Mensura Sortis* de De Moivre en 1711[44] et le livre *Ars conjectandi* de J. Bernoulli en 1713, auxquels il faut adjoindre la 2e édition revue et très augmentée de l'*Essay* de Montmort à la fin de 1713.

Ces travaux traitent en grande partie des mêmes problèmes, c'est-à-dire trouver les rapports des chances (probabilités) de gagner et les gains espérés dans divers jeux de hasard. Les méthodes employées (combinatoire, récursivité, séries, espérance conditionnelle) se retrouvent dans les trois ouvrages, à des degrés plus ou moins importants.

On doit cependant mettre à part la 4e partie du livre de Jacques Bernoulli, où il voulait faire l'application de la doctrine des chances aux affaires civiles, morales et économiques. Pour cela il clarifie la notion de probabilité et la relation entre fréquence et probabilité, donnée par le premier théorème limite en calcul des probabilités, dont la démonstration termine l'ouvrage.[45]

Un certain nombre de résultats nouveaux, qui figuraient dans le manuscrit de J. Bernoulli, ont été publiés avant l'édition d'*Ars Conjectandi* par Montmort et de Moivre. J'adopterai donc l'ordre de présentation suivant : Montmort, Bernoulli, de Moivre, car de Moivre, ayant vécu plus longtemps, a poussé plus loin ses recherches sur le sujet et a donné des résultats importants en 1730-1733.

[46]

44 - De Moivre développera ce mémoire pour faire son traité, *Doctrine of Chances*, première édition en 1718.

45 - Ce théorème peut s'exprimer en gros de la façon suivante : pour une épreuve dont une issue possible E a une probabilité p, la fréquence de réalisations de E sera aussi proche que l'on veut de p avec une probabilité fixée si l'on fait un nombre suffisamment grand de répétitions. L'étude du traité de Jacques Bernoulli sera faite plus loin.

46 - Gravure de la p. 105 de l'*Essay* de Montmort.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

7 - Montmort : le traitement combinatoire

Montmort, qui écrivit le premier ouvrage important **[27]** après celui de Huygens, avait été incité à l'étude des hasards par des questions sur les jeux. Il indique dans sa préface :

"Plusieurs de mes Amis m'avoient excité, il y a déjà longtemps, à essayer si l'Algebre ne pourroit point atteindre à déterminer quel est l'avantage du Banquier dans le Jeu du Pharaon. Je n'avois jamais osé entreprendre cette recherche, car je sçavois que le nombre de tous les divers arrangemens possibles de cinquante-deux cartes, surpasse plus de cent mille millions de fois celui des grains de sable que pourroit contenir le globe de la terre; [...] Je serois encore dans ce préjugé si les succès de feu M Bernoulli ne m'eussent invité il y a quelques années à chercher les différens hazards de ce Jeu... cela me donna la pensée de travailler à fond sur cette matiere, & le desir de dédommager en quelque sorte le Public de la perte qu'il feroit s'il étoit privé de l'excellent Ouvrage de M. Bernoulli."

Fontenelle en dit dans son éloge (**[13]**, p. 469) :

"il se fixa sur une matière toute neuve ; car le peu que MM. Pascal et Huguens en avoient effleuré ne l'empêchoit pas de l'être, et il se mit à en composer un Ouvrage qui ne pouvoit manquer d'être original. Feu M. Bernoulli avoit eu à-peu-près le même dessein, et l'avoit fort avancé ; mais rien n'en avoit paru... Aussi ces sortes de sujets n'avoient-ils pas été traités... M. de Montmort s'y engagea avec un courage de Christophe Colomb, et en eut aussi le succès."

C'est donc à l'occasion de problèmes sur les jeux que Montmort a commencé à travailler en théorie des probabilités. D'ailleurs, la première édition de son ouvrage vérifie parfaitement le titre *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* qu'il lui a donné : il passe en revue dans la première partie un certain nombre de jeux de cartes en vogue ; dans la seconde partie, des jeux de dés ; il donne dans la dernière partie des solutions aux cinq problèmes posés par Huygens et divers autres problèmes sur les chances. Les problèmes étudiés sur les jeux de cartes, cependant, sont pour la plupart très compliqués et demandent bien plus d'habileté combinatoire (développement binomial et multinomial) que ceux considérés jusque là avec les dés. Ils font intervenir des tirages sans remise et des équations de récurrence résolues par sommation. Parmi les questions posées sur le «Jeu de Treize», on trouve un problème qui a une place importante en calcul des probabilités, c'est celui des rencontres :

"Pierre ayant un jeu entier composé de cinquante-deux cartes, mêlées à discretion, les tire l'une après l'autre, nommant & prononçant un lorsqu'il tire la premiere carte, deux lorsqu'il tire la seconde, ... & ainsi de suite jusqu'à la treizième

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

qui est un Roy. Alors si dans toute cette suite de cartes il n'en a tiré aucune selon le rang qu'il les a nommées, il paye ce que chacun des Joueurs a mis au jeu, & cede la main."

On peut exprimer cette question sous la forme suivante : quelle est la probabilité qu'au moins une des cartes sorte à un rang correspondant à son ordre de valeur ? Montmort donne le résultat sans démonstration (dans la 1ère édition). Dans la dernière partie, Montmort reprend le problème des partis dont il donne une solution complète dans le cas de joueurs de même force (le cas où «le hasard est égal»). Montmort s'est limité au cas des jeux et en donne la raison :

"Si je m'étois proposé de suivre en tout le projet de M. Bernoulli, j'aurois dû ajoûter une cinquiéme Partie, où j'eusse fait l'application des methodes contenues dans les quatre premieres, à des sujets politiques, oeconomiques ou moraux. Ce qui m'en a empêché, c'est l'embarras où je me suis trouvé de faire des hypotheses, qui étant appuyées sur des faits certains, pûssent me conduire et me soûtenir dans mes recherches."

Cette question avait conduit Jacques Bernoulli à son «théorème d'or», mais Montmort n'était pas un aussi habile géomètre.

Montmort reçut des commentaires de Jean Bernoulli qui lui conseilla de regrouper les outils de combinatoire dont il s'était servi pour l'analyse des jeux. Il se lia d'amitié vers 1710 avec **Nicolas Bernoulli**[47], neveu de Jean et de Jacques :

"M. de Montmort l'emmena chez lui à sa campagne, où ils passèrent trois mois dans un combat continuel de Problêmes dignes des plus grands Géomètres. Il s'agissoit toujours d'estimer les hasards, de régler des paris"[48],

puis ils entretinrent une correspondance importante sur divers problèmes de probabilité et de mathématiques, qui contient de nombreuses avancées par rapport à la première édition de 1708 de l'*Essay*.

Montmort publie en 1713 la seconde édition de son ouvrage. Outre un avertissement, il y insère une partie importante intitulée : "*Traité des combinaisons*" qui regroupe les propriétés combinatoires utilisées en divers endroits dans la première édition, et en fin de volume, sa correspondance avec Jean et Nicolas Bernoulli. Quelques problèmes sont modifiés, d'autres ajoutés et les solutions données pour certains problèmes pour lesquels il n'y

47 - Nicolas Bernoulli s'occupait alors de faire publier l'ouvrage, l'*Ars Conjectandi*, de son oncle Jacques, dont il s'est peut-être servi pour sa thèse *De Arte Conjectandi in Jure*, présentée en 1709.

48 - **[13]**, p.470.

avait qu'un exemple numérique dans la première édition. Par exemple, d'après une suggestion de Jean Bernoulli, il étudie le problème des partis avec des joueurs d'adresses différentes (des chances inégales) et donne une solution générale du problème de la durée du jeu :

"Sur la durée des parties que l'on joue en rabattant... On demande combien il y a à parier que la partie qui peut durer à l'infini, sera finie en un certain nombre déterminé de coups au plus." (p. 268) ,

que l'on trouve dans sa correspondance avec Nicolas Bernoulli. Ce problème fut résolu d'une façon différente par de Moivre en 1711 dans son article *De Mensura Sortis*[49].

Dans une lettre à Montmort, du 11 octobre 1712, Nicolas Bernoulli reprend l'argument de Arbuthnot indiqué ci-dessus (fin du §5) :

"On prétend que si le hazard gouvernoit le monde, il seroit impossible que les nombres des mâles & des femelles s'approchent de si près pendant plusieurs années de suite... en examinant le Catalogue des enfans nés à Londres depuis 1629 jusqu'à 1710 inclusivement, ..., la raison des mâles aux femelles est fort près de la raison de 18 à 17, d'où je conclus que la probabilité pour qu'il naisse un garçon, est à la probabilité pour qu'il naisse une fille environ comme 18 à 17."

Il revient sur ce sujet dans une lettre du 23 janvier 1713 :

"Or je vous prouverai qu'il y a beaucoup à parier qu'entre 14000 enfans, le nombre des mâles ne sera ni plus grand ni plus petit que 7200 de 163, ... Pour cette fin imaginons 14000 dés à 35 faces chacun, dont 18 soient blanches & 17 noires",

il utilise des approximations pour les coefficients du binôme et obtient un énoncé analogue à la loi des grands nombres, où il remarque que la probabilité que le nombre de faces blanches tombe dans un intervalle donné dépend de la longueur de cet intervalle.

Les avancées conceptuelles dans la première édition de l'ouvrage de Montmort ne sont peut-être pas très significatives, sauf l'emploi important de l'analyse combinatoire, mais son influence est importante en ce qu'il a joué le rôle d'incitation, en particulier pour de Moivre et les cousins Bernoulli, Nicolas d'abord et Daniel par la suite. Le problème ou paradoxe de Saint-Pétersbourg[50] est une extension de problèmes que Nicolas Bernoulli proposait à Montmort dans une lettre de septembre 1713[51] :

49 - Ce problème sera aussi examiné en grand détail par Laplace **[23]**.
50 - Dans le mémoire de Daniel Bernoulli : "*Specimen theoriae de mensura sortis*", *Comm. Acad. Sc. Petrop*. pour 1730-1731, publié en 1738.
51 - **[27]**, p.402.

"Quatrième problème. *A promet de donner un écu à B, si avec un dé ordinaire il amène au premier coup six points, deux écus s'il amene le six au second, trois écus s'il amene ce point au troisième coup, quatre écus s'il l'amene au quatrième, & ainsi de suite ; on demande quelle est l'esperance de B.*

Cinquième problème. *On demande la même chose si A promet à B de lui donner des écus en cette progression 1, 2, 4, 8, 16, &c. ou 1, 4, 9, 16, 25, &c. au lieu de 1, 2, 3, 4, 5, &c. comme auparavant."*

Daniel propose un jeu avec une pièce équilibrée et des gains en la progression 1, 2, 4, 8, 16, &c si on obtient pour la première fois croix au premier lancer, au deuxième, &c. Le paradoxe provient de ce qu'un jeu était alors considéré comme équitable si la mise est égale à l'espérance mathématique de gain, or ici cette valeur est infinie, bien que ceux qui cherchaient à résoudre cette question sentaient que l'enjeu devait être fini, et même assez petit. Buffon donne quelques détails sur ce problème (**[6]**, pp. 47-58), il avait d'ailleurs conduit une expérimentation sur ce sujet et obtenu une valeur équivalente à environ cinq écus (voir **[6]**, p. 53), ce qui est la première expérimentation statistique pour valider une hypothèse probabiliste[52].

8 - La relation entre fréquence et probabilité : la loi des grands nombres de Jacques Bernoulli

Jacques Bernoulli, né en 1654 à Bâle, l'année de la correspondance entre Pascal et Fermat, allait devenir un des fondateurs de cette nouvelle théorie publiée par Huygens. Selon l'éloge fait par Fontenelle (**[13]** , p. 109 et sq.),

"on le destinoit à être Ministre[53]*, et on lui appris du Latin, du Grec, de la Philosophie Scholastique, nulle Géométrie : mais dès qu'il eut vu par hasard des figures géométriques, il en sentit le charme, si peu sensible pour la plupart des esprits. A peine avoit-il quelque Livre de Mathématiques, encore n'en pouvoit-il jouir qu'à la dérobée... Il alla même jusqu'à l'Astronomie... en 1684 la face de la Géométrie change presque tout-à-coup. L'illustre M. Léibnitz donna dans les Actes de Léipsic quelques Essais du nouveau Calcul Différentiel, ou des Infiniments Petits, dont il cachoit l'art et la méthode. Aussitôt Messieurs Bernoulli... s'appliquèrent à en chercher le secret ; ils y réussirent... au point que M. Léibnitz a déclaré qu'elle leur appartenoit autant qu'à lui."*[54]

52 - Ce problème dit de Saint-Pétersbourg a été résolu par Feller en 1937, voir W. Feller : *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, vol. 1, 1951.
53 - i.e. pasteur protestant.
54 - Eloge par Fontenelle dans l'*Histoire de l'Académie*, Paris, pour 1705, publiée en 1706. Un autre éloge non signé est paru dans le *Journal des Sçavans* de 1706, par Saurin d'après Montmort (**[27]**, p. IV).

On ne sait pas ce qui a incité Jacques Bernoulli à s'intéresser à la théorie des probabilités, peut-être le mémoire de Sauveur sur le Jeu de la Bassette dans le *Journal des Sçavans* de 1679, jeu alors fort en vogue, ou le petit traité de Huygens. Cependant la première chose qu'il donna sur ce sujet est un article, dans le *Journal des Sçavans* pour 1685, contenant deux problèmes de jeu de dés, prolongement des problèmes que Huygens avait lancés comme défi aux autres mathématiciens. La solution de ces problèmes, donnée par J. Bernoulli dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig pour 1690, puis quelque temps après par Leibniz, fait intervenir des séries infinies. Un autre écrit en français, anonyme (d'après Montucla **[28]**, p. 391) mais qui lui a été attribué et qui a été publié par Nicolas Bernoulli à la suite de son *Ars Conjectandi* **[4]**, est intitulé *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*. D'après ses dires, Bernoulli aurait commencé à méditer à partir de cette époque sur son grand ouvrage en théorie des chances, l'*Ars conjectandi*. A sa mort en 1705, l'ouvrage n'était pas terminé et des querelles familiales firent qu'il ne parut qu'en 1713, par les soins de son neveu Nicolas.

Fontenelle en dit dans son éloge (**[13]**, p. 120-121) :

"Il achevoit un grand Ouvrage, De Arte conjectandi*; et quoiqu'il n'en est rien paru, nous pouvons en donner une idée sur la foi de M. Herman... Quelques grands Mathématiciens, et principalement Messieurs Pascal et Hugens, ont déjà proposé ou résolu des Problêmes sur cette matière, mais n'ont fait que l'effleurer ; et M. Bernoulli l'embrassoit dans une plus grande étendue, et l'approfondissoit beaucoup davantage. Il la portoit même jusqu'aux choses morales et politiques... La suite de ces idées a conduit M. Bernoulli à cette question : Si le nombre des cas inconnus diminuant toujours, la probabilité du parti qu'on doit prendre en augmente nécessairement, de sorte qu'elle en vienne à la fin à tel degré de certitude qu'on voudra...M. Bernoulli, qui possédoit fort cette matière, assuroit que ce Problême étoit beaucoup plus difficile que celui de la Quadrature du Cercle, et certainement il seroit sans comparaison plus utile."*

Ce traité de Jacques Bernoulli, l'*Ars conjectandi*, est divisé en quatre parties. La première partie comporte une reproduction du traité de Huygens avec des notes et commentaires. En particulier, J. Bernoulli propose pour la proposition XIV (voir ci-dessus) une solution basée sur le calcul de l'espérance mathématique par des progressions géométriques infinies. La seconde partie est un traité des permutations et des combinaisons, la troisième comporte des problèmes relatifs à des jeux de chance avec leurs solutions. La quatrième partie est restée inachevée, mais expose une réflexion en profondeur sur la probabilité ; elle traite de *"l'usage et l'application de la* *doctrine précédente aux affaires civiles, morales et économiques*". Ceci est un écho des travaux sur les rentes viagères faits par les hollandais ; en effet, en 1703, J. Bernoulli a demandé à Leibniz de lui procurer une copie du petit traité de 1671 de van Hudde et du rapport de de Witt, mais en vain.

Dans cette quatrième partie, J. Bernoulli commence en préliminaire par distinguer la certitude objective et subjective d'une chose[55], et indique que :

"*La* probabilité *est en effet un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout.*",

passe à la «certitude morale»[56], puis caractérise les événements nécessaires et contingents dans une vue subjectiviste :

"*ce qui peut sembler contingent à quelqu'un en une circonstance, pour un autre (ou plutôt le même) en un autre temps, une fois les causes connues, sera nécessaire ; si bien que la contingence est surtout en rapport avec notre connaissance.*"

Laplace dira (**[23]**, p. 34) :

"*La probabilité est relative en partie à cette ignorance, en partie à nos connaissances.*"

Bernoulli passe ensuite aux chapitres 2 et 3 à l'art de conjecturer et de calculer les probabilités, qui est une formalisation et une algébrisation des idées de la *Logique* de Port-Royal (**[3]**).

Dans le chapitre 4, Bernoulli en arrive à

"*La manière de rechercher le nombre des cas. Ce qu'il faut penser de celui qui est établi par des expériences.*"

Il explicite d'abord la démarche de base d'un calcul probabiliste :

"*il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres*",

c'est-à-dire, en langage moderne, de déterminer l'univers ou ensemble fondamental et les probabilités des événements élémentaires (les résultats possibles) ; ce que l'on peut faire pour

55 - C'est la raison pour laquelle certains subjectivistes revendiquent Bernoulli comme le fondateur de la théorie subjectiviste des probabilités.

56 - De nombreuses études (e.g. **[5]**, **[6]**, **[23]**) ont traité ce point qui est un des plus délicats et controversés pour l'application de la théorie probabiliste à la vie ordinaire : à partir de quelle valeur peut-on dire qu'on a atteint la certitude morale ou l'impossibilité morale pour un événement ?

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

"les jeux de hasard que leurs premiers inventeurs ont pris soin d'organiser en vue de se ménager l'équité, ... de telle sorte que tous ces cas puissent arriver avec une égale facilité."

Il passe ensuite aux phénomènes «où cela n'a pas du tout lieu» et où on ne peut faire un calcul des probabilités. Mais

"Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins ***a posteriori****, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables."*

Le problème défini ici par Bernoulli est celui de l'estimation. Il va donc étudier la relation entre la probabilité d'un événement concernant une expérience aléatoire et la fréquence relative de celui-ci lors de la répétition de cette épreuve ; il appellera le résultat obtenu son «théorème d'or», appelé actuellement «théorème de Bernoulli»[57]. Le nom de «loi des grands nombres», utilisé maintenant pour des résultats de ce type, semble avoir été donné par Poisson qui écrit dans son traité, dès le préambule (**[31]**, p. 7) :

"Les choses de toutes natures sont soumises à une loi universelle qu'on peut appeler la ***loi des grands nombres.****"*, et p. 8 :

"Cette loi des grands nombres s'observe dans les événements que nous attribuons au hasard aveugle, faute d'en connaître les causes, ou parce qu'elles sont trop compliquées... Mais dans la plupart des questions d'éventualité, la détermination a priori *des chances des divers événements est impossible, et ce sont, au contraire, les résultats observés qui les font connaître."*

Ce que Poisson appelle «loi des grands nombres» est un principe conjecturé, une ligne de recherche qui se poursuit encore aujourd'hui. Ce nom caractérise un certain type de théorèmes limites. Il pose ici très clairement le concept de l'approche fréquentiste, que ce soit pour la valeur d'une probabilité ou pour une distribution. Le résultat démontré par Jacques Bernoulli a été généralisé dans de nombreuses directions ; c'est maintenant un cas particulier de la loi faible des grands nombres, pour la probabilité d'un événement.

La problématique envisagée par Bernoulli n'est cependant pas nouvelle : elle est contenue de façon implicite dans la construction de dés

57 - Pour une étude bien plus détaillée sur Bernoulli, voir **[4]** ainsi que l'article de Norbert Meusnier, "*Argumentation et démonstration : à quoi sert la démonstration de la «Loi des grands nombres» de Jacques Bernoulli*", dans **[22]** ; sur la loi des grands nombres, voir l'article de Denis Lanier et Didier Trotoux, "*La loi des Grands Nombres : le théorème de Moivre-Laplace*", Actes de la 6ème Université d'été 95 sur l'histoire des mathématiques de Besançon, IREM de Franche-Comté, 1996.

truqués, mentionnés déjà dans la Rome antique. Elle est indiquée de façon obscure par Cardan :

"Pour une succession répétée, ... cette connaissance est basée sur une conjecture qui produit seulement une approximation, et le compte n'est pas exact dans ses détails ; cependant il arrive dans le cas de beaucoup de circuits que la chose tombe très près de la conjecture."

Galilée aussi l'avait noté, mais de façon plus claire :

"Toutefois, quoique le 9 et le 12 se composent en autant de façons que le 10 et le 11, ce pour quoi ils devraient être présumés d'usage égal, on voit néanmoins que la longue observation a fait estimer par les joueurs que le 10 et le 11 sont plus avantageux que le 9 et le 12."[58]

Ce premier théorème limite de la théorie probabiliste est établi par Jacques Bernoulli dans la quatrième partie de son ouvrage *Ars Conjectandi.* Bernoulli, d'après ses explications littérales et préalables, se posait le problème de l'intervalle de confiance, c'est-à-dire qu'ayant observé une certaine fréquence relative sur une expérimentation de n répétitions d'une même épreuve à deux issues, il demande quelle valeur attribuer à la proportion des issues «fertiles» inconnue, et plus précisément quel est le meilleur intervalle qui recouvrira la valeur véritable de la proportion avec un niveau de confiance donné à l'avance. Cependant, lorsqu'il traite le problème, ce qu'il résout est la question de déterminer la taille de l'échantillon à partir d'un intervalle de pari. En notation moderne, la question se présente ainsi : on veut déterminer le nombre n d'expériences à faire pour que la fréquence de succès (de probabilité a priori p connue) tombe dans un intervalle centré sur p, de largeur fixée (c'est l'intervalle de pari), avec une probabilité donnée.

Considérons sa proposition principale[59] :

58 - Galilée, op. cit. Selon Hacking **[14]**, il est improbable que des joueurs de dés se soient rendus compte d'une différence de probabilité de 0,01, et ceci pour plusieurs raisons : les dés sont en général imparfaits, la possibilité de tricherie, les joueurs ne notent pas de séries aussi longues pour mettre en évidence une telle différence. Cependant, l'existence, depuis longtemps, de dés spécialement pipés infirme cette dernière supposition.

59 - On peut exprimer ce théorème de la façon suivante avec des notations modernes : Soit A une issue possible d'une épreuve, de probabilité p. On répète n fois cette épreuve et on note F_n la fréquence de réalisations de A dans ces n épreuves. Alors pour toute valeur $1-\alpha$ entre 0 et 1 et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver n_0 assez grand tel que si $n > n_0$, on a: $P(|F_n - p| < \varepsilon) > 1 - \alpha$ ce qui signifie que la suite de variables aléatoires F_n tend «en probabilité» vers la valeur p de la probabilité.

*"... j'appellerai **fertiles** les cas dans lesquels un événement peut se produire, et **stériles** les cas dans lesquels le même événement ne peut se produire : de même, j'appellerai expériences **fertiles** celles pour lesquelles on constate qu'un des cas **fertiles** peut survenir, et **stériles** celles pour lesquelles on observe qu'un des cas **stériles** se produit. Soit donc le nombre de cas **fertiles** au nombre de cas **stériles** précisément ou approximativement dans le rapport* r/s *et qu'il soit en conséquence, au nombre de tous dans le rapport* $\frac{r}{r+s}$ *ou* r/t *rapport qu'encadrent les limites* $\frac{r-1}{t}$ *&* $\frac{r+1}{t}$*. Il faut montrer que l'on peut concevoir des expériences en un nombre tel qu'il soit plus vraisemblable d'autant de fois que l'on veut (soit* c*) que le nombre des observations tombe à l'intérieur de ces limites plutôt qu'en dehors, c'est-à-dire que le nombre des observations fertiles soit au nombre de toutes les observations dans un rapport ni plus grand que* $\frac{r+1}{t}$*, ni plus petit que* $\frac{r-1}{t}$ *."*

Bernoulli utilise, pour faire cette démonstration, des méthodes combinatoires : comparaison des coefficients du binôme dont l'exposant est très élevé et minorations fines de leurs rapports infiniment grands.

Stigler [**33**, p. 77] avance l'hypothèse que Jacques Bernoulli n'a pas publié son *Ars conjectandi*[60] parce qu'il estimait que c'était un échec en raison du nombre considérable (25 550) d'expériences à faire pour avoir une «certitude morale» (0,999 qu'il prend avec c = 1 000) que la fréquence des cas «fertiles» observés est dans l'intervalle 29/50, 31/50 (ayant 50 boules dans son urne dont 30 blanches, pour modéliser chaque épreuve). Si on considère qu'une épreuve prend une minute, la durée de réalisation de ces expériences faites sans s'arrêter prendrait près de 18 jours entiers. Le résultat de Bernoulli n'a donc aucune valeur pratique, à moins d'améliorer l'inégalité qui permet de déterminer le nombre d'expériences à faire, ou de prendre une condition moins forte que la «certitude morale» (le «niveau de confiance» couramment utilisé de nos jours est 95% correspondant à c = 19, mais cela ne joue que par un facteur d'environ 2 sur la taille de l'échantillon à prélever : le calcul de Bernoulli donnerait alors 14 750 épreuves au lieu de 25 550) et surtout un intervalle plus grand car d'après les résultats de De Moivre (voir plus loin), le nombre d'épreuves à répéter varie comme le carré de la longueur de l'intervalle de confiance. De plus, ce nombre considérable ne correspond pas à l'intuition commune qu'au bout de quelques dizaines ou centaines d'épreuves, on obtient une fréquence très approchée de la véritable valeur de

60 - Bernoulli avait à peu près son théorème vers 1690.

la proportion *p*. Peut-être aussi Bernoulli avait-il conscience que cette procédure qu'il indiquait ne correspondait pas au problème qu'il se posait, qui était celui de l'estimation par intervalle.

Une approche efficace de ce problème de la probabilité inverse (que peut-on dire de la probabilité d'un événement quand on connaît sa fréquence de réalisations sur un certain nombre de répétitions ?) ne sera effectuée qu'à la fin du siècle par Bayes et Laplace (probabilités a posteriori) puis par le théorème limite central de Laplace au début du XIX^e siècle.

[61]

9 - De Moivre : le traitement analytique

C'est à la demande d'un Lord, Francis Roberts[62], membre de la Royal Society, lecteur du traité de Huygens et de l'*Essay* de Montmort, et certainement joueur, que Abraham de Moivre commença vers 1709 ses travaux en théorie des probabilités. Comme il l'écrit dans sa lettre de dédicace de son mémoire *De Mensura Sortis* de 1711, il se base sur les livres de Huygens et de Montmort

"A ma connaissance, Huygens *fut le premier à présenter des règles pour résoudre ces sortes de problèmes, que très récemment un auteur Français*[63] *a bien illustré d'exemples variés; mais ces gentilshommes distingués ne semblent pas avoir employé toute la simplicité et la généralité que la nature du sujet demande".*

Ceci laisse sous-entendre que Montmort n'apportait rien de plus par rapport à Huygens, sinon une illustration par quelques exemples nouveaux. Cela va amener des remarques de Montmort dans la 2^e édition de son *Essay* et une dispute de priorité sur quelques uns des résultats nouveaux.

La 2^e édition très augmentée de l'*Essay* de Montmort (1713) comporte beaucoup de résultats que De Moivre a publiés dans *De Mensura Sortis* de 1711. Comme Montmort le souligne lui-même, puisque De Moivre a basé son

61 - Gravure en tête de l'avertissement p.xi de la *Doctrine of Chances* de De Moivre, 3ème édition.
62 - Francis Roberts avait déjà travaillé le sujet : mémoire "An Arithmetical Paradox, concerning the chances of Lotteries", *Philosophical Transactions*, n° 198 pour le mois de mars 1693.
63 - Il s'agit de Pierre Rémond de Montmort qui a publié son *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* en 1708.

travail sur le traité de Huygens et la 1e édition de l'*Essay*, il n'y a rien de surprenant à ce que les résultats de De Moivre et ceux de Montmort et Nicolas Bernoulli soient similaires.

Le mémoire de De Moivre, *De Mensura Sortis* de 1711, porte aussi sur les jeux, mais de façon épurée ; c'est un traitement purement mathématique qui en est fait. Il commence directement en définissant le degré de probabilité à partir du nombre de cas également faciles, puis en prenant comme axiome la propriété de l'espérance mathématique donnée par Huygens dans sa proposition III. Ensuite, de Moivre traite le problème des partis dans le cas de joueurs de forces inégales (c'est le problème de Roberts pour des personnes jouant aux boules, qui ont des adresses différentes à ce jeu) et à plus de deux joueurs, ainsi que le problème de la durée du jeu (le cinquième de ceux proposés par Huygens).

Les 26 problèmes sont basés sur des modèles mathématiques de jeux de hasard, il n'y a pas de mention d'observations (et de relation entre fréquence et probabilité), ni même d'objets qui conduisent à des attributions de chances pour les issues possibles. La solution de beaucoup de problèmes est donnée en utilisant des développements du binôme[64] et de la binomiale négative, ainsi que des séries.

Abraham de Moivre développe ensuite ce mémoire en 1718 dans *The Doctrine of Chances*, **[26]**.

De Moivre, après avoir indiqué vers 1721 qu'il ne se sentait pas de taille à améliorer le résultat de Bernoulli, forge, dans *Miscellanea Analytica* (1730-1733), les outils mathématiques qui lui permettront d'aborder ce problème. Comme ce qu'avait fait Bernoulli, c'est une étude détaillée[65] du développement binomial pour des puissances élevées qui vont lui donner la clef. En donnant une approximation numérique pour les coefficients binomiaux, qui est équivalente à la formule de Stirling, il trouve que le logarithme du rapport d'un terme, situé à la distance d du terme médian (maximum), à ce terme médian est $-2dd/n$[66]. Il arrive ainsi à la courbe qu'on appellera normale, mais il ne la considère que comme une approximation et non comme la densité d'une loi continue. Il insère ces résultats dans les 2e et 3e éditions, qu'il applique au rapport des naissances garçons/filles en

64 - Voir l'article de M. Pensivy : "*Les démonstrations de la formule du binôme au XVIIe siècle*", dans **[22]**.

65 - *A Method of approximating the Sum of the Terms of the Binomial* (a+b)*n expanded into a Series*, *Doctrine of Chances*, 3ème édition, pp. 243-250.

66 - Corollaire 1, **[26]** *Doctrine of Chances*, 3ème édition, p. 245.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

réponse à Nicolas Bernoulli[67]. Citons ses derniers corollaires (**[26]**, p. 249-250) :

"Corollaire 8.

Le rapport que, dans une puissance infinie d'une binomiale, dénotée par n, le plus grand terme porte à la somme de tout le reste, sera justement exprimé par la fraction $\frac{a+b}{\sqrt{abnc}}$ *, où c désigne, comme auparavant, la circonférence d'un cercle dont le rayon égale l'unité.*

Corollaire 9.

Si, dans une puissance infinie, quelque terme est distant du plus grand par l'intervalle l, alors le logarithme hyperbolique du rapport que ce terme porte au plus grand sera exprimé par la fraction $-\frac{(a+b)^2}{2abn} \times ll$ *, pourvu que le rapport de l à* n *ne soit pas un rapport fini, mais soit tel qu'il puisse être conçu entre tout nombre donné* p *et* $\sqrt{n}$*, de sorte que l soit exprimable par* $p\ \sqrt{n}$*."*

Ce traité de de Moivre, *The Doctrine of Chances*, est resté Le Traité en calcul des probabilités jusqu'à la parution du grand traité de Laplace de 1812, *Théorie analytique des probabilités*, dans lequel ce dernier achève le dessein de Bernoulli en montrant que la loi limite de la variable discrète binomiale est une loi continue[68].

67 - Remarque II, **[26]** *Doctrine of Chances*, 3ème édition, p. 251-253.

68 - Ce résultat est connu sous le nom de Moivre-Laplace. On l'exprime en notation moderne de la façon suivante: Si X_n suit une loi binomiale B(n , p), c'est-à-dire X_n est le nombre de réalisations d'un événement E de probabilité p lors de n répétitions de l'épreuve, alors quand n tend vers l'infini, la loi de $(X_n - np)/\sqrt{np\,(1-p)}$ tend vers la loi normale centrée réduite de densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Bibliographie

[1] P. J. ABOUT et M. BOY : *La correspondance de Blaise Pascal et de Pierre de Fermat, la Géométrie du Hasard ou le début du Calcul des Probabilités,* Les Cahiers de Fontenay n° 32, 1983.

[2] Jean LE ROND D'ALEMBERT : *Opuscules Mathématiques,* vol.2 1761, vol.4 1768.

[3] Antoine ARNAULD et Pierre NICOLLE : *La logique ou l'Art de penser,* 1662, 2ème édition 1664, Edition critique par Pierre CLAIR et François GIRBAL, PUF, 1965.

[4] Jacques BERNOULLI : *Ars Conjectandi,* 1713, 4ème partie, traduit du latin par Norbert MEUSNIER, IREM de Rouen, 1987.

[5] Emile BOREL : *Valeur pratique et philosophie des probabilités,* Editions Gauthier-Villars, 2ème édition 1952.

[6] Georges Louis LECLERC, Comte DE BUFFON : *Essai d'arithmétique morale (1777),* Oeuvres, tome 12, Garnier Frères, 1855, et aussi in *Un autre Buffon* par J. L. BINET et J. ROGER, Editions Hermann, 1977.

[7] Cahiers pédagogiques de philosophie et d'histoire des mathématiques, fasc. 4 : *Pascal et les probabilités,* CRDP-IREM de Rouen, 1993.

[8] Gerolamo CARDANO : *The Book of Games of Chances*, Editions Holt, Rinehard and Winston, 1961.

[9] E. COUMET : *La théorie du hasard est-elle née par hasard ?,* Annales Economies, Sociétés, Civilisations, n° 3, 1970.

[10] Antoine Augustion COURNOT : *Exposition de la théorie des chances et de la probabilité,* Hachette, 1843.

[11] *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques,* 1785, réédition ACL, 1987.

[12] Pierre DE FERMAT : *Oeuvres*, (tome 2, Correspondance, 1894) publiées par P. TANNERY et C. HENRY, Editions Gauthier-Villars, 1891-1922.

[13] FONTENELLE : *Oeuvres complètes,* tome VI, Eloges, Editions Fayard, 1994.

[14] Ian HACKING : *The emergence of probability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

The Taming of Chance, Cambridge University Press, 1990.

[15] Abraham HALD : *A history of probability and statistics,* New York, 1989.

[16] *Histoire d'infini,* Actes du 9ème colloque Epistémologie et Histoire des mathématiques, Landerneau, 1992, IREM de Brest, 1994.

[17] Christiaan HUYGENS : *Ratiociniis in aleae ludo,* 1657, traduction française "Du calcul dans les jeux de hasard" in tome 14, Oeuvres complètes, 22 vol. 1888-1950, La Haye.

[18] IREM de Paris 7, collection *M.A.T.H. Mathématiques : approche par des textes historiques,* n° 61, 1986 et Mnémosyne n° 6, 1993.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités,* coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

[19] IREM de Poitiers, *Thèmes pour l'enseignement de la statistique et des probabilités*, 1994.

[20] IREM de Strasbourg, *Enseigner les probabilités en classe de première,* 1992.

[21] M. G. KENDALL and R. L. PLACKET, eds : *Studies in the history of statistics and probability,* vol. 2, C. Griffin & Co, Londres, 1977.

[22] *La démonstration mathématique dans l'histoire,* Actes du 7ème colloque Epistémologie et Histoire des mathématiques, Besançon, 1989, IREM de Besançon et de Lyon, 1990.

[23] Pierre Simon DE LAPLACE : *Essai philosophique sur les probabilités* (5ème édition 1825), préface de René THOM, postface de B. BRU, Editions Bourgois, 1986. *Théorie analytique des probabilités*, 1ère édition 1812, 3ème édition 1820, Oeuvres complètes, tome 7.

[24] Gottfried Wilhelm LEIBNIZ : *L'estime des apparences*, traduction et notes de M. Parmentier, Editions Vrin, 1995.

[25] M. LELOUARD, C. MIRA, J. M. NICOLLE : *Etudes d'histoire externaliste des mathématiques,* IREM de Rouen, 1994.

[26] Abraham DE MOIVRE : *De Mensura Sortis, Philosophical Transactions of the Royal Society,* London, n° 329, pour les mois de janvier, février et mars 1711, publié en 1712.

The Doctrine of Chances, 1718, 1738, 3ème édition 1756.

[27] Pierre REMOND DE MONTMORT : *Essay d'analyse sur les jeux de hazard,* 1708, 2ème édition 1713.

[28] Jean-François MONTUCLA : *Histoire des mathématiques,* 4 tomes, (tome 3, p. 380-426 sur les probabilités) 1799-1802, réédition Blanchard, Paris, 1968.

[29] Blaise PASCAL : *Oeuvres complètes,* Editions du Seuil, 1963.

[30] E. S. PEARSON and M. G. KENDALL, eds : *Studies in the history of statistics and probability,* vol. 1, C. Griffin & Co, Londres, 1970.

[31] Siméon Denis POISSON : *Recherches sur la probabilité des jugements*, 1837.

[32] Collectif: *Le futur est-il prévisible ?*, Sciences et Avenir, Hors-série n° 106, juin 1996.

[33] Stephen M. STIGLER : *The history of statistics*, Belknap Press, 1986.

[34] Isaac TODHUNTER : *A history of the mathematical theory of probability, from the time of Pascal to that of Laplace*, 1865, réédition Chelsea, New York, 1965.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

2 - Frise historique sur la probabilité et la statistique

Bref aperçu du développement des théories probabiliste et statistique

Jean-François Pichard

[1]

Dans cette présentation, j'ai essayé de faire un découpage selon les grands thèmes qui ont traversé les époques. Ce choix est arbitraire, bien sûr, et l'on retrouvera des grands savants (avec sûrement des omissions) sur plusieurs de ces thèmes, mais un ordre chronologique aurait émietté à la fois ces grands thèmes et les apports de ces savants.

0 - La préhistoire

les jeux, l'incertain,	3e millénaire av J.C.	astragales, dés en terre cuite	Mésopotamie
l'imprévisible	2e millén. av J.C.	dés cubiques équilibrés	Egypte
Aristote	IVe siècle av J.C.	logique distinguant le fortuit	Grèce
juriste Ulpien	IIIe siècle ap J.C.	tables d'estimation des rentes viagères	Rome
risques maritimes	XIIIe siècle	bourses d'assurance	Italie
rentes viagères	XIIIe siècle	estimation empirique	Pays-Bas
calcul des probabilités	1361 (dictionnaire Hachette)	science dont le but est de déterminer la vraisemblance d'un événement	Probabilité comme degré de crédibilité d'une opinion

1 - Frise extraite de l'ouvrage de P.R. de Montmort. *Essay d'analyse sur les jeux de Hazard*, 2e éd. 1713, p. 130.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

1 - Les premiers écrits : Cardan et Galilée

Jérôme Cardan	1501-1576 Italie	traité *De Ludo Aleae*, entre 1525 et 1560,publié en 1665	Notions : jeu équitable équipossibilité des faces pour un déhonnête, la mise est proportionnelle aux chances, combinaisons pour 2 et 3 dés
Galileo Galilei	1564-1642 Italie	mémoire vers 1620, publié en 1718	Problème du Grand Duc de Toscane

2 - Le début « officiel » : Pascal et Fermat[2]

Pierre de Fermat	1601-1665 France	correspondance de 1654, publiée en 1679	Problème des partis combinaisons
Blaise Pascal	1623-1662 France	*Traité du triangle arithmétique*, 1654, publié en 1665	Jeu équitable, droit d'espérer, conditionnel, récurrence

3 - Le premier traité publié : Huygens[3]

Christiaan Huygens	1629-1695 Hollande	traité *De ratiociinis in Ludo aleae*, 1657	Notions : jeu juste, valeur du jeu = *expectatio* d'où espérance

4 - Logique des événements et probabilité

Antoine Arnauld et Pierre Nicolle	1612-1694 1625-1695 France	la *Logique de Port Royal* ou l'art de penser, 1662	« probabilité » est pris au sens de degré de crédibilité et au sens probabiliste actuel de rapport de « chances »

2 - La théorie des probabilités est une mathématisation du hasard (une "*géométrie du hasard*", comme l'a formulé Pascal).

3 - Le traité de Huygens est resté le seul ouvrage important en théorie des probabilités jusqu'au début du XVIIIe siècle.

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

5 - Arithmétique politique

John Graunt	1620-1674 Angleterre	traité *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality...*, 1662	Critique des sources, **table de mortalité**, estimation raisonnée de la population et de son évolution
William Petty	1623- 1687 Angleterre	traité *Political Arithmétic*, vers1673, publié en 1690	Évaluation de la population, de sa croissance, et de sa distribution hommes /femmes ; évaluation de divers biens et marchandises
Christiaan et Ludwig Huygens, Jan Hudde	Hollande	correspondance 1669-1671, publiée en 1920	Évaluation des rentes viagères sur des tables de mortalité, espérance de vie (conditionnelle), vie probable, courbe de mortalité (étudiée par Ch. Huygens)
Jan de Witt	1625-1672 Hollande	rapport sur les rentes viagères 1671	
Gottfried W. Leibniz	1646-1716 Allemagne	*De incerti aestimatione*, 1678 *Essay de quelques raisonnements nouveaux sur la vie humaine et sur le nombre des hommes*, 1680, publié en 1866	Vie moyenne (conditionnelle), vie probable, population stationnaire, calcul de fécondité
Edmund Halley	1656-1742 Angleterre	mémoire "*An Estimate of the degrees of the Mortality of Mankind*", *Phil. Trans.*[4], 1693	Première table de mortalité digne de ce nom, pour règler la valeur des assurances sur la vie et les rentes viagères

6 - La probabilité à la fin du XVII^{e} siècle

Gottfried W. Leibniz	1646-1716 Allemagne	*De arte combinatoria*, 1666, divers mémoires, de 1678 à 1686, publiés en 1866 et sq. correspondance	Aspects philosophiques, jeu juste, équipossibilité par principe de raison suffisante, probabilité comme degré de possibilité
Jakob Bernoulli	1654-1705 Suisse	mémoire de 1685	Introduction de série dans le calcul d'une probabilité

4 - *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*.

7 - Le début du XVIIIe siècle et les trois grands traités

Jakob Bernoulli	1654-1705 Suisse	traité *Ars Conjectandi*, vers 1692, publié en 1713	L'urne comme modèle, schéma binomial, application aux choses morales et politiques, une « loi des grands nombres »: son "*théorème d'or*"
Pierre Rémond Montmort	1678-1719 France	traité *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, 1708 ; 2e édition 1713	Le premier traité après de celui de Huygens ; traitement algébrique (combinatoire) de jeux complexes, fonction génératrice
avec Nicolas Bernoulli	1695-1726 Suisse	correspondance dans la 2e édition, 1713	L'infini dans les jeux : loi géométrique
Abraham de Moivre	1667-1754 Angleterre	mémoire "*De mensura sortis*", *Phil. Trans.*,1711 traité *Doctrine of Chances*, 1718, 3e édition 1756 *A Traitise of Annuities on Lives*, 1725.	Équation de récurrence aux différences finies, traitement analytique, fonction génératrice, « loi des grands nombres » par approximation normale[5]. Loi de mortalité, valeur des rentes viagères sur plusieurs têtes.
Georges Louis Leclerc de Buffon	1707-1788 France	mémoire sur le jeu de Franc-Carreau, 1733, dans *Essai d'arithmétique morale*, 1777	Probabilité géométrique, intervention du calcul intégral en théorie des probabilités, première expérimentation sur le paradoxe de Saint-Pétersbourg.
Daniel Bernoulli	1700-1782 Suisse	mémoire *Specimen theoriae novae de mensura sortis* à l'Académie Petrov, 1730-31	Paradoxe de Saint-Pétersbourg : variable aléatoire ayant une espérance mathématique infinie, espérance morale.

5 - La distribution de Laplace-Gauss a été qualifiée de "normale" par Pearson en 1893.

8 - Démographie au XVIII[e] siècle

J. Arbuthnot, N. Bernoulli, G.L. Buffon, A. de Moivre, D. Bernoulli, P. S. Laplace, D. Poisson	XVIII[e] siècle et début XIX[e] siècle	*An Argument for Divine Providence, Phil. Trans.*, 1710	Rapport du nombre de naissances de garçons à celui des filles, le premier test d'hypothèse statistique.
Leonhard Euler	1707-1783 Suisse	recherches générales sur la mortalité..., 1760	Relation entre table de mortalité et croissance de la population.
Antoine Deparcieux	1703-1768 France	traité *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, 1746	Théorie et première table de mortalité française ; durée de vie probable, moyenne dans une population non stationnaire.
Daniel Bernoulli	1700-1782	mémoires vers 1760	Dispute sur l'inoculation
Jean Le Rond d'Alembert	1717-1783 France	*Opuscules mathématiques*	
Pierre Wargentin	1718-1783 Suède	mémoires de 1755 et sq	Tables de mortalité avec répartition par sexe, âge et causes de décès

9 - La théorie des erreurs, vers la loi normale et le théorème limite central[6]

Thomas Simpson	1710-1761 Angleterre	*Miscellaneous tracts*,... 1757	Distribution des erreurs suivant une densité continue triangulaire.
Daniel Bernoulli	1700-1782 Suisse	*dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium*, 1777	Densité continue en arc de cercle.
Johann H. Lambert	1728-1777 Allemagne	*Photometria sive de mensura*, 1760	Première représentation d'une courbe des erreurs "en cloche".
Joseph L. Lagrange	1736-1813 Italie	mémoire sur l'utilité de prendre le milieu..., 1776	

6 - C'est le problème de la combinaison d'observations discordantes d'une même quantité ou de plusieurs liées par des équations de condition, afin d'en obtenir les meilleures estimations possibles.

Pierre Simon Laplace	1749-1827 France	mémoire sur le milieu qu'il faut choisir entre les résultats de plusieurs observations, 1777; etc... *Théorie analytique des probabilités*, 1812.	Diverses densités, en particulier 1ère loi de Laplace et loi normale ; énoncé du TLC[7]. Il fonde les bases de la théorie de l'inférence.
Adrien Marie Legendre	1752-1833 France	*Nouvelles méthodes pour la détermination de l'orbite des comètes*, 1805	Méthode des moindres carrés.
Carl Friedrich Gauss	1777-1855 Allemagne	*Theoria Motus*, 1809 ; *Theoria combinationis observationum erroribus minimis*, 1821	Méthode des moindres carrés et loi normale *Méthode des moindres carrés*, traduction Bertrand, 1855.

10 - Le problème de la probabilité inverse

Thomas Bayes	≈ 1701-1761 Angleterre	*"An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances", Phil. Trans.*, 1763	Problème de l'inférence statistique à partir de probabilités a posteriori.
Pierre Simon Laplace	1749-1827 France	*Mémoire sur la probabilité des causes par les événements*, 1774	

11 - Agrégation des préférences - probabilité des témoignages

Borda	1733-1799 France	Mémoire sur les élections au scrutin, 1781	
Jean Antoine Condorcet	1743-1794 France	*Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, 1785	
Pierre Simon Laplace	1749-1827 France	mémoire sur les probabilités, 1781 et *Théorie Analytique des probabilités*, 1812, chap. xi	Cette application du calcul des probabilités va susciter de vives polémiques dès le début du XIXe siècle.
Siméon Denis Poisson	1781-1840 France	*Recherche sur la probabilité des jugements...*, 1837	

7 - TLC = Théorème Limite Central, d'après une dénomination de G. Pólya en 1920.

12 - Enseignement et philosophie des probabilités

Jean Antoine Condorcet	1743-1794 France	*Elémens du calcul des probabilités et son application aux jeux de hasard...*, 1805	Le premier ouvrage destiné à l'enseignement
Sylvestre Lacroix	1765-1840 France	*Traité élémentaire du calcul des probabilités*, 1816, 1822	Le premier à enseigner le calcul des probabilités en 1785 sur un plan de Condorcet ; cet ouvrage expose les différents thèmes évoqués ici.
Pierre Simon Laplace	1749-1827 France	*Essai philosophique sur les probabilités*, 1814	Premier traité de vulgarisation ; essai d'axiomatisation.
Siméon Denis Poisson	1781-1840 France	*Recherche sur la probabilité des jugements...*, 1837	Distinction des probabilités objective et subjective;
Antoine Augustin Cournot	1801-1877 France	*Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, 1843	Fondement de la théorie, distinction des probabilités objective et subjective critique de l'homme moyen de Quetelet.
Joseph Bertrand	1822-1900 France	*Calcul des probabilités*, 1889	Il signale l'ambiguïté de l'expression "au hasard".
Emile Borel	1871-1956 France	*Le hasard*, 1914/1948 *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, 1938	Discussion sur l'attribution de probabilité dans des cas concrets.

13 - La statistique économique et sociale

William Playfair	1759-1823 Angleterre	*The commercial and political atlas*, 1786, *Statistical Breviary*, 1801	Première publication de graphiques statistiques.
André M. Guerry	France	*Essai sur la statistique morale de la France*, 1833	Cartes statistiques et premier histogramme.
Adolphe Quetelet	1796-1874 Belgique	*Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale*, 1835	Homme moyen, vérification de la distribution normale en sciences de la vie.

14 - Lois limites

Siméon Denis Poisson	1781-1840 France	*Recherche sur la probabilité des jugements...*, 1837	Fonction cumulative, loi des grands nombres et variable aléatoire de Poisson.
Irénée Jules Bienaymé	1796-1878 France	considérations à l'appui de la découverte de Laplace..., 1853	Égalité de Bienaymé, Théorème Limite Central à plusieurs dimensions.
Pafnouti Ludovic Tchebychev	1821-1894 Russie	des valeurs moyennes, 1867	Le père de l'école russe, loi des grands nombres, 1863 inégalité de B.-T., 1867.
Andreï Andreïevitch Markov	1856-1922 Russie	la loi des grands nombres et la méthode des moindres carrés (en russe), 1898.	Démonstration rigoureuse du TLC en 1898 ;
A.M. Liapounov	1857-1918 Russie	proposition générale du calcul des probabilités, 1901	Démonstration du TLC avec conditions suffisantes.
Emile Borel	1871-1956 France	les probabilités dénombrables... 1909	Loi forte des grands nombres.

15 - La biométrie en Angleterre

Francis Galton	1822-1911 Angleterre	*Regression towards mediocrity in hereditary stature*, 1886. *Co-relations and their measurement*, 1888	Prolongement de Quetelet, Régression linéaire et corrélation.
Karl Pearson	1857-1936 Angleterre	*on the criterion that a given system of deviations from the probable...*, 1900	Loi normale multi-dimensionnelle, corrélation partielle ; test du Khi-deux, méthode du maximum de vraisemblance.
Ronald Fisher	1890-1962 Angleterre	*The design of Experiments*, 1935	Statistique en géométrie multidimensionnelle ; analyse de variance ; plan d'expérience.

16 - L'axiomatisation

Emile Borel	1871-1956 France	*Leçons sur la théorie des fonctions*, 1896	Théorie des ensembles et de leur mesure.
Henri Lebesgue	1875-1941 France	*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 1904	Théorie abstraite de la mesure et intégration.
Maurice Fréchet	1878-1973 France	Intégrale définie sur un ensemble abstrait, 1915	Espérance mathématique d'une variable aléatoire.
Paul Lévy	1886-1971 France	*Calcul des probabilités*, 1925	Loi de "0 ou 1", fonction caractéristique et convergence en loi.
Andreï N. Kolmogorov	1903-1987 Russie	*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeits-reichnung*, 1933	Fondement axiomatique de la théorie des probabilités appuyée sur la théorie de la mesure.
Harald Cramér	1893-1985 Suède	*Random variables and probability distributions*, 1937.	Fondements mathématiques de la théorie des probabilités.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

17 - Processus et problèmes limites

Andreï Andreïevitch Markov	1856-1922 Russie	*Wahrscheinlichkeits-rechnung*, 1912	Processus en chaîne, 1906.
Alexandre J. Khintchine	1894-1959 Russie	*Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeits-rechnung*, 1933.	Théorèmes limites en calcul des probabilités.
Paul Lévy	1886-1971 France	*Théorie de l'addition des variables aléatoires*,1937. *Processus stochastiques et mouvement brownien*, 1948.	Lois stables et infiniment divisibles. Problèmes limites. Temps aléatoire, temps local. Conditionnement, martingales.
Andreï N. Kolmogorov et Boris V. Gnedenko	1903-1987 Russie	*Distributions limites de sommes de variables aléatoires indépendantes*, 1949 (en russe).	Problèmes des grandes déviations, 1929. Processus de Markov, lois infiniment divisibles.
William Feller	1906-1970 Yougoslavie puis U.S.A.	*Introduction to probability théorie*, 1950.	Résolution complète de la loi des erreurs, 1937.
Maurice Frechet	1878-1973 France	*Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités, Livre I, Généralités sur les Probabilités. Variables aléatoires*. 1937.	Compléments à la théorie de Kolmogorov.
Harald Cramér	1893-1985 Suède	*Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités*, 1938.	Conséquences du T.C.L. et th. de continuité avec Paul Lévy.
A. Blanc-Lapierre et R. Fortet	France.	*Théorie des fonctions aléatoires*, 1952	Théorie générale des processus stochastiques.
Joseph Lee Doob	U.S.A.	*Stochastic processes*, 1953.	

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

3 - A PROPOS DE LA DÉFINITION DE LA PROBABILITÉ

Jean-Claude THIENARD

Introduction

P.S. Laplace donne comme définition de la probabilité d'un événement "*...le rapport du nombre de cas favorables à celui de tous les cas possibles*" et il ajoute : "*mais cela suppose les divers cas également possibles*"[1].

Un siècle plus tard[2], alors que cette définition a été systématiquement reprise dans les différents traités qui ont suivi celui de Laplace et transmise par la tradition didactique naissante qu'ils instituaient, H. Poincaré interroge et commente : "*cette définition est une sorte de pétition de principe : comment reconnaître que tous les cas sont également possibles* ?"

Cet article traitera succinctement et partiellement :

• Des difficultés théoriques, logiques et didactiques liées à la «définition Laplacienne».

• Des origines de «définition Laplacienne». De sa fonction dans le Traité de Laplace et dans les traités qui le suivent. De ses articulations avec les pratiques précédentes. Du problème de l'applicabilité du calcul .

• De l'introduction de la probabilité dans les traités modernes[3].

• Des problèmes didactiques que pose l'introduction du concept de probabilité.

1 - *Traité Analytique des Probabilités* (1812).

2 - *Calcul des Probabilités de* H. Poincaré (1896).

3 - Traité de Kolmogorov : *fondements de la théorie des probabilités* (1933) et ceux qui le suivent.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Ce travail est fondé sur une étude intertextuelle des grands auteurs et suppose donc, en préalable, la lecture de certains textes. C'est pourquoi il est proposé au lecteur, dès le début de l'article, quatre extraits de P.S. Laplace, J. Bertrand et H. Poincaré, complétés par la suite par des textes de Fermat et de J. Bernoulli. D'autres textes commentés sont placés en annexes.

A - Des difficultés théoriques et didactiques liées à « la définition »

L'analyse qui suit s'appuie sur les extraits repérés par une lettre (T), de l'introduction au *Traité Analytique des Probabilités* de P. S. Laplace, du *Calcul des Probabilités* de J. Bertrand et du *calcul des Probabilités* de H. Poincaré.

(T_1)

> "La théorie des hasards consiste à **réduire**[4] tous les événemens[5] du même genre, à un certain nombre de cas **également possibles**[4], c'est-à-dire, tels que nous soyons également indécis sur leur existence ; et à déterminer le nombre des cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le **rapport**[4] de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la **mesure de cette probabilité**[4] qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles."

Introduction du *Traité Analytique des Probabilités* de P. S. LAPLACE

(T_2)

Principes généraux du calcul des Probabilités.

> **"Premier Principe.**
>
> Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu, **est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles.**

4 - Dans cet article, les mots et expressions écrits en **caractères gras** ont été mis en relief par l'auteur, J. C. Thiénard.

5 - L'orthographe et la ponctuation sont celles du texte original, seconde édition publiée en 1814 par Courcier, imprimeur à Paris.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Deuxième Principe.

Mais cela suppose les divers cas également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable. Éclaircissons ce principe par un exemple.

Supposons que l'on projette en l'air, une pièce large et très mince dont les deux grandes faces opposées, que nous nommerons *croix* et *pile*, soient parfaitement semblables. Cherchons la probabilité d'amener croix, une fois au moins en deux coups. **Il est clair qu'il peut arriver quatre cas également possibles**[4], savoir, *croix* au premier et au second coup ; *croix* au premier coup et *pile* au second ; *pile* au premier coup et *croix* au second ; enfin *pile* aux deux coups. Les trois premiers cas sont favorables à l'événement dont on cherche la probabilité qui, par conséquent est égale à $\frac{3}{4}$; en sorte qu'il y a trois contre un à parier que *croix* arrivera au moins une fois en deux coups.

On peut ne compter à ce jeu, que trois cas différens[5], savoir ; *croix* au premier coup, ce qui dispense d'en jouer un second ; *pile* au premier coup et *croix* au second ; enfin *pile* au premier et au second coup. Cela réduirait la probabilité à $\frac{2}{3}$, si l'on considère avec d'Alembert[6], ces trois cas, comme étant également possibles. Mais il est **visible** [5] que la probabilité d'amener *croix* au premier coup est $\frac{1}{2}$ tandis que celle des deux autres cas est $\frac{1}{4}$. Le premier cas est un événement simple qui correspond aux deux événemens composés, *croix* au premier et au second coup, et *croix* au premier coup ; *pile* au second. Maintenant si conformément au second principe, on ajoute la possibilité $\frac{1}{2}$ de *croix* au premier coup, à la possibilité $\frac{1}{4}$ de *pile* arrivant au premier coup et *croix* au second ; on aura $\frac{3}{4}$ pour la probabilité cherchée, ce qui s'accorde avec ce que l'on trouve dans la supposition où l'on joue les deux coups. Cette

6 - Voir le texte de D'Alembert dans l'annexe I.

supposition ne change rien au sort de celui qui parie pour cet événement : elle sert seulement à réduire les divers cas, à des cas également possibles."

Introduction du *Traité Analytique des Probabilités.* P. S. LAPLACE.

(T_3)

CHAPITRE I.

ÉNUMÉRATION DES CHANCES

On estime la probabilité d'un événement par le nombre des cas favorables divisé par le nombre des cas possibles. La difficulté ne consiste que dans l'énumération des cas.
LAGRANGE

"1. Définition de la probabilité. L'égalité des chances est supposée dans la définition. - 2. Exemple d'une énumération incorrecte. - 3. Autre exemple. - 4. Le nombre des cas ne doit pas être infini. Contradiction résultant de l'oubli de cette condition. - 5. Second exemple. - 6. Troisième exemple. - 7. Quatrième exemple. - 8, 9, 10, 11, 12, 13. Solution de quelques problèmes par l'énumération des chances. - 14. Prétendu paradoxe du chevalier de Méré. - 15. Combien faut-il tenter de coups pour obtenir une probabilité donnée de produire au moins une fois un événement dont la probabilité est connue ? - 16. Problème du jeu de rencontre. -17. Problème relatif aux tirages de boules numérotées sans les remettre après chaque tirage. - 18. Problème relatif au dépouillement d'un scrutin de ballottage. - 19. Une urne contient des boules numérotées, quelle est la probabilité pour que sur n tirages la somme des points tirés ait une valeur donnée. - 20. Application au cas de trois dés.

1. La probabilité d'un événement est **estimée**[4] par l'énumération des cas favorables, rapprochée de celle des cas possibles.

On parie, en jetant un dé, qu'il montrera le point 4. Le dé a six faces : six cas sont possibles, un seul est favorable. La probabilité est $\frac{1}{6}$. **C'est une définition**[4].

On jette deux dés ; les six points du premier, en s'associant aux six du second, peuvent former trente-six combinaisons : la probabilité d'amener une d'entre elles, double deux par exemple, est $\frac{1}{36}$.

La probabilité d'amener 3 et 4 est $\frac{2}{36}$: chacun des dés pouvant donner 3 lorsque l'autre donne 4, il y a deux combinaisons favorables 3 et 4, 4 et 3 ; on leur donne le même nom, 3 et 4, mais elles sont réellement distinctes.

La probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles. Une condition est sous-entendue : tous les cas doivent être également possibles.[7] La définition, sans cette restriction, n'aurait aucun sens. Il peut se faire que l'événement arrive, il se peut aussi qu'il n'arrive pas ; ce sont deux cas possibles, un seul est favorable. Toute probabilité serait donc $\frac{1}{2}$. L'erreur est grossière. D'Alembert a élevé l'objection et refusé de passer outre.

Avant de compter les chances, il faut constater qu'elles ont même vraisemblance.

[…]

3. Supposons, pour second exemple, que Pierre et Paul jouent aux boules ; celui qui placera la boule la plus rapprochée du but gagnera. Ils sont également habiles ; mais Pierre a deux boules à jeter, Paul n'en a qu'une. Quelle est la probabilité pour que Pierre gagne ?

Sur trois boules jetées par des joueurs également habiles, Pierre en a deux. La probabilité de gagner est pour lui $\frac{2}{3}$.

Ne pourrait-on pas dire cependant :

Chacune des boules de Pierre peut être meilleure ou moins bonne que la boule de Paul ; quatre cas sont donc possibles. Sur les quatre, un seul fait perdre Pierre, celui où ses deux boules sont l'une et l'autre moins bonnes que celle de Paul, les trois autres cas lui sont favorables. La probabilité de gagner, pour Pierre, est $\frac{3}{4}$.

7 - Cette condition implicite est souvent oubliée par les élèves.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

L'énumération est exacte, mais les cas n'ont pas même vraisemblance.

Paul a de bons et de mauvais coups. Si la boule qu'il a lancée l'emporte sur la première boule de Pierre, il est à croire, sans rien savoir de plus, qu'elle n'est parmi les mauvaises. La chance pour qu'elle soit moins bonne que la seconde boule de Pierre est diminuée. Parmi les quatre cas possibles, ceux dans lesquels Pierre vaincu dans un coup est vainqueur dans l'autre sont moins vraisemblables que ceux dans lesquels ses deux boules ont le même sort."

Calcul des Probabilités de J. BERTRAND (1899)
(d'après les cours du Collège de France).

(T_4)

CHAPITRE I.

DÉFINITION DES PROBABILITES.

"1. On ne peut guère donner une définition satisfaisante de la *Probabilité*. On dit ordinairement : la probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables à cet événement au nombre total des cas possibles.

Ainsi, si le premier nombre est n et le second N, la probabilité est $\frac{n}{N}$; cette définition, dans certains cas, ne soulève aucune difficulté. Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité de tirer un roi est $\frac{4}{32}$, puisque le nombre total des cas possibles, c'est-à-dire des cartes, est 32, et que parmi ces cartes il y a quatre rois ; on a donc ici N = 32, n = 4. Quand on jette un dé, la probabilité d'amener le point 4 est $\frac{1}{6}$, car N = 6 et n = 1, le dé ayant 6 faces dont une seule porte le point 4. Dans une urne qui contient n boules blanches et p noires, on tire une boule ; la probabilité qu'elle soit blanche est

$$\frac{n}{n+p}.$$

2. Prenons un exemple un peu plus compliqué. Deux urnes, qui ne diffèrent pas extérieurement, renferment, la première n boules blanches et p noires, la seconde n' blanches et p' noires.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

On fait tirer une boule à une personne, et on demande quelle est la probabilité pour amener blanche. On pourrait dire que le nombre total des cas est n+n′+p+p′ et que la probabilité est

$$\frac{n + n'}{n + n' + p + p'} .$$

On peut dire aussi que deux cas peuvent d'abord se présenter, soit la première, soit la seconde urne ; la probabilité de prendre dans la première est $\frac{1}{2}$ et dans la seconde $\frac{1}{2}$, car il y a autant de chances de mettre la main dans l'une que dans l'autre. Si j'ai mis la main dans la première urne, la probabilité est $\frac{n}{n+p}$ pour que, prenant dans la première urne, on ait une boule blanche ; en vertu du théorème de la probabilité composée, que je ne tarderai pas à établir, la probabilité de mettre à la fois la main dans la première urne et d'en tirer une boule blanche est $\frac{1}{2}\frac{n}{n+p}$; la probabilité analogue pour la seconde urne est $\frac{1}{2}\frac{n'}{n'+p'}$.

La somme $\frac{1}{2}\frac{n}{n+p}+\frac{1}{2}\frac{n'}{n'+p'}$ est l'évaluation correcte de la probabilité demandée, et il n'y aura égalité entre les deux évaluations que dans un cas particulier

$$\frac{n}{n+p}=\frac{n'}{n'+p'}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{n}{p}=\frac{n'}{p'}.$$

A quoi tient cette divergence ? A ce que les n+n′+p+p cas ne sont pas *également* probables.

Ainsi supposons qu'il y ait deux fois plus de boules dans la première urne

$$n' + p' = \frac{1}{2}(n + p) .$$

La probabilité pour que je prenne une boule *donnée* dans cette urne est $\frac{1}{2(n+p)}$; et pour que je la prenne dans la seconde elle est $\frac{1}{(n+p)}$.

A la définition de la probabilité, il faut donc ajouter : à condition que tous les cas soient *également* vraisemblables.

Deux autres exemples sont dus à Bertrand.[8]

8 - Nous ne reproduisons ici que le second : *le problème du jeu de boules*.

4. Problème du jeu de boules. - Deux joueurs également habiles, Pierre et Paul, jouent aux boules ; Pierre a deux boules à lancer, Paul une boule, et la victoire est à celui des deux dont l'une des boules approchera le plus du but.

Quelle est la probabilité pour que Paul gagne ?

Soient A et B les boules de Pierre, C celle de Paul ; six cas peuvent se présenter, en rangeant les boules suivant leur proximité du but.

ABC, BCA, CAB, ACB, CBA, BAC.

Ces six cas sont également probables ; ceux qui donnent la victoire à Pierre sont au nombre de quatre, ceux qui donnent la victoire à Paul au nombre de deux : la probabilité de gagner est donc $\frac{1}{3}$ pour Paul.

On pourrait raisonner autrement : la boule A de Pierre est plus éloignée du but que C, ou bien c'est le contraire.

$$A > C \quad \text{ou} \quad A < C.$$

De même pour la boule B

$$B > C \quad \text{ou} \quad B < C.$$

Donc quatre cas sont possibles

$A > C$	avec	$B > C$,
$A < C$	"	$B > C$,
$A > C$	"	$B < C$,
$A < C$	"	$B < C$.

Un seul cas, le premier, est favorable à Paul, puisque sa boule est à la fois plus rapprochée que A et B ; la probabilité serait donc $\frac{1}{4}$.

Mais les quatre cas ne sont pas également probables.

$A > C$	avec	$B > C$	correspond à	2	combinaisons	CAB, CBA
$A < C$	"	$B > C$	"	1	"	ACB
$A > C$	"	$B < C$	"	1	"	BCA
$A < C$	"	$B < C$	"	2	"	ABC, BAC

5. **La définition complète de la probabilité est donc une sorte de pétition de principe**[9] : comment reconnaître que tous les cas

9 - Dans la mesure où celle-ci n'est pas de nature axiomatique.

sont également probables ? **Une définition mathématique ici n'est pas possible**[10] ; nous devrons, dans chaque application, faire des **conventions**[10], dire que nous considérons tel et tel cas comme également probables. Ces conventions ne sont pas tout à fait arbitraires, mais échappent à l'esprit du mathématicien qui n'aura pas à les examiner, une fois qu'elles seront admises.

Ainsi tout problème de probabilité offre deux périodes d'étude : la première, métaphysique pour ainsi dire, qui légitime telle ou telle convention ; la seconde, mathématique, qui applique à ces conventions les règles du calcul."[10]

Calcul des Probabilités
de H. POINCARÉ

A partir du «Traité» de Laplace et jusqu'à celui de Kolmogorov, les Traités et les cours de probabilité, commencent par la « **définition Laplacienne** » de la probabilité. Comme dans le traité de Laplace (voir (T_2) (T_3) (T_4)), ils la font suivre d'exemples destinés à montrer comment appliquer la définition et à mettre en garde contre les mauvaises applications qui peuvent en être faites.

Ces exemples soulignent que la définition ne s'applique que **si les divers cas sont également possibles**.

"*Mais cela suppose les divers cas également possibles*" (T_2)

"*Une condition est sous entendue : tous les cas doivent être également possibles. La définition, sans cette restriction n'aurait aucun sens*". (T_3)

"*A la définition de la probabilité il faut ajouter : à condition que tous les cas soient également vraisemblables*". (T_4)

J. Bertrand recopie P.S. Laplace. H. Poincaré recopie et discute J. Bertrand. Ainsi reconsidérant l'exemple, détaillé par J. Bertrand, dans la partie de boules entre Pierre et Paul, H. Poincaré en vient à mettre en cause la « définition Laplacienne » de la probabilité : " l*a définition complète de la probabilité est une sorte de pétition de principe, comment reconnaître que tous les cas sont également probables* ?"

10 - Voir en Annexe IV

1. La synthèse faite sur la définition et la signification de la probabilité dans *l'encyclopédie des Mathématiques pures et appliquées*. Article de E. Czuber (1906) - Edition française publiée sous la direction de Molla.

2. La réflexion de Borel sur «les deux périodes d'étude» distinguées par H. Poincaré.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

En d'autres termes : (Voir extraits de T_2, T_3, T_4 ci -dessus) :

1) La définition est circulaire - Elle suppose, dans son énoncé, la définition de l'équiprobabilité donc celle de probabilité -

Ce n'est donc pas une définition au sens mathématique du terme.

2) La définition n'est pas opératoire. Elle n'indique pas comment assigner des probabilités aux possibilités d'une expérience dont les résultats dépendent du hasard, autrement dit, elle ne donne pas ses cas d'application.

Poincaré affirme ensuite : "*une **définition** mathématique ici **n'est pas possible** ; nous devons dans chaque application faire des **conventions**, dire que nous considérons tel et tel cas comme également probables*"[11].

Il est donc vain de chercher une telle définition ou une telle procédure. Il faut "*faire des conventions*".

Le texte de Poincaré par la critique qu'il développe de la définition de Laplace, par l'affirmation qu'"*une définition mathématique ici n'est pas possible*...", inaugure le point de vue moderne[12]: le calcul des probabilités est affaire de mathématiciens en tant que corpus de définitions, de théorèmes... à construire et à développer sur des objets - les probabilités - gérés par un certain nombre de règles, fournies par la tradition et prises pour axiomes.

Le problème de l'assignation de probabilités aux possibilités d'une expérience aléatoire, c'est à dire le problème de **l'applicabilité du calcul** - qui est **primordial** - est alors hors champ mathématique. De plus, Poincaré laisse penser que ce problème n'est pas susceptible de solutions relevant d'une **nécessité**, c'est-à-dire de l'application de règles ou de procédures explicites universellement appliquées[13].

11 - Cf. note 9.

12 - Point de vue qui sera parachevé par Kolmogorov.

13 - Il convient de noter l'irruption de la subjectivité dans le texte Poincaré - "*faire des conventions, dire que nous considérons...*" - et donc l'irruption de la non nécessité, du non mathématique. "*Les conventions ne sont pas tout à fait arbitraires*". Elles résultent d'un accord sur de bonnes raisons partagées.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

En effet : qu'est ce qui conduit dans l'exemple du jeu de boules entre Pierre et Paul à assigner une égale probabilité à ABC, ACB, etc... ?

Que répondre à D'Alembert ? Que répond Laplace ?[14]…

La position de Poincaré, qui intervient après deux siècles et demi de pratique du calcul des probabilités, semble indiquer que les **principes directeurs** de celui-ci se sont perdus, plus précisément que la **sémantique** du calcul échappe : "*Ces conventions ne sont pas tout à fait arbitraires, mais échappent à l'esprit du mathématicien qui n'aura pas à les examiner, une fois qu'elle seront admises...*".

En conséquence, la **sémantique** du calcul est clairement rejetée hors du champ des mathématiques : "*Ainsi tout Problème de probabilité offre deux périodes, la première métaphysique*[15] *pour ainsi dire...*", et donc seule la **syntaxe** du calcul concerne le mathématicien.

Cette position, pour bien fondée qu'elle soit, est d'un **point de vue** historique et **épistémologique**, **paradoxale** par le renversement qu'elle opère par rapport aux points de vue traditionnels. En effet, le calcul a été créé et développé pour être appliqué et ce que Poincaré appelle des "*conventions*" – qui sont, pour les créateurs, des **déterminations de sens** – sont alors premières. Elles déterminent la sémantique du calcul, et les « règles du calcul » – ce que Laplace appelle les principes – en découlent par voie de conséquence.

L'analyse comparée des quatre textes cités ci-dessus, l'analyse de l'évolution du contenu sémantique, de la fonction de la « définition Laplacienne », de Laplace à Poincaré, la recherche de ses origines et de ses raisons aideront :

1) à comprendre comment les mathématiciens en sont arrivés à considérer le calcul selon le point de vue exprimé par Poincaré.

2) à dégager et à discuter les problèmes théoriques et didactiques ainsi résolus ou posés.

14 - Voir le texte de D'Alembert dans l'annexe I.

15 - Sens Kantien du terme : qui relève de la faculté de connaître.

B - Des origines de la définition. De sa fonction dans le Traité de Laplace et dans ceux qui le suivent.

Texte (T^4) de H. Poincaré :

"On ne ***peut guère donner une définition satisfaisante*** *de la probabilité. On dit* ***ordinairement*** *: la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre de cas possibles.*

... ainsi dans certains cas, cette définition ne soulève aucune difficulté..."

Poincaré donne alors l'exemple du jeu de cartes et celui d'une urne contenant n boules blanches et p boules noires.

"On tire une boule ; la probabilité qu'elle soit blanche est $\frac{n}{n+p}$ *."*[16]

Pour Poincaré, dans le cas de l'urne, la définition s'applique de **façon évidente**. Pourquoi[17] ?

Autrement dit, il est **évident** que dans ce cas, tous les cas possibles ont la même probabilité de réalisation. Le problème du fondement de cette évidence est immédiatement posé par l'exemple des deux urnes qui suit, où la définition ne s'applique pas, et par l'exemple de la partie de boules entre Pierre et Paul qui conduit à parler de **Pétition de principe** quant à l'assignation de probabilités aux différentes possibilités, de **conventions** à faire dans chaque applications.

« Pétition de principe », « Conventions », l'opération ne relève donc pas d'une nécessité, mais est de l'ordre de l'accord et cela doit valoir dans le cas de l'urne comme dans les autres. L'évidence n'existe pas plus dans ce cas que dans les autres. Simplement «**la convention**» est ancienne et admise par tous, c'est peut être cela, son évidence. De plus ici, le résultat résulte de l'application de la «**définition**». Est ce un hasard ou par quel hasard ?

Texte (T_3) J. Bertrand :

"La probabilité d'un événement est ***estimée*** *par l'énumération des cas favorables, rapprochée à celle des cas possibles.*

16 - On remarquera que Poincaré ne traite en fait qu'un seul exemple : celui de l'urne. Le jeu de cartes n'étant qu'une urne « contextualisée », ou l'urne qu'un jeu de cartes « décontextualisé ».

17 - Cette question trouvera des éléments de réponse dans la suite.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

On parie en jetant un dé, qu'il montrera le point 4. Le dé a six faces : six cas sont possibles, un seul est favorable. La probabilité est $\frac{1}{6}$ *. C'est une définition".*

Après l'exemple des deux dés, Bertrand énonce la «définition Laplacienne» :

"la probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles. Une condition est sous entendue : ***tous les cas doivent être également possibles****. La définition sans cette restriction n'aurait aucun sens."*

Dans tout problème de probabilité, il faut commencer par assigner des probabilités aux événements possibles. Bertrand commence son traité en expliquant comment résoudre ce problème. A cette fin, il utilise le **paradigme du dé**. Celui-ci **sert à penser l'égale probabilité** des possibles et à justifier, à fonder la « définition ». Mais la démarche n'est pas claire ; elle appelle la critique. Ce sera celle de Poincaré.

En effet, il y a ambiguïté. De quel dé parle J. Bertrand ? D'un dé réel... "*On parie en jetant un dé...*" Qu'est-ce qui justifie alors l'affirmation que tous les cas sont également possibles ? Le dé peut être pipé ou mal équilibré. J. Bertrand assigne au point 4 la probabilité $\frac{1}{6}$ et dit : "*c'est une définition.*".

Il signifie ainsi, qu'ayant un dé en main, il n'y a pas de raisons de penser qu'il est mal équilibré et qu'en conséquence toutes les faces ont les mêmes chances d'apparaître. Le mot «définition» est ici déplacé. Il s'agit d'une hypothèse faite sur le dé, d'une "*pétition de principe*", d'une "*convention*" comme le dit Poincaré.

Le paradigme du dé sert ensuite de fondement à la « définition », qui est présentée comme une règle opératoire.

Or la règle n'est pas opératoire en raison de la restriction apportée... "*tous les cas doivent être également possibles*". Cela est immédiatement mis en évidence par quelques exemples dont celui du jeu des boules entre Pierre et Paul qui illustre que dans l'une des façons de penser les événements possibles, il n'est pas **réaliste** – mais comment le savoir ? – de leur **assigner** une égale probabilité.

La « définition » ne résout donc pas le problème qu'elle est censée résoudre. Comment "... *constater qu'elles (les possibilités) ont même vraisemblance*" ?

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Dans la suite, la difficulté est oubliée. La pratique va être fondée par l'exemple, donc sur le mode **mimétique**. J. Bertrand développe la solution de treize problèmes destinés à exhiber les « conventions » qui seront faites dans tel ou tel cas. L'équiprobabilité des possibles est à chaque fois affirmée, postulée.

Problème I. On jette une pièce de monnaie n fois de suite. Quelle est la probabilité pour que pile et face se succèdent dans un ordre assigné ?

"Pile et face, à chaque épreuve, sont également possibles. Toutes les successions présentent des chances égales..."

"Pétition de principe", *"Convention"*, *"pas tout à fait arbitraire..."*, la « définition » n'opère alors que dans un second temps, comme règle de calcul. Poincaré, lecteur et critique de J. Bertrand n'a trouvé chez ce dernier que des ruines trop délabrées de la sémantique du calcul pour pouvoir la reconstituer et en rendre compte[18]. D'où son point de vue, qui assignera pour tâche au mathématicien de ne s'occuper que de la syntaxe du calcul.

Textes (T_1) et (T_2) P. S. Laplace :

(T_1) renvoie à la tradition, à la pratique déjà séculaire. *"la théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre,* ***à un certain nombre de cas également possibles"***.

La **sémantique** du calcul, bien connue de Laplace, est donc dans cette opération qui ***"consiste à réduire..."*** Cette opération étant faite - comment ?[19] Laplace et ses contemporains le savent - il faut alors... *"déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de la probabilité..."*

Cela résume la pratique, issue des déterminations de sens faites par les créateurs (elles seront explicitées ultérieurement).

(T_2) donne les principes généraux du calcul des probabilités.

P.S Laplace écrit un traité. Un traité doit être organisé sur le mode déductif, comme les éléments d'Euclide ou les Principes de Philosophie

18 - Voir l'annexe II. Le problème VIII est le seul qui laisse entrevoir la sémantique du calcul telle que l'avait établie les créateurs.

19 - Cette question trouvera des éléments de réponse dans la suite.

naturelle de Newton qui sont les grands modèles. En conséquence, il doit commencer par des définitions et des axiomes d'où, par nécessité logique, se déduiront les énoncés, solutions aux problèmes etc... **Une définition de la probabilité est nécessaire.** P.S. Laplace énonce : "*le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu, est le rapport...*"

Il détache alors une « règle », opératoire dans le contexte des pratiques en cours, et l'érige au rang de « définition » non opératoire, puisque circulaire etc...

Le premier principe traite des « cas également possibles » d'où la nécessité du second principe : "*si les divers cas ne sont pas également possibles,(...) Alors la probabilité sera la somme des probabilités de chaque cas favorable* ".

L'illustration donnée de l'application de ces principes mérite d'être analysée.

"*Supposons... Il est* ***clair*** *qu'il peut arriver quatre cas également possibles...*

... Cela réduirait la probabilité à $\frac{2}{3}$ *, si l'on considérait avec d'Alembert, ces trois cas comme étant également possibles. Mais il est* ***visible*** *que ...*".

"*Il est clair*" "*il est visible*" renvoie à **l'évidence**, à une **stipulation qui ne donne pas ses raisons**. Il y a hiatus. D'Alembert[20] connaît la solution traditionnelle exposée par Laplace, il fait remarquer qu'un autre chemin est possible. Pourquoi ne le prend-on pas ? Ne serait il pas meilleur ? Laplace ne répond pas à cette interrogation[21]. Laplace répond par ce que dit la tradition, il se réfère à la pratique et aux déterminations de sens créées et développées par Fermat, Huyghens, Bernoulli... Ce point sera repris.

En Résumé :

1) La définition, règle syntaxique, ne permet pas de répondre à d'Alembert qui pose un problème d'ordre sémantique. L'assignation d'une probabilité à un cas possible est toujours de l'ordre du sémantique.

2) La définition étant donnée[22], les différents principes, règles de calcul etc... appartiennent désormais à l'ordre de la nécessité. La définition **crée la nécessité** - au sens mathématique du terme - dans le champ des probabilités. Elle jouera toujours ce rôle dans les traités et cours jusqu'à celui de Poincaré inclus[23].

20 - Voir le texte de D'Alembert dans l'annexe I.

21 - Voir l'annexe I.

22 - Voir Chapitre 1 du livre II du *traité analytique des probabilités* de P.S. LAPLACE. L'annexe III en donne le début.

23 - Voir le Chapitre II du *Calcul des Probabilités* de J. BERTRAND.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Sa fonction est donc de résoudre un problème d'ordre **logique** lié au mode d'exposition hypothético-déductif.

3) La définition occulte la sémantique du calcul, conduit à des pertes de sens et à la critique de Poincaré. Cela conduira à la conception moderne du calcul des probabilités - déjà formulée par Poincaré - conçu comme pure syntaxe, détaché du problème fondamental de son applicabilité.

Ces pertes de sens progressives engendreront les difficultés d'ordre théorique et donc didactique implicitement pointées par Poincaré : "*Ainsi tout problème de probabilité offre deux périodes d'étude : la première, métaphysique pour ainsi dire, qui légitime telle ou telle convention...*"

C - De ses articulations avec les pratiques précédentes

Comme cela a été dit (T_1) la «définition Laplacienne» est abstraite des pratiques initiées par les créateurs. Elle s'articule donc étroitement à celles-ci. Les deux textes qui suivent (T_5) et (T_6) ont pour objectif de mettre en évidence ces articulations.

Rappelons la situation support de l'échange épistolaire : trois personnes jouent à un jeu de hasard en un certain nombre de parties. L'état du jeu est : il manque pour gagner une partie au premier, deux au second et deux au troisième.

Fermat entreprend de calculer les "*hasards*" - autrement dit la probabilité - qui font gagner le premier.[24]

(T_5)

Lettre de Fermat à Pascal du 25 septembre 1654 (Extrait)

"Le premier peut gagner, ou en une seule partie, ou en deux, ou en trois. S'il gagne en une seule partie, il faut qu'avec un dé qui a trois faces, il rencontre la favorable du premier coup. Un seul dé produit trois hasards : ce joueur a donc pour lui $\frac{1}{3}$ des hasards, lorsqu'on ne joue qu'une partie.

Si on en joue deux, il peut gagner de deux façons, ou lorsque le second joueur gagne la première et lui la seconde, ou lorsque le troisième gagne la première et lui la seconde. Or, deux dés

24 - Le calcul est mené par Fermat de deux façons. Une seule est exposée.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

produisent 9 hasards : ce joueurs a donc pour lui $\frac{2}{9}$ des hasards, lorsqu'on joue deux parties.

Si on en joue trois, il ne peut gagner que de deux façons, ou lorsque le second gagne la première, le troisième la seconde et lui la troisième, ou lorsque le troisième gagne la première, le second la seconde et lui la troisième ; car, si le second ou le troisième joueur gagnoit les deux premières, il gagneroit le jeu, et non pas le premier joueur. Or, trois dés ont 27 hasards : donc ce premier joueur a $\frac{2}{27}$ des hasards lorsqu'on joue trois parties.

La somme des hasards qui font gagner ce premier joueur est par conséquent

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{2}{27}$, ce qui fait en tout $\frac{17}{27}$ ".

Pierre de FERMAT
Correspondance.

(T$_6$)

Ars Conjectandi (1713) J. Bernoulli (Extraits).

(T$_6$1)

"La probabilité est en effet un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout. Evidemment, si la certitude intégrale et absolue, que nous désignons par la lettre *a* ou par l'unité 1, est constituée de - supposons par exemple - cinq probabilités ou parties, dont trois militent pour qu'un événement existe ou se produise, les autres s'y opposant : nous dirons que cet événement a $\frac{3}{5}$ *a*, ou $\frac{3}{5}$ de certitude".

Jacques BERNOULLI
Ars Conjectandi , Partie IV, Chap. 1.

(T$_6$2)

CHAPITRE IV

LA DOUBLE MANIÈRE DE RECHERCHER LES NOMBRES DE CAS. CE QU'IL FAUT PENSER DE CELUI QUI EST ÉTABLI PAR DES EXPERIENCES. PROBLÈME PARTICULIER PROPOSÉ À CE PROPOS. ETC

"On a montré dans le chapitre précédent comment, d'après les nombres de cas dans lesquels peuvent exister ou ne pas exister les arguments en faveur de n'importe quelle chose, dans lesquels ils peuvent révéler ou ne pas révéler, ou même révéler

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

le contraire, les forces de ce qui prouve de ces arguments et les probabilités des choses qui leur sont proportionnelles peuvent être déduites et estimées par le calcul. On en est ainsi venu à ce point que pour former selon les règles des conjectures sur n'importe quelle chose il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres. Mais c'est ici enfin que surgit une difficulté, nous semble-t-il : cela peut se voir à peine dans quelques très rares cas et ne se produit presque pas en dehors des jeux de hasard que leurs premiers inventeurs ont pris soin d'organiser en vue de se ménager l'équité, de telle sorte que fussent assurés et connus les nombres de cas qui doivent entraîner le gain ou la perte, et de telle sorte que tous ces cas puissent arriver avec une égale facilité. En effet lorsqu'il s'agit de tous les autres résultats, dépendant pour la plupart soit de l'œuvre de nature soit de l'arbitre des hommes, cela n'a pas du tout lieu. Ainsi, par exemple, les nombres de cas sont connus lorsqu'il s'agit des dés, car pour chacun des dés les cas sont manifestement aussi nombreux que les bases, et ils sont tous également enclins à échoir ; car à cause de la similitude des bases et du poids uniforme des dés il n'y a point de raison pour qu'une des bases soit plus encline à échoir que l'autre, comme cela arriverait si les bases étaient de formes dissemblables, ou si le dé était constitué d'un côté d'une matière plus lourde que de l'autre. Ainsi sont connus de même les nombres de cas pour que sorte de l'urne un bulletin blanc ou noir, et on sait que tous sont également possibles, puisque sont évidemment déterminés et connus les nombres de bulletins de chaque espèce, et qu'on ne voit aucune raison pour que celui-ci ou celui-là doive sortir plutôt que n'importe quel autre".

Jacques BERNOULLI
Ars Conjectandi , Partie IV, Chap. 4

(T_5) : Le jeu est de hasard donc à chaque partie, chaque joueur a $\frac{1}{3}$ des hasards pour lui ; c'est une **détermination de sens**, elle porte sur les mots hasards, hasards égaux et la quantification qui leur est attribuée : dans un jeu de hasard, les "*hasards sont égaux*", s'il y a n résultats possibles, chacun d'eux a pour lui $\frac{1}{n}$ des hasards.

Fermat introduit alors le dé à 3 faces pour **penser** les différents cas - **le dé n'est pas un dé réel** (3 faces) - *"Si on en joue deux, il peut gagner de deux façons, ou lorsque le second joueur gagne la première et lui la seconde ou lorsque le troisième joueur gagne la première et lui la seconde. Or deux dés produisent 9 hasards : le joueur a donc pour lui* $\frac{2}{9}$ *des hasards"*. Les 9 hasards sont égaux - par détermination de sens - $\frac{2}{9}$ résulte alors d'une nouvelle détermination de sens explicitée quelques lignes plus loin *"la somme des hasards qui font gagner le joueur..."* donne les hasards qu'il a pour lui. Le dé permet de mettre ceux ci en évidence, de les penser, de les représenter..

Le calcul est créé par ces déterminations de sens et par l'introduction du dé à n faces qui assurera la **transférabilité** de la démarche suivie par Fermat pour résoudre ce problème, à toute situation présentant n *"hasards égaux"*. Le **paradigme** du dé à n faces, qui sera remplacé par J. Bernoulli par celui de l'urne, sera systématiquement utilisé pour penser, représenter - modéliser[25] - les situations les plus diverses. Il contient, détermine, toute la **sémantique** du calcul.[26].

Les faces du dé, ou les tirages dans l'urne de Bernoulli représentent des *"hasards égaux"* d'où (T_1) *"la théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles"*[27]...

Il convient, à ce niveau, de distinguer le $\frac{2}{9}$ ou le $\frac{2}{27}$ obtenu par Fermat du $\frac{2}{9}$ ou $\frac{2}{27}$ que produirait l'application de la «définition Laplacienne». Fermat produit ces résultats par l'intermédiaire du paradigme du dé - on dirait aujourd'hui : par l'intermédiaire d'une modélisation - et non par application d'une formule.

La «définition Laplacienne» fonctionne sur le paradigme du dé ou de l'urne ; elle ne fait qu'énoncer sous forme d'une règle les déterminations de sens faites sur ces paradigmes.

25 - Le terme est évidemment anachronique.

26 - Une situation dont les résultats dépendent du hasard étant donnée... tout se passe comme si en terme de hasard, on jetait un dé à n faces, si k faces représentent les hasards « favorables » à l'événement A, la probabilité k/n lui est assigné.

27 - C'est ce que Fermat fait explicitement dans la première solution adressée à Pascal.

La «définition Laplacienne» ne fonctionne pas sur les situations, voir l'exemple de d'Alembert ou de la partie du jeu de boules entre Pierre et Paul.

Elle fonctionne sur les **situations après modélisation**, ce qui revient à nouveau à dire qu'elle ne fonctionne que sur le paradigme du dé ou de l'urne.

Le problème est alors : pourquoi telle modélisation plutôt que telle autre ? La tradition répond dans les deux exemples évoqués ci-dessus. Comment ? Sur quels critères s'est elle constituée ?

L'exemple de d'Alembert est traité de façon immédiate par la tradition. La pièce est le dé à deux faces d'où la solution (cf. T_2). D'Alembert remet celle-ci en cause. Il remet en cause les déterminations de sens faites par les créateurs. Il connaît le chemin tracé par ceux-ci mais refuse de l'emprunter et en propose un autre. Lequel choisir ? Pourquoi ? L'évidence à laquelle P.S. Laplace fait appel n'est pas une réponse. Une détermination de sens est faite, une règle est stipulée. Elle peut être acceptée ou rejetée. Elle ne relève pas d'une nécessité. Alors pourquoi cette stipulation plutôt que cette autre ? Parce que le calcul doit s'appliquer, qu'il doit conduire à des prédictions, que celles-ci doivent être en accord avec l'observation ou l'expérimentation. d'Alembert, par son questionnement, renvoie à ce point primordial ; très tôt abordé et élucidé par J. Bernoulli[28].

D - Le problème de l'applicabilité du calcul.

Le problème de l'applicabilité du calcul est au cœur de l'*Ars Conjectandi* de J. Bernoulli. Le problème fondamental est (T_6^2) *"que pour former des conjectures sur n'importe quelle chose, il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres. Mais c'est ici enfin que surgit une difficulté..."*

En effet, les inventeurs ont pu procéder par détermination de sens, **a priori**, en ne considérant que des jeux de hasard *"en vue de se ménager l'équité"*, leurs procédures ne fonctionnent pas en dehors de ces cas.

28 - J. Bernoulli a pensé à son théorème dès 1685. La publication d'"*Ars Conjectandi*" (1713) est posthume.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

J. Bernoulli discute alors deux exemples. Celui du dé et celui de l'urne.

Le dé de Bernoulli n'est pas le dé idéal de Fermat, il est **réel**, symétrique et homogène. Il y a alors de bonnes raisons de **stipuler** que chaque face apparaîtra avec la même probabilité. Les probabilités sont alors fixées **a priori**. Elles font l'objet d'une **convention**, non d'une « pétition de principe », elles résultent d'une **modélisation**.

L'expérience permettra de juger de la **bonne adéquation** des résultats du calcul aux résultats observés.[29]

Si le dé n'est pas symétrique ou homogène, la démarche - hypothèse de modèle a priori - précédente ne peut plus être faite. Comment procéder alors ? En jetant le dé un nombre suffisant de fois et en observant à chaque fois ce qu'il présente[29].

L'urne de J. Bernoulli est introduite avec le double rôle de **paradigme, servant à opérer les déterminations de sens essentielles** - si elle contient 3 000 bulletins blancs et 2 000 bulletins noirs, la probabilité de tirer un bulletin blanc est de $\frac{3}{5}$, c'est une détermination de sens a priori[30] - et **d'urne réelle** servant à faire des expériences. J. Bernoulli montre qu'une personne qui ne connaît pas la composition de cette urne, peut, par expérience, arriver à une évaluation très précise de la proportion des blancs ou des noirs, et ainsi "*ce qu'il n'est pas donné d'obtenir **a priori** l'est du moins **a posteriori***".

Ce double rôle est fondamental. Il permet de traiter de **l'applicabilité du calcul**, comme le montre le texte qui suit.

(T_7)

"Je suppose que, dans une urne, à ton insu, soient placées trois mille pierres blanches et deux mille pierres noires ; je suppose que pour connaître leurs nombres par expérience tu tires une pierre après l'autre (en replaçant cependant chaque fois la pierre que tu as tirée avant de choisir la suivante, pour que le nombre des pierres ne diminue pas dans l'urne) ; tu observes combien

29 - Voir la suite.

30 - J. Bernoulli donne la raison, purement intellectuelle, de la détermination de sens faite "... *on ne voit aucune raison pour que celui-ci ou celui là doive sortir plutôt que n'importe quel autre*".

de fois sort une pierre blanche et combien de fois une noire. On demande si tu peux le faire tant de fois qu'il devienne dix fois, cent fois, mille fois etc. plus probable (c'est-à-dire qu'il devienne moralement certain) que le nombre de fois où tu choisis une pierre blanche et le nombre de fois où tu choisis une pierre noire soient dans ce même rapport sesquilatère où se complaisent à être entre eux les nombres de pierres ou de cas, plutôt que dans tout autre rapport différent de celui-ci. (...)

On montrera que l'on peut arriver à ce que le rapport trouvé grâce à des expériences recommencées de nombreuses fois, tombe entre ces limites $\left[\frac{229}{200} \text{ et } \frac{301}{200} \text{ ou } \frac{2\,999}{2\,000} \text{ et } \frac{3\,001}{2\,000} \text{ ou} \ldots\right]$ du rapport sesquilatère $\left[\frac{3}{2}\right]$ plus probablement, de toute probabilité donnée, qu'en dehors".[31]

Jacques BERNOULLI
Ars Conjectandi, Partie IV, Chap. 4.

Le paradigme de l'urne[32] contient donc toute la sémantique du « calcul », et comme cela a déjà été dit, il permet à J. Bernoulli de régler le problème de l'applicabilité du calcul. Cela peut se résumer ainsi :

1) Une urne contient k boules blanches et 1 boules noires. La probabilité de tirer une blanche lors d'un tirage est $\frac{k}{k+1} = p$.

C'est une **probabilité a priori**, obtenue par **détermination de sens**.

2) Soit une expérience et un événement A lié à celle-ci. Si $p(A) = p$, alors **tout se passe en terme de hasard**, lorsque l'expérience est effectuée, **comme si** on tirait une boule blanche dans une urne composée comme en 1). C'est une **modélisation**.

31 - En langage moderne, J. Bernoulli montre en substance que si :

- $f_n(B)$ et $f_n(N)$ sont les fréquences observées sur n tirages avec remise dans l'urne des événements «on tire une blanche», «on tire une noire»,

- $$\frac{P\left(\frac{f_n(B)}{f_n(N)} \in \left]\frac{3}{2}-\varepsilon, \frac{3}{2}+\varepsilon\right[\right)}{P\left(\frac{f_n(B)}{f_n(N)} \notin \left]\frac{3}{2}-\varepsilon, \frac{3}{2}+\varepsilon\right[\right)} > C$$

d'où $P\left(\frac{f_n(B)}{f_n(N)} \in \left]\frac{3}{2}-\varepsilon, \frac{3}{2}+\varepsilon\right[\right) > \frac{C}{1+C}$, dès que n est supérieur à un certain n_0, $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ étant donnés.

32 - Ou celui du dé généralisé à n faces.

L'urne est pour J. Bernoulli, le **modèle** des êtres aléatoires les plus divers, d'où son rôle fondamental. Elle est utilisée soit pour représenter des probabilités **a priori**, soit pour représenter des probabilités ignorées, qui seront déterminée **a posteriori**, par expérience, (Voir le point 3 suivant).

3) L'expérience qui consiste à tirer une boule de l'urne précédente est renouvelée n fois - toujours dans les mêmes conditions, donc avec remise - Si f_n est la **fréquence observée** de l'événement : «une blanche est tirée», alors la probabilité que f_n donne une approximation de p à 10^{-u} près (u entier arbitraire) peut être rendue arbitrairement voisine de 1 (c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} P(|f_n - p| < 10^{-u}) = 1$).

Cet énoncé, en reliant les concepts de probabilité a priori et de probabilité a posteriori, relie à l'expérience et à l'observable, les résultats fournis par le calcul issu de l'assignation des probabilités.

Il résulte alors de ce qui précède que le théorème de J. Bernoulli fournit :

1) La possibilité de mesurer **l'adéquation** d'une probabilité stipulée a priori, ou dérivant d'un calcul, aux résultats observés, c'est-à-dire la possibilité d'évaluer le degré de validité des prévisions auxquelles conduit le calcul.

2) La possibilité **d'assigner** aux événements les plus divers, les plus complexes - sous réserve que l'expérience qui les produit puisse être renouvelée un nombre arbitraire de fois dans les mêmes conditions - une probabilité p^*, qui a de «très bonnes chances» d'être une approximation à 10^{-u} près de p.

C'est en ce double sens, que le théorème de J. Bernoulli règle le problème de l'applicabilité du calcul.

Il donne la solution au problème que d'Alembert soulèvera cinquante ans plus tard. On jette une pièce « honnête » deux fois. L'expérience est renouvelée un grand nombre de fois, la fréquence de l'événement «*croix* a été amené» est observée. Elle est voisine de $\frac{3}{4}$ et non de $\frac{2}{3}$.

Les créateurs ont tracé le bon chemin.[33]

33 - En premier lieu, l'adoption de ces concepts exprime l'attente sûre d'elle, de certaines expériences :

"Mais maintenant nous avons trouvé un chemin grâce, pour ainsi dire, aux traces laissées par ceux qui l'ont emprunté ! Et le trafic se fait maintenant sur ce chemin vers différentes fins". L. Wittgenstein : *Remarques sur les fondements des mathématiques.*

Conclusions

1 - De l'introduction de la Probabilité dans les Traités modernes

Dans les traités modernes[34], la probabilité est conçue comme une mesure. Suite aux travaux de Borel, la notion de probabilité a été étendue à des espaces non finis, non dénombrables pour lesquels une définition **opératoire** de la probabilité est impossible. Ce qui est alors défini est une algèbre de probabilités. L'applicabilité du calcul est assurée par le choix des axiomes qui stipulent que les probabilités doivent obéir aux règles de calcul que suivent les fréquences, c'est la démarche des programmes de lycées des années 2000 :

à : «si A est certain, alors $f_n(A) = \frac{n}{n} = 1$ », correspond la prescription : «si A est certain alors P(A) = 1». De même, à : «Si A et B s'excluent mutuellement alors : $f_n(A \cup B) = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = f_n(A) + f_n(B)$ », correspond la stipulation : «si A et B s'excluent mutuellement alors P (A ∪ B) = P(A) + P(B)».

Autrement dit, les syntaxes adoptées sont conformes à la sémantique du calcul, exprimée d'une certaine manière par le théorème de J. Bernoulli.

Le calcul des probabilités est alors une théorie mathématique dans laquelle sont développées les règles applicables dans les espaces probabilisés. Dans la pratique, ces espaces sont obtenus par modélisation des situations étudiées, et comme le souligne déjà H. Poincaré, le mathématicien n'est concerné qu'une fois cette modélisation réalisée.

Dès la fin du XIX^e siècle la division du travail semble bien établie[35], les modélisations sont à la charge des utilisateurs qui sont les seuls aptes à juger de leur bonne adéquation aux phénomènes étudiés[36], les études théoriques des modèles, la mise en ordre des savoirs constitués, sont alors à la charge des mathématiciens.

34 - Ils reprennent grosso-modo le début du traité de A. Kolomgorov.

35 - Cette division du travail, due à la spécialisation entraînée par la croissance et la complexification des corpus du savoir scientifique, n'avait pas de sens un siècle auparavant.

36 - Que l'on pense aux différentes modélisations faites par les physiciens dans le cadre de la théorie cinétique des gaz : modèles de Boltzmann, de Bose-Einstein, de Fermi-Dirac...

Dans ces traités, et dans le cas ou l'espace est fini, "*«la définition Laplacienne» n'est plus considérée comme une définition, mais seulement comme une méthode pour calculer les probabilités, dans une algèbre de probabilité finie, dont les événements élémentaires, pour certaines raisons, par exemple des propriétés de symétrie, ont la même probabilité* ".

A. RENYI - *Calcul des probabilités.*

2 - Des problèmes didactiques que posent l'introduction du concept de probabilité.

1) L'introduction de la «définition Laplacienne» qui renvoie aux dénombrements des « cas », résout un problème **d'ordre théorique,** dans le cadre des probabilités finies, puisque les différents principes du calcul peuvent en être dérivés. Elle crée des difficultés **d'ordre logique** - elle est circulaire - ainsi que **didactique** - elle n'est pas opératoire - que l'enseignement traditionnel règlait par recours au mimétisme : voilà un exemple, voilà ce qu'il faut faire ; voilà un autre exemple, fais de même, recopie, imite.

Cette façon de faire crée des habitudes, des pratiques qui finissent par bien fonctionner sur des situations stéréotypées, mais ne conduit ni au sens, ni à la culture. Les savoirs acquis sont, pour beaucoup d'élèves, non transférables[37] , donc vides.

2) Les exposés axiomatiques modernes de type universitaire présentent le calcul des probabilités comme une théorie détachée de ses applications, dans laquelle la probabilité est un objet abstrait qui doit suivre un certain nombre de règles et non un concept.

Or pour le calcul des probabilités, les **applications sont fondamentales** et n'ont de sens que par rapport au concept de probabilité. Le lien du calcul avec celles-ci se fait alors par les exemples et la présentation des grands modèles, qui apparaissent alors, à l'expérience, comme un certain type de décontextualisation de diverses situations. Cette démarche, très abstraite, risque d'être opaque pour un débutant. Elle occulte le lien organique qui existe entre le calcul et ses applications, en dissimulant le fait que le calcul s'applique par l'intermédiaire de modélisations, que ce sont ces modélisations qui donnent un sens aux divers schémas d'urnes, etc...

37 - On pourra se reporter à "*A propos de l'enseignement du calcul des probabilités*" IREM de POITIERS. (1993) pour des justifications à cette affirmation.

L'étudiant qui aborde le calcul des probabilités à l'aide de ce type de présentation, apprend à faire fonctionner des règles de calcul, à reconnaître des modèles, à les projeter sur des situations, à traiter avec aisance les problèmes théoriques posés et résolus dans la théorie, sans nécessairement accéder à la sémantique profonde du calcul[38]. Si l'on admet qu'un enseignement, quel que soit son niveau, ne se justifie que s'il contribue **à intégrer des savoirs à la culture de l'individu,** que s'il contribue à lui **«apprendre à penser»**, et si l'on admet les arguments précédents, il convient alors d'éviter, lors d'une première approche (qui sera la seule pour 80 % au moins des élèves du secondaire), les deux entrées précédentes.

L'entrée par la notion de fréquence, proposée par les programmes de 1991 pour les classes de première, n'a pas les inconvénients qui viennent d'être décrits. En effet, le problème central de l'applicabilité du calcul, et donc celui du sens de ce calcul, y est posé d'emblée. Néanmoins ce mode d'introduction n'est pas une panacée ; il a l'inconvénient de présenter une circularité[39] qui génère des difficultés d'ordre logique et risque de créer un obstacle durable pour l'accès au concept de probabilité a priori, qui est premier et primordial. La démarche des programmes de seconde et de première des années 2000 semble vouloir mieux faire le partage entre l'observation des fréquences et le statut de modèle théorique de la probabilité.

L'histoire, la réflexion épistémologique, permettent en suivant les différentes étapes de la genèse du **calcul** de **localiser les difficultés théoriques ou didactiques** liées à la définition de la probabilité, ou plus précisément, à l'introduction du concept de probabilité. Elles permettent de

38 - Une syntaxe peut être utilisée correctement, voire avec aisance, sans faire sens. Cela a été souvent mesuré par l'auteur sur l'exemple des définitions de la probabilité conditionnelle et de l'indépendance des événements par voie axiomatique.

39 - 1) La notion de fréquence qui, stabilisée, déterminerait la probabilité - a posteriori - est liée à celle de probabilité – a priori – par les lois des grands nombres dont l'énoncé suppose acquis le concept de probabilité,

2) Faire croire ou laisser croire, que la fréquence observée d'un événement conduit à sa probabilité risque de générer des obstacles à la compréhension globale de la théorie. Pour une argumentation détaillée de cette affirmation on se reportera à : "*A propos de l'enseignement du calcul des probabilités*" (page 4) publié par l'IREM de Poitiers.

comprendre les origines et l'évolution des pratiques théoriques ou didactiques, les raisons qui ont conduit, de Laplace à Kolmogorov, à la séparation des champs sémantique et syntaxique. Elles enseignent que, lors d'une première approche, une autre voie est possible qui évite les difficultés précédemment décrites : celle explorée par Fermat et définitivement ouverte par J. Bernoulli, centrée sur les **modélisations**, par le dé ou l'urne[40], qui permet d'appréhender la démarche probabiliste dans son ensemble, d'en comprendre les mécanisme profonds[41] et les enjeux, à savoir que le calcul est élaboré pour traiter, prévoir, décider dans certains types de situations aux résultats aléatoires[42].

40 - Tout se passe en terme de hasard, comme si...

41 - Les règles du calcul apparaissent comme des conséquences directes des déterminations de sens faites sur le paradigme de l'urne ou du dé.

42 - Se reporter à "*A propos de l'enseignement du calcul des Probabilités*", IREM de Poitiers.

Annexe I

Extrait commenté de l'Article "Croix ou Pile" écrit pour l'Encyclopédie par D'ALEMBERT.

CROIX OU PILE, (*analyse des hasards*). Ce jeu, qui est très connu, & qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amènera ***croix*** en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans les auteurs, & suivant les principes ordinaires, est celle-ci. Il y a quatre combinaisons.

Premier coup.	Deuxième coup.
Croix.	*Croix.*
Pile.	*Croix.*
Croix.	*Pile.*
Pile.	*Pile.*

De ces quatre combinaisons, une seule fait perdre & trois font gagner, il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce. S'il pariait en trois coups, on trouveroit huit combinaisons, dont une seule fait perdre, & sept font gagner ; ainsi, il y aurait 7 contre 1 à parier. *Voyez* COMBINAISON & AVANTAGE. **Cependant cela est-il bien exact** ?[43] Car, pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent ***croix*** au premier coup ? Car, dès qu'une fois ***croix*** est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien. Ainsi, il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles :

Croix, premier coup

Pile, ***Croix***, premier & second coup.

Pile, ***pile***, premier & second coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier. De même, dans le cas de trois coups, on trouvera :

Croix

Pile, croix.

pile, pile, croix.

Pile, pile, pile.

Donc il n'y a que 3 contre 1 à parier. **Ceci est digne, ce me semble, de l'attention des calculateurs, & irait à réformer bien des règles unanimement reçues sur les jeux de hasard**[43].

43 - Souligné par l'auteur.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Commentaires :

Que signifie "*cependant cela est il bien exact ?*" Qu'une règle a été mal appliquée ? Que la règle appliquée n'est pas adéquate ?

Dans le texte (T_2), Laplace[44] suggère que d'Alembert n'a pas compris comment les principes du calcul s'appliquent : si d'Alembert ne comprend pas la solution avec les quatre cas équiprobables, il **doit** ("*il est visible que* ") alors dire : "*la probabilité d'amener croix au premier coup est* $\frac{1}{2}$ *tandis que...*"

Doit renvoie à une nécessité. Or la nécessité ici est créée par la règle. Mais quelle est la nécessité de cette règle ? Telle est la question de d'Alembert : "*Ne faut il pas réduire à une les deux combinaisons...*" Laplace ne répond pas : "*il est visible que la probabilité d'amener croix au premier coup est* $\frac{1}{2}$ *tandis...*" n'est pas une réponse.

D'Alembert pense que "*les règles unanimement reçues sur les jeux de hasard*" sont mal formées et donc à réformer. D'Alembert remet en cause la sémantique et par voie de conséquence la syntaxe du calcul c'est-à-dire les "*règles unanimement reçues*".

Laplace, quant à lui, ne traite la question que du point de vue syntaxique, c'est-à-dire du **comment** appliquer les règles, et non du **pourquoi** telle règle ?

D'Alembert pose implicitement le problème de l'applicabilité du calcul, puisque la seule réponse qui peut lui être fournie est : fais l'expérience un grand nombre de fois et observe la fréquence de « croix a été amené ». Quelle valeur l'attire, $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$? C'est $\frac{3}{4}$, les créateurs ont donc ouvert la bonne piste.

Il y a une ambiguïté. L'expérience est conduite avec une **pièce réelle** or $\frac{3}{4}$ est le résultat obtenu pour une pièce **modélisée** par le dé à 2 faces de Fermat ou l'urne de Bernoulli contenant une boule blanche et une boule noire. Il faut donc préalablement tester la pièce, vérifier que la modélisation faite lui correspond, c'est-à-dire que de longues séries de lancers produisent un rapport des nombres de « croix » à ceux de « pile » voisin de 1, changer de pièce sinon.

Une question demeure. Peut-il exister une pièce vicieuse qui conforte d'Alembert dans son opinion ? Autrement dit peut-il exister une pièce dont

44 - Voir le texte T_2.

les jets seront modélisés par une urne contenant n_1 boules blanches et n_2 boules noires, telle que :

$$P(B_1)=\frac{1}{3}\quad;\quad P(\overline{B}_1,B_2)=\frac{1}{3}\quad;\quad P(\overline{B}_1,\overline{B}_2)=\frac{1}{3}$$

où B_i est l'événement : «on tire une blanche au i^{ème} tirage».

Or, $P(B_1)=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$; $P(\overline{B}_1,B_2)=\dfrac{n_2 n_1}{(n_1+n_2)^2}$; $P(\overline{B}_1,\overline{B}_2)=\dfrac{n_2^2}{(n_1+n_2)^2}$ [45].

On doit alors avoir $\dfrac{n_2 n_1}{(n_1+n_2)^2}=\dfrac{n_2^2}{(n_1+n_2)^2}\Rightarrow n_1=n_2$,

d'où : $P(B_1)=\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{1}{3}$!

Il y a impossibilité de trouver une telle pièce.

45 - Pour deux tirages, Fermat dirait : *"il y a $(n_1+n_2)^2$ hasards, tous égaux"* - détermination de sens - $n_2\times n_1$ sont favorables à

$$\overline{B}_1\cap B_2 \text{ d'où } P(\overline{B}_1,B_2)=\frac{n_2 n_1}{(n_1+n_2)^2},$$

nouvelle détermination de sens. J. Bernouilli, par l'expérience qui consiste à répéter n fois 2 tirages avec remise dans cette urne, confirme ce résultat.

Annexe II

Extrait du chapitre I du cours de probabilité de J. BERTRAND.

Suite à la définition, J. Bertrand, donne quelques exemples destinés à montrer les précautions à prendre pour son application, puis il développe la solution de quelques problèmes. Le problème VIII est le seul problème théorique de la série.

A l'occasion de ce problème, J. Bertrand renoue avec la tradition en représentant -modélisant - les données à l'aide d'une urne - **se référant ainsi aux déterminations de sens essentielles instituées par les créateurs -**

15. PROBLEME VIII. - La probabilité d'un événement *est p, combien faut-il tenter d'épreuves pour que la probabilité de voir l'évènement se produire au moins une fois dépasse une fraction donnée r ?*

Supposons que, dans une urne, soient contenues m boules blanches et n noires, m et n étant telles que :

$$\frac{m}{m+n} = p.$$

Il faut chercher combien de tirages doivent être tentés pour que la probabilité d'amener une boule blanche soit plus grande que r. La boule sortie est remise dans l'urne après chaque épreuve, de telle sorte que la probabilité reste, à chaque tirage, égale à p. Le nombre des combinaisons possibles, sur k épreuves, est :

$$(m + n)^k$$

Le nombre de celles qui ne contiennent pas de boules blanches est n^k.

Le nombre des combinaisons contenant une boule blanche au moins est :

$$(m + n)^k - n^k.$$

La probabilité demandée est donc :

$$\frac{(m+n)^k - n^k}{(m+n)^k} = 1 - \left(\frac{n}{m+n}\right)^k = 1 - (1-p)^k.$$

Le nombre k des épreuves à tenter pour que cette probabilité soit égale à r est donné par l'équation :

$$1 - (1 - p)^k = r,$$

d'où :

$$k = \frac{\ln(1-r)}{\ln(1-p)}.$$

Cette valeur de k n'est pas, en général, un nombre entier. Pour un nombre d'épreuves plus petit que k, la probabilité de voir une boule blanche sortir sera moindre que r ; elle surpassera r si le nombre des épreuves est plus grand que k.

L'événement de probabilité p est **représenté** par tirage d'une boule blanche dans une urne qui contient m blanches et n noires, telle que

$$\frac{m}{m+n} = p.$$

et la répétition de l'épreuve par des tirages successifs avec remise dans cette urne.

La solution est alors donnée par application de la « définition laplacienne », qui suppose - cela est implicite dans la démarche de J. Bertrand - que les $(m + n)^k$ tirages possibles sont équiprobables. Il y a hiatus, dans la démarche. Le point délicat est éludé, il fait l'objet d'une stipulation implicite.

La difficulté est éludée, mais l'usage est fixé et c'est ce qui importe pour la suite du Traité.

Annexe III

Extrait du chapitre I du livre II du *Traité Analytique des Probabilités* de P. S. Laplace

LIVRE II.

Théorie générale des probabilités

Chapitre premier.

Principes généraux de cette Théorie

1. On a vu dans l'introduction, que la probabilité d'un événement, est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables, au nombre de tous les cas possibles ; lorsque rien ne porte à croire que l'un de ces cas doit arriver plutôt que les autres, ce qui les rend pour nous, également possibles. La juste appréciation de ces cas divers, est un des points les plus délicats de l'analyse des hasards.

Premier principe.

Rappel de la définition. Elle n'est pas opératoire (Voir l'article).

Mais elle crée la nécessité. Les différents principes du calcul - les déterminations de sens des créateurs - n'en sont que des conséquences.

*Si tous les cas ne sont pas également possibles, on déterminera leurs possibilités respectives ; et alors la probabilité de l'événement sera la somme des probabilités de chaque cas favorable. En effet, nommons p la probabilité du premier de ces cas. Cette probabilité est relative à la subdivision de tous les cas, en d'autres également possibles. Soit N la somme de tous les cas ainsi subdivisés, et n la somme de ces cas qui sont favorables au premier cas ; on aura $p = n/N$. On aura pareillement $p' = n'/N$, $p'' = n''/N$, etc ; en marquant d'un trait, de deux traits, etc, les lettres p et n, relativement au second cas, au troisième, etc. Maintenant, la probabilité de l'événement dont il s'agit, est, **par la définition même de la probabilité**, égale à :*

$$\frac{n + n' + n'' + \text{etc.}}{N};$$

elle est donc égale à $p + p' + p'' +$ etc.

Deuxième principe.

"Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable".

Introduction du *Traité Analytique des Probabilités.*

*Lorsqu'un événement est composé de deux événemens simples, **indépendans** l'un de l'autre ; il est clair que le nombre de tous les cas possibles est le produit des deux nombres qui expriment tous les*

Troisième principe.

"Si les évènemens sont indépendans les uns des autres, la probabilité de l'existence de leur ensemble est le

cas possibles relatifs à chaque événement simple ; parce que chacun des cas relatifs à l'un des ces évènemens, peut se combiner avec tous les cas relatifs à l'autre événement. Par la même raison, le nombre des cas favorables à l'événement composé, est le produit des deux nombres qui expriment les cas favorables à chaque événement simple ; la probabilité de l'événement composé, est donc alors le produit des probabilités de chaque événement simple.

Ainsi la probabilité d'amener deux fois de suite, un as avec un dé, est un trente-sixième, lorsque l'on suppose les faces du dé parfaitement égales ; parce que le nombre de tous les cas possibles en deux coups, est trente-six, chaque cas de la première projection pouvant se combiner avec les six cas de la seconde ; et parmi tous ces cas, un seul donne deux as de suite.

*En général, si p, p', p", etc. sont les possibilités respectives d'un nombre quelconque d'évé-nemens simples **indépendans** les uns des autres ; le produit p.p'.p", etc. sera la probabilité d'un événement composé de ces événemens.*

*Si les événemens simples sont **liés** entre eux, de manière que la supposition de l'arrivée du premier, **influe** sur la probabilité de l'arrivée du second ; on aura la probabilité de l'événement composé, en déterminant, 1° la probabilité du premier événement ; 2° la probabilité que cet événement étant arrivé, le second aura lieu.*

Pour démontrer ce principe d'une manière générale, nommons p le nombre de tous les cas possibles, et supposons que dans ce nombre, il y en ait p' favorables au premier événement. Supposons ensuite que dans le nombre p', il y en ait q favorables au second événement ; il est clair que $\frac{q}{p}$ *; sera la probabilité de l'événement composé. Mais la probabilité du premier événement est* $\frac{p'}{p.}$ *; la probabilité que cet événement étant arrivé, le second aura lieu, est* $\frac{q}{p'}$ *; car alors un des cas p' devant exister, on ne doit considérer que ces cas.*

produit de leurs probabilités particulières".

Introduction du
Traité Analytique des Probabilités.

La démonstration, tous les cas étant supposés également possibles, ce qui peut toujours être fait, est purement combinatoire.

Le dé est modélisé par le dé de Fermat et le raisonnement reprend les déterminations de sens faites par ce dernier.

"*liés*" définit "*indépendans*" du paragraphe précédent.

Quatrième principe*.*

"Quand deux événemens dépendent l'un de l'autre ; la probabilité de l'événement composé est le produit de la probabilité du premier événement, par la probabilité que cet événement étant arrivé, l'autre aura lieu"

Introduction du
Traité Analytique des Probabilités

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Maintenant on a $\frac{q}{p} = \frac{p'}{p} \cdot \frac{q}{p'}$ *;*
ce qui est la traduction en analyse, du principe énoncé ci-dessus.

En considérant comme événement composé, l'événement observé, joint à un événement futur ; la probabilité de ce dernier événement, tirée de l'événement observé, est évidemment la probabilité que l'événement observé ayant lieu, l'événement futur aura lieu pareillement ; or, par le principe que nous venons d'exposer, cette probabilité multipliée par celle de l'événement observé, déterminée ***a priori****, ou indépendamment de ce qui est déjà arrivé, est égale à celle de l'événement composé, déterminée* ***a priori*** *; on a donc ce nouveau principe, relatif à la probabilité des événemens futurs, déduite des événemens observés.*

La probabilité d'un événement futur, tirée d'un événement observé, est le quotient de la division de la probabilité de l'événement composé de ces deux événemens, et déterminée ***a priori****, par la probabilité de l'événement observé, déterminée pareillement* ***a priori.***

etc...

Ces quelques extraits du début du Traité suffisent à justifier les affirmations de l'article sur la fonction de la « Définition Laplacienne ».

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Annexe IV

CALCUL DES PROBABILITÉS.

Exposé, d'après l'Article Allemand de E. CZUBER (Vienne), par J. Le ROUX (Rennes). (1906)

Probabilité a priori.

1. Définition et signification de la probabilité mathématique.

Les événements incertains sont ceux dont l'arrivée ne résulte pas avec certitude des conditions connues ou données, mais pour lesquels on peut seulement exprimer un degré plus ou moins élevé de possibilité. Le calcul des probabilités a pour objet l'étude de la fréquence relative des événements incertains.

Suivant H. Poincaré, il n'est guère possible de donner une définition satisfaisante de la probabilité. A.A. Cournot, au contraire, développe une série de considérations de nature à conduire à une définition rationnelle de la probabilité mathématique. On peut les résumer de la manière suivante : Supposons qu'il s'agisse d'un événement incertain E, et que sur m épreuves ou observations, faites dans des conditions constantes déterminées, cet événement se produise n fois. Il peut arriver que le rapport $\frac{n}{m}$ qui en mesure la fréquence relative tende vers une limite p lorsque le nombre m croît. C'est cette limite que A.A. Cournot appelle la probabilité mathématique de l'événement E dans les conditions considérées. Il est évident que le nombre p regardé comme une limite ne peut être révélé rigoureusement par l'expérience : des raisons théoriques permettraient seules de lui assigner une valeur précise.

La probabilité ainsi conçue peut être regardée, d'après A. A. Cournot, comme la mesure de la possibilité physique ; elle ne s'applique qu'à des classes de faits susceptibles d'une répétition en quelque sorte indéfinie et pour lesquels la limite p existe.

Dans les questions de statistique, le rapport $\frac{n}{m}$ n'admet pas en général de limite déterminée, mais il peut osciller entre deux limites assez resserrées pour que, dans ces questions, l'on puisse faire usage, avec une approximation suffisante, du calcul des probabilités.

En dehors de ces conditions la probabilité n'a qu'une valeur subjective : il peut alors être question d'une énumération des cas, il est illusoire de parler de mesure.

C'est de cette probabilité subjective qu'on peut dire avec **P. S. LAPLACE** qu'elle est "*relative en partie à nos connaissances, en partie à notre ignorance*".

Les événements auxquels on applique le calcul des probabilités sont tantôt des faits théoriques ou mathématiques pour lesquels la mesure de la probabilité résulte d'une définition : c'est la probabilité a priori ; tantôt des faits physiques ou sociaux pour lesquels l'observation doit servir de guide : c'est la probabilité a posteriori.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Le calcul des probabilités a pris naissance dans les problèmes relatifs aux jeux de hasard.

Ce sont ces problèmes relatifs aux jeux de hasard qui donnent lieu à la distinction en cas homogènes également vraisemblables et à leur répartition en cas **favorables** ou **chances** et en **cas défavorables**.

Dans ces conditions la probabilité mathématique d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles, pourvu que les cas considérés soient également possibles.

Dans cette définition classique **il faut attacher la plus haute importance à la notion de l'égale possibilité des cas**. Au point de vue général il peut être tout aussi difficile de définir l'**égale possibilité** des cas que de définir la probabilité elle-même ; mais, pour certains problèmes, la définition peut être quelquefois imposée par les conditions de l'énoncé. S'il s'agit d'un dé, par exemple, ce que l'on a en vue dans le raisonnement, **ce n'est pas tel dé particulier, mais un dé théorique** que l'on suppose homogène et régulier de telle sorte que la chute sur l'une quelconque des faces ait la même probabilité. La symétrie de constitution que l'on suppose au dé relativement à toutes les conditions du problème revient en dernière analyse à la notion d'un groupe de transformations qui laisse la probabilité invariante.

Une remarque semblable peut être faite à propos de la plupart des problèmes du calcul des probabilités. La formation des cas également possibles équivaut à la construction d'un groupe de substitution de certains éléments. On pourrait donner à ce groupe le nom de **groupe d'invariance de la probabilité**.

Soit m le nombre total des cas également possibles, g celui des cas favorables ; la probabilité p aura pour valeur $\frac{g}{m}$. Ce nombre est une fraction proprement dite, par conséquent il est toujours compris entre 0 et 1. Les deux limites extrêmes 0 et 1 sont relatives à des états qui n'appartiennent plus à proprement parler au domaine des probabilités, car ni l'un ni l'autre n'implique le moindre doute. La première, correspondant à $g = 0$, est le symbole de **l'impossibilité** ; la seconde, qui correspond à $g = m$, est celui de la **certitude**. Il faut cependant établir une différence essentielle d'une part entre l'impossibilité et une probabilité qui tend vers zéro, d'autre part entre la certitude et une probabilité qui tend vers l'unité.

2 . Détermination directe de la probabilité.

La détermination directe de la probabilité dans un problème donné **consiste à décomposer la matière du problème en cas simples, équivalents, également vraisemblables**, et à prendre le rapport du nombre des cas favorables à celui des cas possibles. **Chr. Sigwart** fait remarquer avec raison que, dans l'application de cette règle, c'est la première partie, la formation des cas également probables, **qui constitue l'art propre de la théorie des probabilités. Le reste n'est qu'une question de pure arithmétique. A l'origine il s'agissait uniquement d'une équivalence formelle, combinatoire**, des cas. Il est donc tout naturel que le calcul des probabilités et l'**analyse combinatoire** se soient développés simultanément. Effectivement les premiers écrits concernant le calcul des probabilités sont aussi les premiers sur l'analyse combinatoire.

Une des premières questions dont il soit fait mention dans les mémoires où il est question de probabilité est relative à l'égale possibilité des cas. C'est chez **Jérôme Cardan** qu'on trouve pour la première fois une appréciation judicieuse de cette équivalence, dont l'évaluation inexacte a souvent conduit à des résultats erronés.

3 . Probabilité totale.

La méthode directe fut tout d'abord le seul moyen employé pour déterminer la probabilité d'un événement.

Cependant peu à peu on arrivera à formuler des règles particulières pour résoudre les problèmes qui se présentaient le plus fréquemment.

D'abord très nombreuses, ces règles se réduisirent enfin à un petit nombre de propositions que **P. S. Laplace**, le premier , énonça d'une façon précise. Dans bien des cas **P. S. Laplace** est parvenu par l'application de ces propositions, jointe à une habile analyse de l'événement dont on demandait la probabilité, à résoudre les problèmes plus simplement que par l'évaluation directe des chances.

La plus simple des propositions énoncées par **P. S. Laplace** est celle qui concerne la **probabilité totale**. Quand un événement peut se produire de plusieurs manières différentes, mais que deux de ces manières ne peuvent arriver simultanément, la probabilité de l'arrivée de cet événement est égale à la somme des probabilités pour qu'il se produise de chacune des manières considérées.

Supposons par exemple que l'arrivée de l'un quelconque des événements E_i (i = 1, 2,... n) entraîne l'arrivée de l'événement E et qu'un seul des événements E_i puisse avoir lieu à la fois. Soit P_i, la probabilité de l'événement E_i, la probabilité P de l'événement E sera $P = \sum_{i=1}^{i=n} P_i$

Dans l'énoncé du théorème sur la probabilité totale **P. S. Laplace considère les événements E_i** comme des cas inégalement possibles de l'événement E."

Terminons par cette autre citation d'Émile Borel :

Le hasard (1914) - Emile BOREL

"La première question est de construire un schéma mathématique présentant avec la réalité d'assez étroits rapports…

… cette première question résolue ou du moins partiellement résolue... le rôle du mathématicien se borne à étudier les propriétés du schéma obtenu, ce qui et un problème de mathématiques pures. La comparaison des résultats ainsi obtenus avec l'expérience et le développement des théories que peut suggérer cette comparaison sont en dehors du domaine des mathématiques ; car on doit dans ces recherches théoriques, ne jamais perdre de vue les réalités et contrôler à chaque instant les idées nouvelles par l'observation et l'expérience. Mais ce rôle des mathématiques, pour être limité, n'en et pas moins, dans bien des cas, fort important."

Ouvrages cités**

1 - **Pascal** et **Fermat,** *Correspondance* sur le problème des partis (1654).
2 - **J. Bernoulli**, *Ars Conjectandi* (1713)
3 - **P. S. Laplace**, *Traité analytique des probabilités* (1812)
4 - **J. Bertrand**, *Calcul des probabilités* (1899)
5 - **H. Poincaré**, *Calcul des probabilités* (1896)
6 - **E. Borel**, *Le hasard* (1914)
7 - *Encyclopédie des mathématiques pures et appliquées*, quatrième volume. Tome 1
Calcul des probabilités - Théories des erreurs - Applications diverses.
8 - **A. Kolmogorov**, *Fondement de la théorie des probabilités* (1933).

** - On trouvera les références bibliographiques dans la bibliographie générale en fin d'ouvrage, ou dans la bibliographie détaillée de l'article précédent : *Les probabilités au tournant du XVIIIe siècle.*

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

4 - SUR QUELQUES CONCEPTIONS DU HASARD

Bernard COURTEBRAS

" Il faut donc bien que le hasard soit autre chose que le nom que nous donnons à notre ignorance… "[1]

SOMMAIRE

1 - H. POINCARÉ, *Calcul des probabilités*, éditions Gauthier-Villars, 1912, p. 3.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Cet article s'inscrit dans le cadre de la préparation d'une thèse de doctorat de sociologie des mathématiques de l'Université Lyon-2[2]. Il reprend, pour l'essentiel, le contenu d'une conférence présentée le 10 janvier 2001 à BOURG EN BRESSE, à l'invitation de l'association "philosopher aujourd'hui". Il s'agit d'essayer de mettre un peu d'ordre dans les diverses manières d'appréhender le hasard. Deux approches ont été envisagées : l'une est d'essence anthropologique et épistémologique, l'autre fait appel à l'outil mathématique. On rappelle d'abord les oppositions classiques entre « mentalité primitive-infantile » et « mentalité civilisée-adulte », les oppositions traditionnelles entre hasard et nécessité, hasard et destin pour en exposer le contenu et éventuellement le discuter. Sont ensuite exposées les conceptions de LAPLACE, d'ARISTOTE, de COURNOT, de LUCRÈCE notamment. L'objet de cette présentation n'est pas d'entrer dans les détails des points abordés, mais d'élaborer un cadre conceptuel permettant de penser ensemble les principales conceptions du hasard.

1. S'intéresse-t-on au hasard par hasard ?

J'ai été frappé, en initiant quelques conversations relatives au thème du hasard, de constater à quel point un assez grand nombre de personnes réagissaient en affirmant : " mais voyons Bernard, le hasard n'existe pas… " Je n'ai pas osé leur proposer de jouer à la roulette russe afin d'éprouver ou non la validité de cette opinion… Au passage, je leur ai simplement fait remarquer que mon prénom était Bernard et que j'étais né un 20 août, jour de la Saint Bernard, et qu'il s'agissait bien là d'une "réelle coïncidence" et non d'une opportunité saisie par des parents à court d'idée… Cependant mes interlocuteurs restaient dubitatifs face à cet argument, à mon sens décisif… De plus, je suis né un 20 août précisément comme David RUELLE, physicien, auteur entre autres de l'ouvrage *Hasard et chaos*[3].

Ainsi des puissances occultes nous avaient « choisis », David RUELLE et moi, pour traiter la question du hasard… Puis, prenant quelque distance face à cette interprétation résolument égocentrique, mégalomaniaque et peu rationnelle, je me suis efforcé d'activer des schèmes de pensée distincts de ceux spécifiques à la « pensée primitive », et d'interroger le sens à donner aux coïncidences en général. Il est alors apparu que les termes de coïncidence, de hasard, sont utilisés lorsqu'un être humain est concerné : une branche qui

2 - Sous la direction du Professeur Guy VINCENT

3 - D. RUELLE, *Hasard et chaos*, éditions O. Jacob, 1991

tombe d'un arbre, cela n'intéresse personne… Mais si elle tombe sur un homme, cela constitue un événement et la question du hasard se trouve alors posée. Pour Henri BERGSON, le hasard est un mécanisme se comportant comme s'il avait une intention. Dans ce cadre, subjectif, le hasard est invoqué chaque fois que survient un événement dont les causes sont naturelles mais qui a, pour un homme, un effet défavorable ou favorable, comme si le cours des choses avait été dirigé par une intention. “ *Une énorme tuile, arrachée par le vent, tombe et assomme un passant. Nous disons que c'est un hasard. Le dirions-nous, si la tuile s'était simplement brisée sur le sol ? Peut-être, mais c'est que nous penserions vaguement alors à un homme qui aurait pu se trouver là, ou parce que, pour une raison ou pour une autre, ce point spécial du trottoir nous intéressait particulièrement, de telle sorte que la tuile semble l'avoir choisi pour y tomber. Dans les deux cas, il n'y a de hasard que parce qu'un intérêt humain est en jeu et parce que les choses se sont passées comme si l'homme avait été pris en considération, soit en vue de lui rendre service, soit plutôt avec l'intention de lui nuire. Ne pensez qu'au vent arrachant la tuile, à la tuile tombant sur le trottoir, au choc de la tuile contre le sol : vous ne voyez plus que du mécanisme, le hasard s'évanouit. Pour qu'il intervienne, il faut que, l'effet ayant une signification humaine, cette signification rejaillisse sur la cause et le colore, pour ainsi dire, d'humanité. Le hasard est donc le mécanisme se comportant comme s'il avait une intention.* ”[4]

Remarquons avec Thierry MARTIN[5], au sujet de la chute d'une tuile à laquelle fait référence Henri BERGSON, qu'Antoine Augustin COURNOT recourt au même exemple[6], mais en l'interprétant différemment, débarrassé de tout contenu subjectif ou psychologique. COURNOT dirait contre BERGSON que la chute de la tuile est objectivement un hasard, qu'elle tombe ou non sur la tête du passant, à un mètre ou deux mètres de lui : en effet, COURNOT est probabiliste et sait qu'une « combinaison remarquable » (ici, la rencontre entre une tuile et la tête d'un passant) est seulement celle que l'on remarque et non celle qui a en elle-même une probabilité différente des autres.

4 - H. BERGSON, *Les deux sources de la morale et de la religion*, éditions Félix Alcan, 2e édition, 1932, p.155-156

5 - T. MARTIN, *Probabilités et critique philosophique selon COURNOT*, éditions Vrin, 1997, p.127-128 et 148

6 - A. A. COURNOT, *Matérialisme, vitalisme, rationalisme, œuvres complètes*, tome V, réédition Vrin, 1979, p.175

Choisi par les dieux pour traiter, après d'autres, la question du hasard, ou bien « simple hasard » ? Notons, au passage, que les qualificatifs associés au mot hasard (« simple hasard », « réel hasard », « curieux hasard », « étrange hasard », « surprenant hasard », voire l'expression « comme par hasard ») peuvent avoir un effet d'antinomie. Un « étrange hasard » est-il bien un hasard ? Soulignons également que l'emploi du mot hasard participe souvent au renforcement de la légitimité du discours en soulignant le segment d'une phrase. Ainsi le discours d'importance prend comme indicateurs des emplois tels que « ce n'est nullement par hasard » pour dégager ce que Pierre BOURDIEU nomme “ *le ton de l'évidence du discours magistral.* ”[7]

Revenons aux raisons qui peuvent amener à se pencher sur la question du hasard : sont-elles de nature inconsciente ? S'intéresse-t-on au hasard par hasard ? Si l'on en croit la psychanalyse, certainement pas ! Ainsi pour Sigmund FREUD, le hasard n'existe pas, la psychanalyse ne reconnaissant pas les effets du hasard dans la vie psychique. La théorie analytique s'est en effet élaborée en niant le hasard et en mettant en évidence le rôle de l'inconscient dans la vie mentale. Tout ce qui est obscur, actes manqués, lapsus, rêves, prennent sens : “ *Le rêve n'est plus un assemblage d'images de hasard, le rêve a un sens : celui du désir, celui d'un désir infantile reconstitué, « scénarisé » à travers les restes diurnes et à travers le travail de figurabilité que l'inconscient est capable de mettre en œuvre.* ”[8]

Si ce n'est le hasard, quelles peuvent-être les raisons d'un tel choix ? Ne s'agit-il pas simplement de la rencontre entre un questionnement individuel et celui d'une époque où les questions de risque, de chance (considérée comme la version laïque du miracle), de rapport à l'avenir, de prédiction, de destin se trouvent posées avec acuité ?

À force d'*imaginer* les possibles ressorts de l'action qui m'ont conduit à traiter ce sujet, j'ai fini par souffrir de *migraine*… « IMAGINER », « MIGRAINE »… Surprise, ces deux mots sont des anagrammes : s'agit-il là encore d'un “simple hasard” ?

En relisant les premières lignes de l'ouvrage d'Émile BOREL intitulé *Le Hasard*, je me suis demandé si la question qu'on lui avait alors posée à

7 - P. BOURDIEU, *Ce que parler veut dire*, éditions Fayard, 1982, p.218

8 - S. LEBOVICI, *Le hasard aujourd'hui*, collection Points sciences, éditions Le Seuil, 1991, p.58

l'époque n'était pas toujours d'actualité. Je cite BOREL : " *Il y a quelques mois, à une question sur mes travaux scientifiques, j'eus l'imprudence de répondre que je terminais un livre sur le Hasard ; mon interlocuteur me demanda aussitôt, non sans quelque ironie, ce que je dirais de neuf sur ce « magnifique sujet ».* "[9] C'était en 1914… Peut-on dire, en 2001, quelque chose de neuf sur le hasard et qui peut être habilité à le dire ? Des auteurs prestigieux comme Michel BITBOL, Ivar EKELAND, Albert JACQUARD, Etienne KLEIN, Marc LACHIÈZE-REY, Benoît MANDELBROT, Roland OMNÈS, Ilya PRIGOGINE, David RUELLE ? Des spécialistes des sciences du vivant tels Henri ATLAN, Pierre-Henri GOUYON, Jacques MONOD, Daniel SCHWARTZ ? Des artistes qui à la suite de Marcel DUCHAMP ou du mouvement Dada, de Jean DUBUFFET et de ses collages, de Jackson POLLOCK promenant sa boîte de peinture percée au-dessus de ses toiles, des créations de Jean TINGUELY, de la musique de John CAGE ou de Pierre BOULEZ, des chorégraphies de Merce CUNNINGHAM, utilisent le hasard comme outil de création ? Doit-on interroger des jurés d'assises choisis au hasard ou des personnes malades qui se prêtent à des essais thérapeutiques ?

Notons encore que le hasard est parfois utilisé comme déni de responsabilité, comme circonstance atténuante pour certains comportements. Citons ce fait divers rapporté par le journal *L'Est Républicain* du 29 janvier 2001 sous le titre : "*Il cambriole un magasin par hasard*". C'est parce que la vitrine du magasin a volé en éclats peu avant son passage que l'intéressé se serait senti sollicité… À l'opposé d'une telle conception se trouve l'idée qu'il n'y a pas de hasard dans la mesure où l'homme, considéré comme conscient et raisonnable, est responsable de ses faits et gestes.

Mon ambition n'est évidemment pas "de dire du neuf sur ce magnifique sujet", elle est plus modeste : elle consiste à essayer de mettre un peu d'ordre quant aux diverses manières d'appréhender le hasard, quant aux sens qui ont été attribués au mot hasard lequel recouvre des conceptions très variées. Pour penser le hasard et essayer de répondre à cette difficile question, j'ai retenu deux types d'approche : une approche de type anthropologique et épistémologique et une approche mathématique.

Les mots "cause", "raison", "explication" reviennent souvent jusqu'ici. Le hasard peut-il constituer une explication ou au contraire ne représente-t-il pas un obstacle à l'explication ? Si, comme l'écrit COURNOT, la raison est la faculté de saisir la raison des choses, le hasard ne constitue-t-il pas un défi à cette prétention ? Et tout d'abord, d'où vient le mot hasard ?

9 - E. BOREL, *Le hasard*, éditions Félix Alcan, 1938, p.1

2. L'origine du mot hasard

Une première hypothèse, quant à l'origine du mot « hasard », celle reprise le plus fréquemment, sans doute parce qu'elle se trouve dans le dictionnaire historique de la langue française, présente ce mot comme un emprunt (1150, *hasart*) à l'arabe *az-zahr* qui signifie « jeu de dés » par l'intermédiaire de l'espagnol *azar* (1283) « jeu de dés » et « coup défavorable au jeu de dés ». "*Le mot arabe vient de* ***zahr*** *« fleur » (espagnol* ***azahar*** *« fleur d'oranger »), les dés ayant porté une fleur sur l'une des faces, soit du verbe* ***yasara*** *« jouer à un jeu de hasard ». Le h est dû au fait qu'au Moyen-Âge les mots à initiale vocalique, d'origine étrangère, étaient régulièrement écrits avec h.* "[10] Hasard aurait donc son étymologie dans le nom des jeux d'osselets ou de dés.

Une autre hypothèse, assez proche de la précédente, fait référence à un jeu de dés trouvé par les croisés dans un château occupé par les Infidèles : il s'agirait du château de Hazard près d'Alep en Syrie. Dans l'Occident médiéval, c'était le dieu de chrétiens qui exprimait sa volonté par l'intermédiaire des Sorts et qui arrêtait les dés afin de favoriser le juste. On distinguait les « sorts consultatifs » (comment agir), les « sorts divinatoires » (prédire l'avenir), les « sorts diviseurs » (relatifs aux partages). Ces « jugements de Dieu » furent interdits par SAINT LOUIS - qui interdit également la fabrication des dés - au moment où refluait le courant qui avait emporté la chevalerie chrétienne jusqu'en Terre Sainte. Or la découverte, par les chrétiens, d'un jeu de dés dans un château occupé par des Infidèles, posa une question redoutable : lorsqu'un Infidèle lance les dés au château de Hazard, qui les arrête ? Il n'était pas possible que le vrai dieu, celui des croisés, s'occupa de dés appartenant aux musulmans ! Existerait-il des causes qui échapperaient au pouvoir de Dieu et qui seraient étrangères à l'univers de la pensée médiévale ? Un concept nouveau - le « hazard » - serait alors apparu, conservant dans son nom le souvenir du lieu de sa naissance et conservant, du jeu de dés, une métaphore qui lui servira d'emblème.

Remarquons que l'on retrouve le mot « hazard » avec un « z » en anglais, où le mot a le sens de danger, d'obstacle, de risque : « the hazards of child birth » (les risques liés à l'accouchement), « a fire hazard » (un risque d'incendie).

10 - *Dictionnaire historique de la langue française*, Le Robert, 1994, p.946

3. La pensée du hasard : Absence ou négation du hasard

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux pensées qui n'accordent aucun statut et aucune existence au hasard ; nous examinerons ensuite les pensées qui considèrent le hasard comme une vue de l'esprit avant de considérer les pensées qui reconnaissent au hasard une réalité objective.

3.1. « Mentalité primitive » et pensée infantile

De manière très classique, il est convenu de considérer deux sortes de terrains psychologiques auxquels la notion de hasard paraît étrangère : il s'agit d'une part de la « mentalité primitive » et d'autre part de la pensée du jeune enfant. L'existence d'une structure mentale propre à la « mentalité primitive » a fait l'objet des nombreux travaux notamment de la part de Lucien LÉVY-BRUHL[11]. Quant aux recherches en psychologie cognitive, notamment celles conduites par Jean PIAGET et Bärbel INHELDER[12], elles ont montré l'existence d'une structure mentale propre à l'enfant. Un tel rapprochement est-il pour autant pertinent ? Car pour être classique, le principe de la double opposition - « primitif »/civilisé, enfant/adulte - qu'implique cette distinction, n'en demeure pas moins problématique. Lucien LÉVY-BRUHL, vers la fin de sa vie, a courageusement remis en cause un certain nombre de ses propres thèses - notamment lorsqu'il considérait le « primitif » comme un être « inférieur » - et a alors défendu l'idée selon laquelle la « mentalité primitive » est présente dans tout esprit humain, idée reprise par Gaston BACHELARD[13] pour qui chacun des concepts auxquels nous recourons pour penser le monde résulte de la présence simultanée en nous, selon des proportions variables, de concepts qui sont d'âge et de formation distincts. Ainsi, même dans les civilisations les plus « évoluées », mentalité « moderne » et mentalité « archaïque » coexisteraient en chacun de nous, la pensée scientifique étant un combat permanent pour essayer d'atténuer et d'éradiquer la pensée « archaïque » qui invente les causes au lieu de les rechercher. Cette idée est reprise par Michel SERRE qui souligne, à l'aide d'une métaphore, la proximité du moderne et de l'archaïque. “ *Considérez une voiture automobile d'un modèle récent : elle forme un agrégat disparate de solutions*

11 - L. LÉVY-BRUHL, *La mentalité primitive*, PUF, 1960

12 - J. PIAGET & B. INHELDER, *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, PUF, 1974

13 - G. BACHELARD, *La philosophie du non*, Paris, PUF, édition 1988

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

scientifiques et techniques d'âges différents ; on peut la dater pièce à pièce : tel organe fut inventé au début du siècle, l'autre il y a dix ans et le cycle de CARNOT *a presque deux cents ans. Sans compter que la roue remonte au néolithique. L'ensemble n'est contemporain que par le montage, le dessin, l'habillement, parfois seulement par la vanité de la publicité. "*[14] Pour Michel SERRES, non seulement ce constat s'applique à l'histoire des sciences, il s'applique également au développement cognitif.

De même, la pensée du jeune enfant s'oppose beaucoup moins à celle de l'adulte qu'elle ne la prépare : il s'agit d'une maturation fonctionnelle et Jean PIAGET admet que, malgré les décalages qui séparent les différentes étapes du développement de la pensée de l'enfant, il existe un ordre naturel entre ces étapes qu'il nomme des stades.

a) L'absence de hasard dans la « mentalité primitive »

Pour Lucien LÉVY-BRUHL, un des caractères essentiels de la « mentalité primitive » est l'absence de hasard : la « mentalité primitive » est « mystique » et « prélogique ». « Mystique », c'est-à-dire fondée sur des croyances en des forces surnaturelles ; « prélogique » car indifférente à la contradiction. La « mentalité primitive » a pour principe « la participation » : c'est l'idée que les êtres et les objets peuvent être à la fois eux-mêmes et autre chose qu'eux-mêmes. Par exemple, un Indien Bororo pense qu'il est à la fois un homme et un perroquet, parce qu'il participe intimement à la nature de cet animal qui est son totem[15]. Cet indien peut être à la fois là où il dort et là où son rêve le situe. Pour Lucien LÉVY-BRUHL, une des conséquences du « principe de participation » est que les « primitifs » ont une "conception occasionnaliste", pour reprendre une expression de MALEBRANCHE, de la causalité naturelle : ce que nous considérons comme la cause d'un phénomène, serait simplement pour eux une circonstance qui a donné l'occasion d'intervenir à une puissance surnaturelle et qui serait la véritable raison de l'événement. Pour Lucien LÉVY-BRUHL la pensée « primitive » est une pensée « surdéterministe », c'est-à-dire une pensée qui n'accepte pas qu'il puisse exister un feuilletage du réel et des domaines qui n'interfèrent pas les uns avec les autres. Dans la « mentalité primitive », tout interfère et strictement rien n'est

14 - M. SERRES, *Éclaircissements, entretiens avec B. LATOUR*, PARIS, éditions F. Bourin, 1992, p.72

15 - animal considéré comme ancêtre mythique, ou parent lointain

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

laissé au hasard : tout peut s'expliquer grâce à l'invention de causes surnaturelles. Si la foudre tombe sur une case et déclenche un incendie, c'est qu'un esprit irrité l'a frappée. " *En Nouvelle-Guinée, un arbre tombe : c'est un sorcier qui l'a fait tomber, quand même l'arbre serait tout pourri, ou si c'est un coup de vent qui l'a brisé.* "[16] Si un homme a un accident, on cherche quel est le sorcier qui lui a jeté un sort. " *En effet, il n'y a pas de hasard : l'idée de l'accident ne vient même pas à l'esprit des indigènes, tandis que l'idée de maléfice leur est au contraire toujours présente.* "[17] Le monde du « primitif » serait donc habité par des influences mystiques favorables ou défavorables. Siré KAMARA, griot, tient les propos suivants : " *En Afrique, tout est fait pour qu'il n'y ait pas de place pour le hasard. Toutes les choses sont expliquées. Il y a une explication derrière toute chose. C'est les croyances, c'est les mythes. Et donc le hasard n'a pas sa place là. On donne une explication, par exemple, quand on met les mains sur la tête, on dit, « non, il ne faut pas mettre les mains sur la tête parc'que ça appelle le malheur ». Ça peut être aut'chose, ça peut être une autre explication mais toujours est-il, qu'on interdit et on donne une explication et très souvent dans toutes les scènes de la vie quotidienne c'est à peu près ça. Et il y a des endroits dans la forêt où on estime que c'est dangereux d'aller et on dit « non c'est un endroit protégé par les esprits ». Donc la place qui est accordée à l'esprit, à l'imaginaire, est prépondérante dans la culture africaine. On parlerait difficilement du hasard dans ces conditions.* "[18]

Remarquons que l'on retrouve ces mêmes éléments dans la pensée du jeune enfant jusqu'à un âge de 7/8 ans. Ensuite, les choses vont évoluer dans le sens de la découverte du hasard lors des étapes ultérieures de son développement.

b) La genèse de la pensée du hasard chez l'enfant selon la théorie piagétienne

Pour Jean PIAGET, les besoins, les coordinations sensorielles et motrices, la maturation du système nerveux sont des nécessités qu'il faut prendre en compte pour comprendre le développement cognitif des enfants. Les besoins qui sont d'ordre physiologique, affectif ou intellectuel engendrent l'intérêt et commandent des mécanismes régulateurs de développement et d'énergie. Les coordinations sensorielles et motrices, qui préexistent dans le cerveau du nouveau-né et qui sont nécessaires à la

16 - L. LÉVY-BRUHL, *La mentalité primitive*, PUF, 1960, p.30

17 - L. LÉVY-BRUHL, op. cit., p.36

18 - "Sur les traces du hasard" in *les nuits magnétiques*, France Culture, 21 mai 1997.

satisfaction de ses premiers besoins, servent de bases structurelles à l'émergence de l'intelligence qui vient s'y greffer. Les premières actions instinctives deviennent ainsi rapidement intentionnelles : le bébé intériorise ces actions sous forme de schèmes qui, dans la théorie piagétienne, sont des organisations neuronales venant en complément de structures primitives. L'enfant identifie les objets et élabore progressivement des catégories - l'espace, le temps, la causalité - selon un processus de structuration générale. Les schèmes vont ainsi s'opérationnaliser, se compléter, se renforcer, se généraliser, en construisant « l'intelligence » qui est la forme la plus générale de la coordination des actions ou des opérations. " *Le développement de l'intelligence [...] relève de processus naturels ou spontanés, en ce sens qu'ils peuvent être utilisés et accélérés par l'éducation familiale ou scolaire mais qu'ils n'en dérivent pas et constituent au contraire la condition préalable et nécessaire de l'efficacité de tout enseignement.* "[19] Le rôle de l'action de l'enfant sur le milieu physique est capital pour la construction de son intelligence : les actions constituent le point de départ des futures « opérations » mentales, opération entendue au sens d'action effective ou intériorisée devenue réversible au moins en pensée.

L'idée de hasard se construit progressivement dans le cadre des caractéristiques générales des stades du développement de l'enfant dans la théorie piagétienne, très brièvement évoquée ici[20].

* Lors de la période pré-opératoire (de 2 à 7/8 ans)

L'événement marquant de ce stade est l'affinement des représentations mentales grâce à l'acquisition du langage et de la fonction symbolique. Jusqu'à 5 ans, le langage est, selon la formule de Jean PIAGET, égocentrique puis devient moyen de communication. Grâce aux représentations mentales, l'enfant devient capable de transformer les objets en pensées, de reconstituer les actions passées, d'anticiper les actions futures. Cependant il ne coordonne pas les actions et les idées entre elles. Sa pensée est figurative, statique, descriptive mais n'est pas opérative : il ne possède pas la réversibilité. Il enrichit ses schèmes sensori-moteurs par des schèmes de représentation qui les renforcent. Il n'a pas besoin de justification logique pour affirmer.

19 - J. PIAGET, Psychologie et pédagogie, éditions Denoël, 1969, p.59

20 - La théorie des stades du développement cognitif est retracée dans l'ouvrage de J. PIAGET, Mes idées, propos recueillis par R.I. EVANS, éditions Denoël/Gonthier, 1973, p.65-78

Animisme[21], artificialisme[22], finalisme[23] sont caractéristiques de sa pensée égocentrique. À ce stade, faute d'un système d'opérations, l'enfant ne distingue pas le possible (ce qui peut advenir) du nécessaire[24], ne différencie pas le déductible du non déductible. Sa pensée oscille entre le prévu et l'imprévu, entre le prévisible et l'imprévisible : rien n'est prévisible à coup sûr, c'est-à-dire déductible selon un lien de nécessité, ni imprévisible à coup sûr, c'est-à-dire fortuit. " *Il n'y a dès lors ni hasard ni probabilité, faute d'un système de référence consistant en opérations déductives.* "[25] C'est donc à ce stade qu'un parallèle entre pensée du jeune enfant et « mentalité primitive », peut, selon nous, être éventuellement envisagé.

* Deuxième étape : le développement de l'intelligence opératoire concrète (de 7/8 à 11/12 ans)

L'enfant ne confond plus son propre point de vue et celui des autres : il devient capable de concentration dans les activités individuelles et capable de collaboration dans les activités collectives. Le langage égocentrique disparaît. L'enfant montre un besoin de justification logique et de connexion dans les idées. C'est la période des jeux de règles où l'ajustement aux autres le conduit à mener des discours intérieurs, prémices de la réflexion. L'assimilation égocentrique (animisme, artificialisme, finalisme) fait place à une assimilation rationnelle. La pensée opératoire se met en place[26]. Ainsi, en même temps que se construisent les opérations concrètes, il y a différenciation entre les opérations (associées au domaine du déductible) et le hasard (associé au domaine de l'imprévisible). L'idée de hasard est conçue

21 - L'enfant considère le monde comme animé et distingue difficilement le vivant de l'inerte. Ainsi, les arbres et les nuages qui bougent sont nantis d'une vie.

22 - L'enfant considère les événements naturels comme provoqués par une volonté mythique ou humaine. On peut distinguer l'artificialisme mythique (des forces mystérieuses sont à l'origine des phénomènes) et l'artificialisme technique (tout est fait par l'homme, les nuages comme les maisons).

23 - L'enfant considère les événements naturels comme provoqués dans un but déterminé à l'avance à l'image de ses propres actes intentionnels.

24 - Pour ARISTOTE, est nécessaire une chose qui ne peut être autre que ce qu'elle est ou encore qui ne peut pas ne pas être.

25 - J. PIAGET & B. INHELDER, op. cit., p.197

26 - Une action devient opératoire dès que deux actions du même groupe peuvent être composées en une troisième action qui appartient aussi à ce groupe, toutes ces actions étant réversibles.

comme ce qui résiste aux opérations et est découverte par opposition, par antithèse avec la nécessité déductive. "*La découverte de la nécessité déductive ou opératoire permet au sujet de concevoir, par antithèse, le caractère non déductible des transformations fortuites isolées et de différencier ainsi le nécessaire du simplement possible.* "[27]

* Troisième stade, celui de l'intelligence opératoire formelle (de 11/12 à l'âge adulte)

La faculté de raisonner sur des possibles, sur des hypothèses, marque l'entrée dans la dernière phase du développement intellectuel : la pensée formelle ou pensée hypothéco-déductive. La pensée formelle consiste non plus à appliquer des opérations à des objets mais à exécuter en pensée des actes possibles sur les objets ou sur d'autres pensées. "*La pensée concrète est la représentation d'une action possible et la pensée formelle, la représentation d'une représentation d'actions possibles.*"[28] À ce stade, le hasard a été découvert, au titre de rapports indéterminés, non composables par les méthodes opératoires et irréversibles, ce qui est contraire à toutes les opérations. Pour J. Piaget et B. Inhelder, il y a là un obstacle que l'esprit cherche à dépasser : " *Si le hasard fait momentanément échec à la raison, celle-ci réagit tôt ou tard en interprétant le hasard, et la seule façon d'interpréter le hasard consiste alors à le traiter comme s'il était, au moins en partie, composable et réversible, c'est-à-dire comme si l'on pouvait chercher à le déterminer malgré tout. C'est de ce besoin que naît la composition probabiliste.*"[29] Il y a donc synthèse entre le hasard et les opérations, celles-ci permettant de structurer le champ des dispersions fortuites en un système de probabilités par une sorte d'assimilation du fortuit à l'opératoire. Deux processus corrélatifs concourent à ce résultat : la construction des systèmes combinatoires permettant de déterminer l'ensemble des cas possibles (dont la réalisation reste indéterminée) et l'accès au raisonnement proportionnel permettant d'associer à chacun d'eux une fraction de détermination.

Illustrons l'ensemble de cette thèse par une expérience décrite par Jean Piaget et Bärbel Inhelder.

---

27 - J. Piaget & B. Inhelder, op. cit., p.197

28 - J. Piaget, *Six études de psychologie*, éditions Denoël, 1964, p.79

29 - J. Piaget & B. Inhelder, op. cit., p.212

Les auteurs analysent la manière dont le sujet parvient à dissocier ce qui est dû au hasard de ce qui ne l'est pas. À cette fin, ils examinent les réactions des enfants face aux « miracles » provoqués par un dispositif truqué. Après avoir lancé, à plusieurs reprises, 10 à 20 jetons blancs pourvus d'une croix sur l'un des côtés et d'un cercle sur l'autre, on substitue à cette collection - sans que l'enfant s'en aperçoive - une quinzaine de faux jetons portant des croix des deux côtés ; on les lance, éventuellement à plusieurs reprises. Dans une deuxième partie de l'expérience - après avoir indiqué le trucage à l'enfant s'il ne l'a pas trouvé - sans que le sujet sache si l'on a repris ou non la collection truquée, on jette un à un les faux jetons et l'on cherche à partir de quel moment le sujet sera certain qu'il s'agit de la collection à éléments homogènes. L'hypothèse sous-jacente à cette expérience est la suivante : "*Le hasard est la négation du miracle, c'est-à-dire que comprendre la nature d'une distribution aléatoire, ce sera, pour l'enfant comme pour nous, admettre la très faible probabilité ou même l'impossibilité pratique d'un tirage exclusif des piles ou des faces.*"[30] Résultats : au stade préopératoire, l'enfant montre une grande docilité à l'égard de l'expérience immédiate ; il n'est pas surpris par la sortie exclusive de croix et ne conclut pas à l'impossibilité et trouve naturel ce qui arrive. Il n'y a pas de miracle à la sortie simultanée de toutes les croix mais seulement un fait nouveau. Au stade des opérations concrètes, l'expérience des faux jetons est immédiatement associée à un trucage. La différence entre ces deux stades se fait à l'occasion de la deuxième partie de l'expérience qui exige une évaluation plus fine et une quantification progressive de la probabilité : alors qu'au deuxième stade, le sujet est « brusquement » convaincu, lors d'un essai, qu'il s'agit de la collection truquée, au stade des opérations formelles, le sujet devient de plus en plus sûr de son jugement, au fur et à mesure des tirages. Le jugement de probabilité s'effectue ainsi de manière graduée, ce qui dénote l'existence d'une quantification implicite.

Les travaux de Jean PIAGET et Bärbel INHELDER mettent en évidence une corrélation entre la formation des idées de hasard et de probabilité et celle du développement opératoire de l'intelligence : dans ce cadre, les principaux caractères de chaque étape sont explicables par le développement opératoire. Le hasard étant découvert par antithèse avec la nécessité déductive, il y aurait en définitive, assimilation progressive du hasard et de la probabilité aux mécanismes combinatoires (qui permettent d'engendrer le possible) et aux opérations formelles (qui permettent d'associer à chaque cas « une

30 - J. PIAGET & B. INHELDER, op. cit., p.96

fraction de détermination » ou probabilité). Selon Jean PIAGET, ce modèle théorique, qui s'adresse à tout enfant sans distinction de culture ou de niveau intellectuel, décrit un développement quasi universel en termes de capacités et non de connaissances : ce modèle est décontextualisé, ne fait pas référence aux acquis scolaires ou culturels et propose une lecture du développement de l'individu quelle que soit son histoire.

c) Critique du modèle piagétien

Le modèle piagétien a été critiqué notamment par VYGOTSKI[31], qui lui a reproché de n'avoir vu dans le milieu social qu'un élément particulier de l'environnement, auquel l'enfant s'adaptait, contraint et forcé, comme on s'adapte au froid et à la chaleur. Pour L. S. VYGOTSKI, la théorie piagétienne a sous-estimé le rôle de la culture et de son principal instrument de transmission, le langage, dans l'élaboration des structures de l'intelligence, au profit de mécanismes d'adaptation individuels. Les travaux contemporains de Gérard VERGNAUD, de Jacques LAUTREY, d'Olivier HOUDÉ s'inscrivent dans le prolongement critique et l'enrichissement des thèses piagétiennes. Gérard VERGNAUD[32] insiste sur la place centrale que doit occuper, en psychologie cognitive, le concept de schème celui-ci apparaissant essentiel pour penser les démarches cognitives des sujets en tant que systèmes pratiques de résolution de problèmes dans un contexte donné. Jacques LAUTREY[33] s'est intéressé aux mécanismes qui influencent le développement intellectuel de l'enfant : c'est en tirant ses hypothèses de la théorie de PIAGET sur le développement de l'intelligence qu'il a été amené à mettre l'accent sur le rôle des types de « structuration » du milieu familial qui diffèrent selon les classes sociales. Le modèle piagétien est également repris et critiqué par Olivier HOUDÉ[34] qui souligne combien la conception du développement de l'intelligence chez Jean PIAGET est linéaire et strictement cumulative en ce qu'elle est systématiquement liée à l'idée d'acquisition et de progrès alors que les données expérimentales actuelles indiquent que les choses ne se passent pas de manière aussi rigoureuse et que le développement cognitif semble plutôt adopter, dans son développement, un

31 - L. S. VYGOTSKI, *Pensée et langage*, traduction F. SÈVE, 3e édition La dispute, 1997.

32 - G. VERGNAUD, *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?* éditions Hachette, 1994, p. 63-93

33 - J. LAUTREY, *Classe sociale, milieu familial, intelligence*, PUF, 1980

34- O. HOUDÉ, Le développement de l'intelligence chez l'enfant, in *Qu'est-ce que la vie ? Université de tous les savoirs,* volume 1, éditions O. Jacob, 2000, p.311-315 cheminement tout à fait « biscornu », jalonné d'erreurs, de décalages inattendus et d'apparentes régressions cognitives et procéder par zigzags en activant et en inhibant à tout moment du « rationnel construit » et de « l'irrationnel présumé révolu ». Remarquons enfin que la pensée de Jean Piaget s'inscrit dans une perspective finalisée de l'esprit vers la science : dans la conception piagétienne, l'esprit devrait, au terme de son développement, être un esprit scientifique.

3.2. L'absence de hasard dans la problématique destinale

Considérons maintenant l'incompatibilité des notions de hasard et de destin.

Le mot latin *fatum* signifie « destin ». *Fatum* est le participe passé substantivé du verbe *fari* qui signifie dire, parler. Le *fatum*, c'est ce qui est dit ou écrit et dont le déroulement suit un cours inéluctable, imprévisible, irréversible : c'est *"le grand rouleau où tout est écrit"*[35] auquel Jacques - le valet - fait référence dans le roman de Diderot, *Jacques le fataliste*. Reste à distinguer la conception « aveugle » du destin chez les Grecs de la conception finaliste et rationnelle du destin stoïcien.

a) Le destin tragique

Le destin, dans la mythologie grecque, peut être défini comme un enchaînement de causes et d'effets qui conduisent à la mort : le destin a à voir avec la mort et s'attache à des familles. Pour l'individu voué au destin, la finalité qui s'empare de lui est externe et le hasard n'a aucune place. Œdipe est le fils de Laïos, roi de Thèbes, et de Jocaste. Œdipe est écarté à sa naissance en raison d'un oracle affirmant qu'il tuera son père et couchera avec sa mère. Il est alors recueilli et élevé par le roi et la reine de Corinthe. Devenu adulte, il consulte l'oracle de Delphes qui lui annonce qu'il tuera son père et qu'il couchera avec sa mère. Voulant éviter ce sort, il fuit ce qu'il croit être son pays et ce qu'il croit être ses parents et cette fuite le précipite précisément dans le sort qu'il voulait éviter. C'est en se dirigeant sur Thèbes qu'une altercation l'amène, sans qu'il le sache, à tuer Laïos, son véritable père. Jocaste, veuve de Laïos et mère d'Œdipe va alors épouser Œdipe qui devient roi de Thèbes. Sophocle, dans la tragédie *Œdipe-roi*, présente Œdipe au sommet de sa majesté, ignorant tout et passionné de vérité. Sa volonté de faire le bien le lance dans une enquête. Tirésias, devin aveugle, avertit Œdipe : " *L'assassin que tu cherches, l'homme que tu as maudit, le meurtrier du roi*

35 - Diderot, *Jacques le fataliste*, éditions Booking International, Paris, 1993, p.23

Laïos, cet homme vit ici. On le croit étranger, il est de Thèbes. Mais le jour où il saura la vérité, tout s'éteindra pour lui ; il était riche, il sera pauvre ; il partira sur les routes, il mendiera sur un sol étranger, il se révèlera le père et le frère de ses propres enfants, le mari et le fils de sa femme, et le meurtrier de son père. "[36] Peu à peu l'enquête révèle à ŒDIPE l'horreur de sa propre situation et le souverain rayonnant qu'il a été devient désespéré et se détruit : il se crève les yeux pour ne plus voir ce monde où il n'a plus sa place et qui voit JOCASTE se pendre. Le hasard n'a aucune place dans une telle mécanique où le destin est implacable. Les héros sont destinés à la mort et au malheur sans aucun recours. Dans le destin tragique, il est important de souligner que les dieux eux-mêmes sont impuissants contre le destin : ils ne peuvent le changer.

b) Le destin stoïcien

La différence entre le destin tragique et le destin stoïcien réside dans le fait que le destin tragique frappe à l'aveugle : il considère les justes et les injustes, les bons et les méchants, les innocents et les coupables. Des choses doivent avoir lieu… Comme dans le destin grec, tout ce qui arrive, arrive immanquablement à la nuance près que, dans le cas du destin grec, la force qui distribue aux hommes leur sort, le distribue de manière irrationnelle alors que dans le cas du destin stoïcien, la distribution apparaît rationnelle au sens de raisonnable : le destin stoïcien est bonté. La force qui distribue aux hommes leur sort devient, pour les stoïciens, l'universelle raison (le *logos*) selon laquelle les événements passés sont arrivés, les présents arrivent et les futurs arriveront, entendu que ce qui arrive est bon précisément parce que cela arrive et que si cela n'était pas bon alors cela n'arriverait pas… Une telle conception, en affirmant le destin, récuse le hasard. Si le logos, comme principe de l'être, assigne à chaque chose une place, la raison du Sage saura comprendre qu'aucun événement ne se produit par hasard et là où l'ignorant se révolte, le Sage comprend et acquiesce à l'ordre.

c) La Providence divine

Ce qui distingue fondamentalement le destin tragique du destin religieux, c'est que dans le premier cas les dieux sont aussi dominés par le destin alors que dans le second cas Dieu domine le destin. Quant au destin stoïcien, il ne s'oppose nullement à la Providence puisqu'il est Providence.

C'est au XVIe siècle, dans un contexte chrétien, que Juste LIPSE, de l'université de Louvain, publie le traité *De la constance* dans lequel il

36 - SOPHOCLE, *Œdipe-roi*, Collection du Repertoire de la Comédie française, Création du festival d'Avignon, 1972, p.22-23

développe une théorie d'essence stoïcienne sur la Providence[37] et les destins. Pour Juste LIPSE, la Providence désigne l'intelligence divine envisagée du point de vue des objets auxquels elle s'applique, comme "*le soin vigilant et perpétuel, mais tranquille, avec lequel elle connaît toutes choses, les dirige et les gouverne enchaînées par un ordre immuable que nous ne connaissons pas.* "[38] Cet ordre immuable est envisagé de deux points de vue :

* en Dieu qui le pose et le connaît, c'est la Providence ;

* dans les choses particulières, c'est le destin.

Le destin est "*la nécessité de toutes les choses et de toutes les actions qu'aucune force ne peut rompre*"[39] qui dérive de la force spirituelle qui gouverne l'univers avec ordre : "*J'appelle ainsi destin le décret éternel de la Providence qui ne peut pas davantage être enfreint par les créatures que révoqué par la Providence elle-même.*"[40] Soulignons le lien de dérivation établi ici entre Providence et destin. La Providence est antérieure, logiquement et chronologiquement, au destin et supérieure à lui. Elle n'est pas nécessairement source, elle est raison et principe. Dans la mesure où la pensée de Juste LIPSE a influencé grand nombre de théologiens chrétiens, il semble légitime de se demander dans quelle mesure la conception chrétienne de la Providence, notamment au Moyen-âge, pourrait ou non être rapprochée de la conception stoïcienne du destin.

Ainsi, au terme de cette évocation des pensées qui nient le hasard, on peut s'interroger sur le statut du hasard dans la pensée religieuse :

* Dans la pensée chrétienne tout d'abord : l'idée de Providence récuse celle du hasard. "*Car tu sais bien qu'il y a une intelligence éternelle que nous appelons Dieu : qui règle, gouverne et dispose les sphères pérennes des cieux, la course errante des astres, les successions alternées des éléments, enfin toutes les choses d'en haut et d'en bas. Penses-tu que le hasard ou la fortune dominent dans ce superbe corps du monde ?*"[41]

37 - Providence : du latin *providere*, « pouvoir ». Dans la théologie chrétienne, la Providence est la sagesse suprême par laquelle Dieu conduirait toutes choses.

38- J. LIPSE, *De Constantia libri duo qui alloquium praecipue continent in publicis malis,* Anvers, 1584, traduction L. DU BOIS, 1873, I, 13

39 - J. LIPSE, op. cit. I, 19

40 - J. LIPSE, op. cit. I, 19

41 - J. LIPSE, op. cit. I, 19

* Au XVII[e] siècle, l'essor de la science et de la recherche d'une explication rationnelle du monde devra composer avec ce positionnement théologique niant le hasard essentiel. Cette nécessité amènera Jakob BERNOULLI à l'expression d'une pensée déterministe, s'accommodant difficilement de l'idée de libre arbitre : "*Tout ce qui bénéficie sous le soleil de l'être ou du devenir, passé, présent ou futur, possède toujours en soi et objectivement une certitude totale. C'est évident du présent et du passé : ce qui est ou a été ne peut pas ne pas être ou avoir été. Sur le futur il n'y a pas à discuter ; cependant ce n'est pas par la nécessité de quelque destin qu'il ne peut pas ne pas advenir, mais en raison soit de la prescience soit de la prédétermination divine ; car si n'arrivait pas avec certitude tout ce qui est futur, on ne voit pas comment le Créateur suprême pourrait conserver entière la gloire de son omniscience et de son omnipotence. Quant à dire comment cette certitude de l'avenir peut subsister avec la contingence ou la liberté des causes secondes, que d'autres se disputent ; pour nous, nous ne voulons pas toucher aux points étrangers au but que nous visons.*"[42]

* Dans la pensée musulmane avec la notion de *mektoub*. La légende "ce soir à Samarcande" illustre assez bien semble-t-il, cette implacabilité. Sur la place d'une ville, un soldat rencontre une femme munie d'une écharpe rouge. Il revient en courant vers le roi et lui dit : "*permets-moi de fuir loin d'ici car j'ai rencontré une jeune fille ; c'était la mort. Elle me cherche ici à Bagdad, je vais m'enfuir à Samarcande*". Le roi l'autorise à partir, puis à son tour, rencontre la jeune fille à l'écharpe rouge à qui il demande pourquoi elle a terrifié son soldat. La jeune fille lui répond alors : "*je n'ai pas voulu lui faire peur, mais quand je l'ai vu ici à Bagdad, j'ai été très étonnée parce que je l'attends ce soir à Samarcande*".

4. La pensée du hasard : le hasard comme vue de l'esprit

Intéressons-nous maintenant aux pensées pour lesquelles le hasard existe. Pour Gilles Gaston GRANGER[43] comme pour Giorgio ISRAËL[44], la question du hasard est traditionnellement traitée d'un double point de vue :

42 - J. BERNOULLI, L'*Ars conjectandi*, 1713, traduction de N. MEUSNIER, publication de l'IREM de Rouen, 1987, p.14-16

43 - G. G. GRANGER, *Le probable, le possible et le virtue*l, éditions O. Jacob, 1995, p.170

44 - G. ISRAËL, *La mathématisation du réel*, éditions du Seuil, 1996, p.241-253

ontologique d'une part, comme propriété du monde - le hasard en soi -, épistémologique d'autre part comme limitation de notre connaissance de ce monde. Autrement dit, le hasard est-il une propriété des relations entre les choses ou est-il une propriété de notre relation avec les choses ? Est-il « dans les choses » ou « dans les jugements humains sur les choses » ?

Examinons tout d'abord le point de vue selon lequel le hasard serait le nom que nous donnons à notre ignorance.

4.1. Le déterminisme ontologique et universel de LAPLACE ou le hasard-ignorance

Au début du XIX^e^ siècle, l'ensemble des scientifiques a adopté les conceptions de la mécanique de NEWTON où la donnée de la position et de la vitesse d'un objet détermine entièrement la façon dont cet objet va se déplacer. Pour les tenants de la physique classique, c'est-à-dire la quasi-totalité des physiciens et des mathématiciens de cette époque, le monde est entièrement déterminé et ne fait aucune place au hasard. Pierre-Simon LAPLACE (1749-1827) est plus prudent et considère le hasard et la contingence comme des figures de l'incertitude et ne sont pas autres choses que les noms donnés à l'ignorance du sujet humain dans un univers déterminé : "*Nous devons donc envisager l'état présent de l'Univers comme l'effet de son état antérieur, et comme cause de celui qui va suivre.*"[45] Pour Amy Dahan DALMEDICO[46], le déterminisme de LAPLACE est ontologique et global et est fondé sur la conviction selon laquelle la nature est connaissable et obéit à des lois mathématiques. Cependant une telle maîtrise, l'esprit humain ne l'atteindra jamais, comme LAPLACE le souligne ensuite : "*Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ses données à l'analyse, embrasserait dans la même formule*[47] *les*

45 - P. S. LAPLACE, *Essai philosophique sur les probabilités*, réédition Bourgois, 1986, p.32

46 - A. D. DALMEDICO, Le déterminisme de Pierre-Simon LAPLACE et le déterminisme aujourd'hui, in *Chaos et déterminisme*, collection Points sciences, éditions Le Seuil, 1992, p.376

47 - Soulignons l'importance, dans cette phrase, de l'expression « dans la même formule ». LAPLACE pose que si l'on connaissait l'ensemble des paramètres de l'Univers pensé comme un gigantesque système, alors on pourrait donner ***la*** formule mathématique expressive de **la** loi régissant ce système : l'ensemble des théorèmes de la physique se déduirait de cette formule.

mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux… "[48]

Ainsi, l'intelligence humaine doit-elle avoir comme idéal l'intelligence absolue qui donnerait à l'humanité la vision totale de l'univers. LAPLACE rejoint ici l'acte de foi de KEPLER, selon lequel la seule différence entre Dieu et les hommes, réside dans le fait que le premier connaît depuis l'éternité tous les théorèmes, tandis que l'homme ne les connaît pas tous encore. Or, un tel idéal est irréalisable : ne peut exister que la tentative de réduire le plus possible le hasard-ignorance. Si LAPLACE croit à la possibilité d'une détermination des lois mathématiques de l'Univers, il souligne que seule une intelligence supérieure, toute théorique et aux possibilités cognitives infinies, pourrait calculer tous les effets des lois de la nature. Cette intelligence n'est pas censée posséder de qualités surnaturelles et en cela le déterminisme laplacien s'oppose au déterminisme antérieur théologique - exprimé par Jakob BERNOULLI - dans lequel le rôle de l'intelligence omnisciente était tenue par Dieu. LAPLACE reconnaît que l'homme restera toujours infiniment éloigné de cette intelligence supérieure.

Le hasard, selon LAPLACE, est donc soit un euphémisme pour parler de l'ignorance, soit l'expression des limites actuelles de la perception humaine. Remarquons qu'une telle conception est évoquée, au XX^{e} siècle, par Émile BOREL : *"La caractéristique des phénomènes que nous appelons fortuits, ou dus au hasard, c'est de dépendre de causes trop complexes pour que nous puissions les connaître toutes et les étudier."*[49] La conception laplacienne, qui postule un déterminisme ontologique et universel, se trouve cependant mise à mal par un grand nombre de résultats de la physique contemporaine : ainsi en est-il, par exemple, de la dépendance sensitive d'un phénomène aux légères variations des conditions initiales.

4.2. Hasard et dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales

"Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. "[50] Mais Henri POINCARÉ constate qu'il n'en est pas ainsi… Une telle prédiction se révèle impossible, d'où une autre manière de définir le hasard.

48 - P. S. LAPLACE, op. cit. p.32-33

49 - E. BOREL, op. cit., p.7

50 - H. POINCARÉ, op. cit., p.4-5

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

En effet, le hasard peut être dû à la complexité d'un système qui le rend sensible aux conditions initiales par un jeu de bifurcations non déterministes et théoriquement imprévisibles. Comme le souligne David RUELLE[51], c'est à la fin du siècle dernier, que les savants, Henri POINCARÉ, Pierre DUHEM et Jacques HADAMARD, ont attiré l'attention sur un certain nombre de systèmes mécaniques où des différences infinitésimales dans l'état initial conduisent à des évolutions très différentes : cette remarque est à l'origine de la théorie du chaos. Jacques HADAMARD a ainsi démontré mathématiquement que pour certains systèmes, un changement infime de condition initiale conduit à un tel changement de l'évolution ultérieure du système que les prédictions à long terme deviennent vaines. C'est notamment le cas de la trajectoire d'une boule de billard lorsque sont disposés, sur la table du billard, des plots en quinconce qui infléchissent la trajectoire de la boule : la trajectoire de la boule est alors extrêmement sensible à la valeur de l'angle de tir initial. Il s'agit, comme le souligne David RUELLE, d'une découverte conceptuellement très importante dans la mesure où le mouvement de la boule de billard est, en théorie, déterminé sans ambiguïté par les conditions initiales mais, parce que l'observateur est fondamentalement limité dans la prédiction de sa trajectoire, "*nous avons à la fois déterminisme et imprédictibilité.*"[52] Henri POINCARÉ avait initié cette idée selon laquelle le déterminisme et le hasard étaient rendus compatibles par l'imprédictibilité à long terme et il pensait avoir trouvé une des sources du hasard. De petites causes peuvent ainsi avoir de grands effets, largement imprédictibles. On dit qu'il y a dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales. "*Si un cône repose sur sa pointe, nous savons bien qu'il va tomber, mais nous ne savons pas de quel côté ; il nous semble que le hasard seul va en décider. Si le cône était parfaitement symétrique, si son axe était parfaitement vertical, s'il n'était soumis à aucune autre force que la pesanteur, il ne tomberait pas du tout. Mais le moindre défaut de symétrie va le faire pencher légèrement d'un côté ou de l'autre, et dès qu'il se penchera, si peu que ce soit, il tombera tout à fait de ce côté. Si même la symétrie est parfaite, une trépidation très légère, un souffle d'air pourra le faire incliner de quelques secondes d'arc ; ce sera assez pour déterminer sa chute et même le sens de sa chute qui sera celui de l'inclinaison initiale. Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard.*"[53]

51 - D. RUELLE, op. cit, p.59-65

52 - D. RUELLE, op. cit., p.59

53 - H. POINCARÉ, op. cit., p.4

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Les mouvements atmosphériques sont notamment sensibles aux conditions initiales : un papillon bat des ailes à la Martinique et provoque deux semaines après une tempête sur les côtes de la Manche. Cet exemple de deux météorologues américains - LEITH et KRAICHMAN - repris par Edward LORENZ est connu sous le nom « d'effet papillon » que Jean Marc LEVY-LEBLOND qualifie au passage de "*métaphore éculée*."[54] Rappelons que le terme chaos désigne une situation où, pour n'importe quelle condition initiale, l'incertitude des prédictions croît avec le temps. Les exemples des phénomènes chaotiques sont généralement empruntés à l'histoire, à la finance et bien sûr à la météorologie où la connaissance des conditions initiales est évidemment très difficile.

Après cette présentation du hasard défini par la dépendance sensitive aux conditions initiales en physique classique mais qui fait encore la place à une conception déterministe de la nature, intéressons-nous à la question du hasard défini comme désordre.

4.3. Désordre microscopique et déterminisme statistique : le hasard-désordre

La science, notamment au XIXe siècle, a longtemps eu affaire à des phénomènes qui paraissaient relativement simples, étudiés à l'échelle macroscopique. Ainsi conçue, la science postulait un déterminisme mécanique, aboutissant à la formulation de lois idéales, rigoureuses : elle pouvait prétendre à la certitude. Les progrès réalisés ont peu à peu révélé que l'apparente simplicité de certains phénomènes recouvre, en réalité, des phénomènes extrêmement complexes, auxquels le déterminisme absolu ne s'applique plus. Considérons un récipient rempli de gaz : il contient des milliards de molécules de gaz animées de mouvements erratiques - l'agitation thermique. Ces mouvements sont désordonnés et sont considérés, pour chaque molécule, comme strictement dus au hasard parce que la connaissance et le traitement de la totalité des paramètres physiques est inaccessible et impossible.

Par contre, au niveau global, macroscopique, il y a une certaine constance : les molécules se déplacent dans des directions qui s'annulent statistiquement. Pour Jacques BONITZER, il y a deux types de processus en interaction qui sont des phénomènes composites associant un ensemble de

54 - J.M. LÉVY-LEBLOND, La science en son miroir, in *Dictionnaire de l'ignorance*, direction M. CAZENAVE, éditions Albin Michel Sciences, 1998, p.25

phénomènes « microscopiques » et un phénomène « macroscopique ». "*Ces phénomènes ont leur autonomie, ce qui veut dire qu'ils sont régis, les uns et les autres, par leurs lois propres. En même temps, ils sont en interaction ; les phénomènes microscopiques influencent le déroulement du phénomène macroscopique, tandis que c'est la loi de celui-ci qui agrège les phénomènes microscopiques - ou, en d'autres termes, leur impose son « point de vue ». [...] Le phénomène macroscopique dépend de la valeur cumulée d'une somme de caractéristiques numériques des phénomènes microscopiques.*"[55]

Ainsi, pour cette pensée moderne, le « hasard-désordre » serait dans la nature même des phénomènes microscopiques et le déterminisme serait une conséquence à l'échelle macroscopique des lois du hasard à l'échelle microscopique, puisqu'on mesure des grandeurs qui sont en fait des valeurs moyennes aux fluctuations très faibles.

5. La pensée du hasard : le hasard comme réalité objective

On peut distinguer plusieurs formes de compréhension du hasard comme réalité objective : le hasard-rencontre, c'est-à-dire le hasard défini comme la rencontre accidentelle entre plusieurs séries de faits ou de causes indépendants et le hasard radical appelé encore hasard essentiel, intrinsèque, absolu, que l'on trouve à la fois chez les épicuriens et chez les physiciens contemporains spécialistes de micro-physique et en particulier chez les spécialistes de physique quantique.

5.1. Le hasard-rencontre

a) Le hasard-rencontre chez DÉMOCRITE

L'hypothèse atomique, développée par DÉMOCRITE[56], suppose que la matière est constituée d'objets indissociables et extrêmement petits : les atomes. L'une des propriétés fondamentales de la matière ainsi conçue est l'existence du vide, dans lequel les atomes se meuvent de manière incessante.

Dans cette conception, les trajectoires des atomes sont imprévisibles et indépendantes et les rencontres d'atomes, qui produisent les réalités complexes (les mondes), sont dues au hasard.

55 - J. BONITZER, *Philosophie du hasard*, Messidor, éditions sociales, 1984, p.140-141

56 - 420 avant J.C.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Nous montrerons plus loin, comment cette conception du hasard-rencontre va se trouver complétée, par celle du hasard-créateur chez les épicuriens et notamment chez LUCRÈCE. Par contre il faut noter que cette conceptualisation ne trouve aucune place chez ARISTOTE pour lequel il n'existe qu'un monde, le monde, alors que pour DÉMOCRITE il existe une infinité de mondes. Remarquons au passage, qu'aujourd'hui, ce qui correspond à un monde selon ARISTOTE correspond à l'univers du big-bang alors qu'à l'opposé, un certain nombre d'astrophysiciens considèrent notre monde comme une minuscule bulle sur une mousse d'univers…

b) Le hasard-rencontre chez ARISTOTE

C'est dans le livre II de *la Physique*, qu'ARISTOTE s'intéresse à certains faits exceptionnels qui se produisent dans la nature et c'est en essayant d'analyser leurs causes qu'apparaît l'examen du hasard et de la fortune. Pour ARISTOTE, l'essence de ces faits ne réside pas seulement dans la rareté, ils se produisent « par accident ». La cause n'est pas inscrite par nature dans le phénomène mais n'est pas pour autant indéterminée : le hasard est cause par accident. "*La fortune et le hasard sont des causes par accident, pour des choses susceptibles de ne se produire ni absolument, ni fréquemment, et en outre susceptibles d'être produites en vue d'une fin.*"[57] Il donne l'exemple d'un créancier qui se rend à l'Agora pour participer aux discussions publiques et qui rencontre son débiteur : c'est l'occasion de lui réclamer son argent même si ce n'est pas pour cette raison qu'il est venu. ARISTOTE dit que la rencontre a lieu par fortune, que c'est la fortune qui en est la cause, mais en tant qu'indéterminée. ARISTOTE établit une différence entre le hasard proprement *dit (automaton) et la fortune (tychè). "Tout effet de fortune est de hasard, mais tout fait de hasard n'est pas de fortune.*"[58] Le hasard (automaton) concerne aussi bien les animaux et les êtres inanimés. Si on jette en l'air, n'importe comment le trépied, il peut arriver qu'il retombe sur ces pieds : "*La chute du trépied est un hasard, si après sa chute il est debout pour servir de siège, sans qu'il soit tombé pour servir de siège.*"[59] Le trépied est tombé de lui-même pour rien, autrement dit, conclut ARISTOTE, il est tombé par hasard sur ses pieds. La connexion entre l'accident et le hasard est ici manifeste. Chez ARISTOTE, la cause est toujours en même temps cause finale, si bien que les faits de hasard sont cause sans

57 - ARISTOTE, *Physique* (I-IV), traduction H. CARTERON, Paris, Les Belles Lettres, 1926, p.197a

58 - ARISTOTE, op. cit., p.197b

59 - ARISTOTE, op. cit., p.197b

finalité (puisque causés par accident), mais imitant la finalité. Quant à la fortune (tychè), elle ne s'applique, selon ARISTOTE, qu'à l'homme, en tant qu'il est le vivant pourvu du logos. "*On voit donc que la fortune est une cause par accident, survenant dans les choses qui, étant en vue de quelque fin, relèvent en outre du choix. Par suite la pensée et la fortune sont du même ordre, car le choix ne va pas sans pensée.*"[60] On parle de fortune (et même de « bonne fortune ») pour quelqu'un qui aurait pu imaginer, par exemple, que c'était sur l'agora qu'il allait trouver une personne qui lui devait de l'argent. La fortune ne se déploie que dans le domaine de l'activité pratique. "*Aucun être inanimé, aucune bête, aucun enfant n'est l'agent d'effets de fortune, parce qu'il n'a pas la faculté de choisir.*[61]*[...]La fortune n'est d'ailleurs qu'une espèce du genre hasard, la fortune appartenant au domaine des choses qui suivent les résolutions libres, le hasard au domaine des choses qui arrivent pour une fin, sans être choisies.* "[62]

Comme le souligne G. G. GRANGER, cette présentation du hasard dans la nature par ARISTOTE appartient au domaine de la pensée antique et doit être située à l'âge d'une proto-science. Une autre présentation est celle, contemporaine, d'Augustin COURNOT : "*elle se développe dans le contexte d'une science de l'empirie déjà très avancée dans les domaines mécanique et physique, et dominée, aux yeux de COURNOT lui-même, par une mathématique lagrangienne puissante et novatrice.*"[63]

c) Le hasard-rencontre chez COURNOT

Le hasard, pour COURNOT, ne se réduit ni au surgissement imprévu et inconditionné d'un effet sans cause, ni à une appréhension subjective résultant de notre ignorance des causes de l'événement : le hasard désigne chez COURNOT la rencontre accidentelle et imprévisible entre plusieurs séries de faits ou de causes indépendants. C'est la fameuse image de la tuile qui tombe sur le passant. Il est possible d'expliquer de manière rationnelle, le déplacement du passant, les lois physiques relatives à la chute des corps, mais il n'est pas possible d'expliquer la rencontre de ces séries causales[64]. On

60 - ARISTOTE, op. cit., p.197a

61 - ARISTOTE, op. cit., p.197b

62 - ARISTOTE, op. cit., résumé du livre II, p.54

63 - G. G. GRANGER, op. cit., p.171

64 - À moins que le trajet du passant et la chute de la tuile n'aient une cause commune : si un vent violent entraîne la chute d'une tuile et la modification du trajet du passant, peut-on encore parler d'indépendance ?

appelle hasard, avec COURNOT, la rencontre de deux séries causales : "*Les événements amenés par la combinaison ou la rencontre d'autres événements qui appartiennent à des séries indépendantes les unes des autres, sont ce qu'on nomme des événements fortuits ou des résultats du hasard.* "[65] Ce qui fait la fortuité n'est pas l'absence de détermination, ou son ignorance, mais l'absence de nécessité dans la conjonction des déterminations. En ce sens, un événement peut être le produit d'un ensemble de causes qui le déterminent, tout en étant fortuit dès lors qu'il n'est pas nécessaire.

Un exemple emprunté à Milan KUNDERA dans *L'insoutenable légèreté de l'être* illustre parfaitement cette conception du hasard. "*Sept ans plus tôt, un cas difficile de méningite s'était déclaré* ***par hasard*** *à l'hôpital de la ville où habitait Teresa, et le chef de service où travaillait Thomas avait été appelé d'urgence en consultation. Mais,* ***par hasard****, le chef de service avait une sciatique, il ne pouvait pas bouger, et il avait envoyé Thomas à sa place dans cet hôpital de province. Il y avait cinq hôtels dans la ville, mais Thomas était descendu* ***par hasard*** *dans celui où travaillait Tereza.* ***Par hasard****, il avait un moment à perdre avant le départ du train et il était allé s'asseoir dans la brasserie. Tereza était de service* ***par hasard*** *et servait* ***par hasard*** *la table de Thomas. Il avait donc fallu une série de six hasards pour pousser Thomas jusqu'à Tereza, comme si, laissé à lui-même, rien de l'y eût conduit.* "[66]

Un autre exemple est tiré de l'œuvre d'Alfred de MUSSET, *Les confessions d'un enfant du siècle*. Pendant un souper, Octave fait tomber par mégarde (donc accidentellement) une fourchette sur le sol. Lorsqu'il se baisse pour la ramasser, il découvre que sa belle maîtresse dont les regards rêveurs lui semblaient témoigner de l'attente nostalgique de leur solitude de fin de soirée, a tendrement enlacé de ses jambes celles de son voisin de table, qui est son meilleur ami…

On peut s'interroger sur ce qui rapproche ou distingue la conception du hasard chez ARISTOTE et chez COURNOT. Selon G. G. GRANGER, si le sens cosmique et ontologique des conceptions aristotélicienne et cournotienne du hasard est identique, il faut noter que la conception cournotienne s'ouvre sur le calcul des probabilités et se prolonge en une véritable philosophie de l'histoire[67]. La philosophie de l'histoire de COURNOT se donne en effet pour

65 - A.A. COURNOT, *Essai sur les fondements de la connaissance et sur les caractères de la critique philosophique*, Hachette, 1ère édition en 1851, p.52

66 - M. KUNDÉRA, *L'insoutenable légèreté de l'être*, NRF Gallimard, 1984, p.49-50

67 - G. G. GRANGER, op. cit., p.174

objet “ *l’analyse et la discussion des causes ou des enchaînements de causes qui ont concouru à amener les événements dont l’histoire offre le tableau ; causes qu’il s’agit surtout d’étudier au point de vue de leur indépendance ou de leur solidarité.*”[68] Pour COURNOT, la critique historique vise à identifier, dans le mouvement historique, la part respective du fortuit et du nécessaire, de l’essentiel et de l’accidentel, pour dégager, sous le détail des événements et dans la multiplicité des facteurs qui les engendrent, les causes profondes qui en rendent raison. Comme le souligne Thierry MARTIN, “*le but que COURNOT assigne à la philosophie historique est moins de mettre au jour les causes des faits historiques que de les ordonner, de les hiérarchiser pour discerner parmi ces causes celles qui sont déterminantes. Il s’agit de démêler dans le spectacle de l’histoire, sous l’exubérance des événements plus ou moins fortuits et accidentels, les grandes lignes de force, les tendances générales qui en permettent l’intelligibilité. Ce partage exige que l’on distingue entre les causes immédiates et souvent accidentelles responsables de ce que l’événement a de singulier des conditions déterminantes qui rendent raison de ses propriétés, et par là, en permettent l’intelligibilité.*”[69]

Soulignons enfin, au sujet de la distinction entre ARISTOTE et COURNOT, que COURNOT pense dans un contexte scientifique où l’explication finaliste n’est plus dominante et où le hasard est mathématisé.

5.2. Le hasard généré

Considérons un cube : si on le lance une douzaine de fois, on obtient douze résultats identiques, le cube s’immobilisant chaque fois une face tournée vers le haut. Il s’agit d’un résultat prévisible et non aléatoire. Inscrivons les chiffres de 1 à 6 sur les faces de ce cube et renouvelons l’expérience. Le lancer de ce cube, devenu dé, produit une nouvelle classe de résultats imprévisibles : le chiffre associé à la face qui est tournée vers le haut. Le hasard apparaît par le simple fait d’écrire des chiffres sur un cube. Une symétrie « naturelle » a été brisée. Que le cube soit ou non un dé, ses faces restent équivalentes du point de vue de la dynamique du système : aucun paramètre du mouvement ne peut être corrélé à la position d’une face particulière. Lorsque le cube devient dé, lorsque nous lisons un résultat différent sur chaque face, nous élargissons le système expérimental en lui

68 - A. A. COURNOT, *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes, œuvres complètes*, tome IV, Paris, Vrin, 1973, p.10

69 - T. MARTIN, *Histoire et théorie du hasard à l’âge classique selon COURNOT*, Revue de Synthèse, n°2-3, 2001

affectant une nouvelle structure de signification. Ce système acquiert dès lors la propriété de générer des résultats qui sont non corrélés avec les causes qui les ont directement produits. Nous lançons un dé mais la Nature fait tourner un cube : c'est de cette propriété, repérée et exploitée comme telle, que jaillit le hasard. Six faces équivalentes associées à six significations différentes « génèrent » le hasard. On pourrait ainsi multiplier les exemples d'élaboration humaine de « générateurs de hasard », pour les jeux, le plaisir ou l'arnaque ! Ils relèvent de l'application de différences observables à des objets équivalents du point de vue de leurs apparitions possibles et imprévisibles.

5.3. Le prélèvement « au hasard » dans une population

Intéressons-nous au hasard tel qu'il est présenté dans l'enseignement secondaire des probabilités. Dans ce cadre, l'expression « au hasard » apparaît comme un indicateur sémantique, synonyme d'équiprobabilité et de distribution uniforme. Considérons ainsi l'énoncé suivant, extrait d'un sujet d'examen du BTS des secteurs de l'Industrie, du Bâtiment et du Laboratoire en 1998. " Une étude statistique permet d'admettre que, pour un rivet « choisi au hasard » dans la production d'une journée, la probabilité de l'événement A, « le rivet possède un défaut de diamètre » est P(A) = 0,02 et la probabilité de l'événement B, « le rivet possède un défaut de longueur » est P(B) = 0,03. "[70] Ainsi le tirage « au hasard » d'un élément d'un ensemble sous-entend l'hypothèse d'équiprobabilité, c'est-à-dire que tous les éléments ont des chances égales d'être tirés. Pour Jean Claude GIRARD, le sens implicite d'équiprobabilité, attribué à l'expression « choix au hasard » est arbitraire et mériterait d'être précisé car "*il y a d'autres façons de « choisir au hasard », voir par exemple les différentes méthodes de sondages à deux degrés (ou plus), avec probabilités égales ou inégales, les sondages stratifiés, etc.*"[71] Cette exigence a cependant été prise en compte dans un certain nombre de manuels scolaires, dont la publication est antérieure à la remarque de J.C. GIRARD, comme l'atteste la citation suivante : "*Dans les différentes situations qui donnent lieu à l'étude de la probabilité d'un événement, la locution « au hasard » est utilisée pour exprimer que la probabilité est uniforme, c'est-à-dire que les événements élémentaires sont équiprobables.*"[72]

70 - Source : ANNATEC FOUCHER 2000, BTS, Secteurs de l'Industrie, du Bâtiment et du Laboratoire, Mathématiques Groupements A, B, C, D ; éditions Foucher, 1999, p.237

71 - J.C. GIRARD, Qu'est-ce qu'une expérience aléatoire, in *Enseigner les probabilités au lycée*, IREM de Reims, 1997, p.61

72 - *Mathématiques, Premières* A_1 *et B*, éditions Bréal, 1991, p.77

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Soulignons enfin que, dans cette manière d'appréhender le hasard - qui sert de fondement à l'enseignement actuel du calcul des probabilités - ce n'est pas tant du hasard dont il est question mais de « choix au hasard » dans une population statistique et dans des conditions qui peuvent être reproduites un certain nombre de fois. Notons que dans cet enseignement, on reste très « discret » sur les conditions concrètes dans lesquelles un tel prélèvement « au hasard » peut-être effectué, se limitant à quelques générateurs de hasard simples : urnes, dés, cartes, pièces, nombres pseudo-aléatoires produits par ordinateur.

5.4. Le hasard radical

a) Le hasard-créateur chez LUCRÈCE

LUCRÈCE a repris les théories de DÉMOCRITE et d'EPICURE selon lesquelles l'univers est formé de corps et de vide et où tout s'explique par des causes matérielles. Dans ce cadre, les éléments premiers de la matière, les atomes, réalités indestructibles et insécables, se distinguent les uns des autres, notamment par leur masse. Pour DÉMOCRITE, nous l'avons rappelé, l'agitation des atomes dans le vide est incessante et ce sont les rencontres d'atomes qui produisent les réalités complexes, les mondes, dont nous constatons l'existence. Le problème qui a alors été posé est le suivant : si les atomes sont emportés de haut en bas en ligne droite à travers le vide en vertu de leur poids propre, comment peuvent-ils se rencontrer ? ÉPICURE (avant LUCRÈCE semble-t-il) a alors attribué aux atomes la propriété de déclinaison, en grec parenklisis, en latin le *clinamen*. Ainsi, sans qu'il n'y ait aucune cause, il existerait une très légère déviation des atomes qui leur permettrait de quitter insensiblement la verticale. Le *clinamen* est la déviation de la ligne de chute des atomes qui s'éloignent de la trajectoire verticale qu'ils devraient suivre. Pour ÉPICURE et son disciple LUCRÈCE, ce processus physique se passe de toute intervention divine et de toute Providence et obéit à un devenir. Cette déviation va générer des rencontres : le plus souvent il ne va rien se produire, les atomes, compte tenu de leurs formes différentes ne vont pas se combiner, mais parfois, et de façon imprévisible, les choses vont se composer et générer un monde. "*Dans la chute en ligne droite qui emporte les atomes à travers le vide, en vertu de leur poids propre, ceux-ci, à un moment indéterminé, s'écartent tant soit peu de la verticale, juste assez pour qu'on puisse dire que leur mouvement soit modifié. Sans cette déclinaison, tous, comme des gouttes de pluie, tomberaient de haut en bas à travers les profondeurs du vide ; entre eux nulle collision n'aurait pu naître, nul choc se produire ; et jamais la nature n'eût été*

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

créée."[73] Dans la mesure où ce qui se produit est sans lien avec une quelconque causalité, dans la mesure où la déclinaison est physiquement nécessaire, on est ici en présence d'un hasard-radical. Pour ÉPICURE et LUCRÈCE, ce n'est pas un postulat mais une évidence : le monde est dépourvu de causalité divine et la nature, libérée de la Providence, se trouve régie par le hasard et la nécessité. Ainsi, les épicuriens ajoutent au hasard-rencontre de DÉMOCRITE le hasard-créateur qui est un hasard-radical. Se pose alors la question de savoir comment la raison peut admettre le hasard radical, dont une des caractéristiques est l'absence de causes et comment se fait-il que les épicuriens aient admis le *clinamen* ? La réponse à cette question réside dans le fait que les épicuriens font les hypothèses justes nécessaires pour expliquer ce qu'ils voient : leur problème est d'expliquer le monde, d'expliquer par exemple la spontanéité du mouvement des animaux, la liberté de l'homme… Les épicuriens ont donc été amenés à faire cette supposition parce que, s'ils ne la faisaient pas, il y aurait un grand nombre de choses inexplicables… En ce sens, le hasard-radical est une notion rationnelle de leur point de vue.

Il reste à préciser la différence entre le point de vue des épicuriens et celui d'ARISTOTE. Pour DÉMOCRITE et les épicuriens, le hasard est l'essence même de la créativité de la nature. Pour ARISTOTE, la nature se caractérise par des constantes, et si parfois le hasard engendre quelques accidents, cela demeure exceptionnel et non essentiel. Enfin, chez ARISTOTE il y a une finalité alors que pour DÉMOCRITE, ÉPICURE, LUCRÈCE, il y a absence de finalité comme le souligne Marcel CONCHE : "*Toutes choses dans la nature se font sans dessein, aucun plan ne les précède, aucune intelligence ne les dirige. Aussi ne sont-elles concevables qu'après avoir été. Ce dont le finalisme et le providentialisme ne peuvent rendre compte, c'est de cette conception des choses. Ils se donnent toujours l'avenir d'avance - comme si la nature n'était qu'une exécutante et non un champ d'initiatives. Ils escamotent le temps, alors que celui-ci n'a de réalité que par les événements même et qu'il faut attendre pour savoir ce qui va arriver.*"[74]

b) Le hasard radical et la physique quantique

La physique quantique repose sur un certain nombre de postulats qui ont longtemps rebuté nombre de physiciens de formation classique. La physique quantique, qui n'a jamais été mise en défaut par aucune expérience, permet d'interpréter et de prévoir une multitude de phénomènes. Elle permet notamment de calculer l'énergie d'ionisation d'un atome, la longueur

73 - LUCRÈCE, *De la Nature*, Livre II

74 - M. CONCHE, *Lucrèce*, éditions de Mégare, 1996, p.56

d'onde de ses raies d'émission, l'énergie de liaison d'une molécule d'hydrogène, de comprendre la radioactivité, l'origine du magnétisme, de la supraconductivité, de prévoir l'existence de nouvelles particules. Les applications technologiques liées à la physique quantique sont nombreuses : les semi-conducteurs, les lasers, la microscopie électronique, l'iconoscope (appareil de prise de vues pour la télévision), le télescope infrarouge, la résonance magnétique nucléaire…

La physique quantique introduit le hasard-radical, ce qui signifie que le caractère aléatoire est un caractère naturel des phénomènes micro-physiques (physique des atomes, des noyaux et des particules élémentaires). Cependant, pour Albert EINSTEIN, cette théorie est incomplète car "Dieu ne joue pas aux dés". Pour EINSTEIN, proche sur ce point des conceptions de LAPLACE, la physique est déterministe. À l'opposé d'HEISENBERG, et de son principe d'incertitude, EINSTEIN est convaincu que la position et la quantité de mouvement d'une particule élémentaire peuvent exister réellement et simultanément : il considère la physique quantique comme incomplète et devant être dépassée. Pour EINSTEIN, une théorie physique ne peut-être qu'une représentation déterministe et complète de la réalité d'un phénomène faisant intervenir des variables connues, observables et un certain nombre d'autres variables, pour le moment inconnues, appelées « variables cachées ». Pour EINSTEIN, dans l'ignorance actuelle des « variables cachées », le comportement de la matière, au niveau de l'infiniment petit, apparaît arbitraire et les physiciens sont contraints d'utiliser, pour le décrire, une théorie incomplète et probabiliste qui est la physique quantique. Pour BOHR au contraire, une théorie physique n'a de sens que si elle met en relation des théories observables et en ce sens, la physique quantique, qui décrit correctement l'ensemble du comportement observable des particules élémentaires est une théorie complète.

Dans le cadre conceptuel de la physique quantique, les physiciens ont démontré que pour que les particules élémentaires possèdent certaines propriétés, il est nécessaire de renoncer à la thèse d'EINSTEIN selon laquelle il existe des variables cachées que l'on ne peut pas connaître actuellement mais que l'on connaîtra peut-être un jour… Certains physiciens continuent cependant d'adhérer à l'idée que le hasard est la limite de nos connaissances et qu'un jour, lorsque la science aura terminé son travail, « le hasard sera aboli ». Il semble que cette idée soit aporétique, les physiciens BOHR, SOMMERFELD, HEISENBERG, DIRAC, PAULI, EHRENFEST, SCHRÖDINGER, De BROGLIE, ayant largement attesté du contraire. Ainsi, le comportement des particules élémentaires est probabiliste et le hasard est dans l'essence même des phénomènes. Pour la microphysique, le hasard est radical. Notons enfin que c'est la conception radicale du hasard, repérée par les épicuriens, qui se retrouve être le concept unificateur de la physique quantique…

Nous avons examiné comment l'esprit humain aborde et construit, la notion de hasard : nous proposons de compléter cette présentation du concept de hasard en nous inspirant de la réflexion de Dominique LAHANIER-REUTER[75] qui s'est elle-même inspirée des travaux de Benoît MANDELBROT.

6. Les conceptions du hasard : catégorisation dans l'approche mathématique contemporaine

Dominique LAHANIER-REUTER identifie cinq conceptions du hasard dans le monde mathématique contemporain et les décrit en distinguant les différents cadres (l'arithmétique, l'analyse, la théorie de l'information) dans lesquels les outils de modélisation ont été choisis. Il s'agit du « hasard du tirage au sort », du « hasard bénin », du « hasard sauvage », du « hasard lent »et du « hasard formel ». Cette dénomination est propre à D. LAHANIER-REUTER en ce qui concerne le « hasard du tirage au sort » et le « hasard formel » ; elle est celle de Benoît MANDELBROT[76] pour le « hasard bénin », le « hasard sauvage », le « hasard lent ».

6.1. Cadre arithmétique : le « hasard du tirage au sort »

Il concerne la modélisation des phénomènes aléatoires discrets, dont l'observation peut être reproduite. Les situations modélisées sont des situations de jeux de hasard où le hasard évoqué ne fait l'objet d'aucune définition mathématique. Il est une des règles du jeu et doit être reconnu comme tel par les joueurs qui s'engagent, a priori. Le « hasard du tirage au sort » transforme une situation initiale d'équité, d'indifférenciation absolue entre les joueurs - toutes les chances sont identiques - en une situation finale où les joueurs sont différenciés en gagnants et perdants. Il est défini à partir d'une catégorisation des jeux et s'oppose ainsi à ceux qui sont basés sur une différenciation des joueurs due à leurs habilités ou à leurs mérites.

75 - D. LAHANIER-REUTER, *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités statistiques*, PUF, 1999

76 - B. MANDELBROT, *Fractales, hasard et finance*, édition Champs Flammarion, 1997, p.58-74

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Dominique LAHANIER-REUTER dresse la liste de ses principales caractéristiques : "*Il s'agit d'un hasard défini conventionnellement, mobilisable à volonté, qui permet de séparer un passé où tous les joueurs ont le droit à la même espérance et un futur où l'inégalité entre joueurs est irréversible. Les effets possibles de l'intervention du hasard sont en nombre fini et peuvent être entièrement décrits, par des outils empruntés à l'arithmétique.*"[77]

6.2. Le « hasard bénin », « sauvage » ou « lent »

Afin de pouvoir caractériser d'autres conceptions du hasard, Dominique LAHANIER-REUTER est contrainte de sortir du cadre de l'arithmétique et d'investir celui de l'analyse mathématique ce qui nécessite l'énoncé des « théorèmes limites ». Une fois ces théorèmes exposés, il est alors possible de classer les phénomènes aléatoires et les hasards dont ils dépendent, selon que les conditions de conformité aux hypothèses des « théorèmes limites » sont parfaitement remplies, ne sont pas remplies ou sont asymptotiquement remplies.

On peut considérer deux sortes de « théorèmes limites » qui sont regroupés sous l'appellation « lois des grands nombres » et « théorème limite central ».

Rappelons que la loi faible des grands nombres, due sous sa forme la plus élémentaire à Jakob BERNOULLI, énonce que lors de la répétition n fois d'une même expérience aléatoire comportant deux issues (une issue dite « succès » de probabilité p ou une issue dite « échec » de probabilité $1 - p$), la probabilité que la fréquence F_n des succès s'écarte de p de plus d'un nombre ε donné, est aussi petite que l'on veut pourvu que n soit assez grand : on dit que F_n converge en probabilité vers p. Le cas le plus simple est celui du lancer d'une pièce de monnaie : la « loi faible des grands nombres » assure que, plus le nombre de lancers est important, plus on a de chances que la fréquence d'apparition de pile soit proche de 1/2. Soulignons que ce théorème permet de faire le lien entre la statistique et les probabilités : il justifie le fait d'estimer la probabilité p d'un événement par sa fréquence statistique f_n observée sur un grand nombre d'expériences. Remarquons, avec Alfred RÉNYI, qu'il n'y a nul « cercle vicieux » à estimer la probabilité d'un événement par sa fréquence relative : "*Pour finir faisons quelques remarques de principe sur la loi*

77 - D. LAHANIER-REUTER, op. cit., p.10

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

des grands nombres de BERNOULLI. Lors de l'introduction du concept de probabilité, nous avons assigné une probabilité à des événements dont la fréquence relative, au cours d'une longue série d'épreuves, manifestait une certaine stabilité. Ce fait, la stabilité de la fréquence relative, vient d'être démontré mathématiquement. Il est remarquable que la théorie rende possible une description précise de cette stabilité ; cela témoigne sans aucun doute en faveur de sa puissance. Il semblerait qu'il s'agisse alors d'un « cercle vicieux ». Nous avons en effet défini la probabilité grâce à la stabilité de la fréquence relative, mais d'autre part la notion de probabilité intervient pour caractériser cette stabilité. En réalité, il s'agit pourtant de deux choses entièrement différentes. La « définition » de la probabilité comme valeur autour de laquelle oscille la fréquence relative n'est pas une définition mathématique mais une description du substrat concret du concept de probabilité. La loi des grands nombres de BERNOULLI par contre est fondée sur la « définition mathématique » de la probabilité et par conséquent il n'y a là aucun cercle vicieux."[78]

La loi forte des grands nombres, due à Émile BOREL, énonce que la probabilité que la suite numérique des fréquences effectivement obtenues f_n ne tende pas vers p est nulle : la convergence est presque sûre.

Le théorème limite central (car central dans la théorie), dû à MOIVRE et à LAPLACE, peut être énoncé élémentairement de la manière suivante : dans l'exemple précédent, la loi de la fréquence F_n des succès qui vont se présenter quand on répète n expériences de BERNOULLI, est approchée - pour n assez grand[79] - par une loi normale[80] de moyenne p et de variance $\dfrac{p\,(1-p)}{n}$.

Selon Benoît MANDELBROT, ces « théorèmes limites » permettent alors de discriminer trois types de hasard (le « hasard bénin », le « hasard sauvage », le « hasard lent ») engendrés par l'obéissance stricte, la non-obéissance ou la pseudo obéissance à ces théorèmes.

a) Le « hasard bénin »

Le hasard dit « bénin » est celui qui caractérise les phénomènes qui obéissent strictement aux « théorèmes limites ». Il s'agit du hasard usuel,

78 - A. RÉNYI, *Calcul des Probabilités*, réédition J. Gabay 1992, p. 144.

79 - $n > 50$

80 - dite aussi de LAPLACE-GAUSS

modélisé par exemple par les jeux de hasard. Dominique LAHANIER-REUTER livre ses principales caractéristiques : "*Ce hasard est reproductible, une séquence finie peut accumuler les variations, peut sembler n'obéir à aucune loi. Par contre, si le nombre d'épreuves devient suffisamment grand, des lois, des régularités apparaissent.*"[81] D'autre part la dispersion des variations autour de la moyenne tend à suivre une loi normale. Dans le cas du « hasard bénin », les effets extraordinaires sont donc très peu probables. Une spécificité du « hasard bénin » est son adéquation aux sciences physiques comme l'illustre l'exemple de la théorie cinétique des gaz où les phénomènes aléatoires considérés sont les vitesses et les positions instantanées des molécules d'un certain volume de gaz.

b) Le « hasard sauvage » et le « hasard lent »

Si le "hasard bénin" se caractérise par une obéissance stricte aux théorèmes limites, d'autres types de hasard vont se caractériser par une non-conformité aux hypothèses assurant la validité de ces théorèmes.

Le « hasard sauvage » ou la théorie du chaos. Ce sont des phénomènes dont les moments (espérance mathématique, variance) ne sont pas définis, comme ceux dont l'espérance mathématique est infinie ou bien des phénomènes qui n'obéissent pas au théorème limite central. Le hasard sauvage est souvent un hasard généré par la dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales. Nous l'avons souligné, les phénomènes boursiers, les turbulences, les phénomènes météorologiques relèvent de cette catégorie.

Le « hasard lent » : son comportement paraît sauvage dans le court et le moyen terme, mais à la longue et avec une extraordinaire lenteur, on observe la même régularité que dans le cas du « hasard bénin ».

« Hasard sauvage » et « hasard lent » sont des types de hasard en désaccord avec les projets de la théorie des probabilités : ils ne remplissent pas les conditions d'application des théorèmes, ils sont en quelque sorte « des cas pathologiques ». À l'opposé du « hasard bénin », il ne s'agit plus ici de hasards qui peuvent jouer un rôle d'outil mathématique de modélisation. Comme le souligne D. LAHANIER-REUTER : "*Ils ne s'inscrivent pas dans les cas typiques d'étude, en ce qu'ils interdisent le passage de la connaissance locale*

81 - D. LAHANIER-REUTER, op. cit., p.13

construite à partir d'observations forcément limitées dans le temps, à la connaissance globale du phénomène. Puisqu'ils perturbent le paradigme de la théorie des probabilités, les étudier a constitué une rupture avec l'ancienne théorie et a nécessité la construction de nouveaux champs théoriques, en particulier la théorie du chaos."[82]

6.3. La théorie de l'information : le hasard formel, le hasard quantifié

"La théorie de l'information regarde le monde des possibles comme un monde de symboles, lettres de l'alphabet ou simplement suites de 0 et de 1. Elle permet de définir la quantité d'information apportée par la réalisation d'un événement et celle à attendre d'une expérience. Cette quantité d'information est, en fait, une quantité de hasard. Dès lors, il devient possible de se demander par exemple si une suite de chiffres a été fabriquée « au hasard »."[83] La réponse à cette question formulée par Didier Dacunha-Castelle passe par l'idée de complexité. La notion de complexité est liée, dans le cas de la suite de 0 et de 1, à la fois à son caractère aléatoire (a-t-elle été fabriquée au hasard ?) et à la longueur minimale d'un programme d'ordinateur nécessaire à sa fabrication. On définit la complexité d'un algorithme de calcul comme la quantité d'information nécessaire pour obtenir le résultat du calcul selon un algorithme. On peut alors se poser la question de savoir si l'algorithme est compressible, c'est-à-dire si l'on peut trouver un algorithme moins complexe (c'est-à-dire plus court) qui produit les mêmes résultats. Ainsi, pour une suite de 0 et de 1, à dix chiffres par exemple, l'algorithme général doit spécifier la valeur du chiffre (0 ou 1) pour les dix positions. Cela correspond, d'une manière générale, à 10 choix binaires. Mais parmi toutes les suites de 0 et de 1, la suite 1111111111 peut être spécifiée par un programme court qui s'énonce simplement « dix fois un » et ne mobilise que peu d'information. Si la suite devient irrégulière, comme 1001101110, il apparaît, de manière intuitive, que la compression de l'algorithme général va être difficile. Une suite est dite pseudo-aléatoire lorsqu'il n'est pas possible d'exhiber un algorithme plus simple que celui qui consiste à en donner successivement les valeurs. En ce sens, la suite des décimales du nombre π apparaît comme pseudo-aléatoire bien qu'elle soit entièrement déterminée. Par généralisation, un phénomène aléatoire est un phénomène dont la description ne peut être plus simple que la donnée de tout le phénomène : c'est donc un phénomène qui échappe à une description globale condensée et par là même à toute tentative de prédiction globale.

82 - D. Lahanier-Reuter, op. cit., p.16

83 - D. Dacunha-Castelle, Chemins de l'aléatoire, éditions Flammarion, 1996, p.10-11

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Conclusion

Nous avons abordé la problématique du hasard selon deux “grilles” d'analyse : une d'essence anthropologique et épistémologique, une autre basée sur une catégorisation mathématique à partir de la plus ou moins stricte obéissance à certains théorèmes de la théorie des probabilités. Bien qu'originales, la pertinence et surtout la productivité des catégories exhibées par Benoît MANDELBROT - hasard lent, hasard sauvage - ne semblent pas être encore totalement établies. Soulignons également que le concept de hasard se trouve ici réintroduit dans le discours mathématique qui l'a expurgé notamment grâce à l'axiomatisation.

Après avoir examiné un certain nombre de configurations dans lesquelles rien n'est fortuit, après avoir traité de la nature subjective du hasard dans la vision déterministe, nous avons abordé le hasard dans sa dimension objective. Dans ce cadre, la théorie du hasard-rencontre apparaît comme une théorie descriptive des situations telles que nous les vivons à l'échelle humaine et la théorie du hasard-radical se révèle être une théorie audacieuse dont les implications et les applications, notamment techniques, sont importantes. Le hasard radical n'existerait pas, semble-t-il, au niveau macroscopique, c'est-à-dire comme phénomène se produisant sans cause mais existerait au niveau microphysique, ce qui pose un certain nombre de problèmes philosophiques assez complexes, d'autant qu'un exposé clair et simple de la mécanique quantique est une entreprise difficile et que les problèmes engagés le sont également. Or, si le principe de raison suffisante, comme le pense LEIBNIZ, est un principe universel comment rendre raison de processus microphysiques dominés par le hasard-radical qui est absence de causes ? Ceci amène à interroger le rapport entre hasard et raison : l'existence du hasard-radical ne pose-t-il pas des limites aux ambitions de la raison à tout vouloir expliquer ?

Bibliographie

ARISTOTE, *Physique*, traduction H. CARTERON, Paris, Les Belles Lettres, 1926

G. BACHELARD, *La philosophie du non*, Paris, PUF, édition 1988

H. BERGSON, *Les deux sources de la morale et de la religion*, éditions Félix Alcan, 1932

J. BERNOULLI, *L'Ars conjectandi*, 1713, traduction de N. MEUSNIER, publication de l'IREM de Rouen, 1987

J. BONITZER, *Philosophie du hasard*, Messidor, éditions sociales, 1984

E. BOREL, *Le hasard*, éditions Félix Alcan, 1938

P. BOURDIEU, *Ce que parler veut dire*, éditions Fayard, 1982

M. CONCHE, *Lucrèce*, éditions de Mégare, 1996

A. COURNOT, *Essai sur les fondements de la connaissance et sur les caractères de la critique philosophique*, Hachette, première édition en 1851
A. COURNOT, *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes*, œuvres complètes, tome IV, Paris, Vrin, 1973
A. COURNOT, *Matérialisme, vitalisme, rationalisme*, œuvres complètes, tome V, réédition Vrin, 1979
Dictionnaire historique de la langue française, Le Robert, 1994
D. DACUNHA-CASTELLE, *Chemins de l'aléatoire*, éditions Flammarion, 1996
D. DALMEDICO, Le déterminisme de Pierre-Simon LAPLACE et le déterminisme aujourd'hui, in *Chaos et déterminisme*, collection Points sciences, éditions Le Seuil, 1992
J. DIDEROT, *Jacques le fataliste*, éditions Booking International, Paris, 1993
G. G. GRANGER, *Le probable, le possible et le virtuel,* éditions O. Jacob, 1995
O. HOUDÉ, Le développement de l'intelligence chez l'enfant, in *Qu'est-ce que la vie ? Université de tous les savoirs*, volume 1, éditions O. Jacob, 2000
G. ISRAËL, *La mathématisation du réel*, éditions du Seuil, 1996
M. KUNDÉRA, *L'insoutenable légèreté de l'être*, NRF Gallimard, 1984
D. LAHANIER-REUTER, *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités statistiques*, PUF, 1999
P. S. LAPLACE, *Essai philosophique sur les probabilités*, éditions Bourgois, 1986
J. LAUTREY, *Classe sociale, milieu familial, intelligence*, PUF, 1980
S. LEBOVICI, *Le hasard aujourd'hui*, collection Points sciences, éditions Le Seuil, 1991
L. LÉVY-BRUHL, *La mentalité primitive*, PUF, 1960
J.M. LÉVY-LEBLOND, La science en son miroir, in *Dictionnaire de l'ignorance*, direction M. CAZENAVE, éditions Albin Michel Sciences, 1998
J. LIPSE, *De Constantia libri duo qui alloquium praecipue continent in publicis malis*, Anvers, 1584, traduction L. DU BOIS, 1873
LUCRÈCE, *De la Nature*, Livre II, éditions Les belles lettres, 1972
B. MANDELBROT, *Fractales, hasard et finance*, édition Champs Flammarion, 1997
T. MARTIN, *Probabilités et critique philosophique selon COURNOT*, éditions Vrin, 1997
T. MARTIN, *Histoire et théorie du hasard à l'âge classique selon COURNOT*, Revue de Synthèse, n°2-3, 2001
J. PIAGET, *Six études de psychologie*, éditions Denoël, 1964
J. PIAGET, *Psychologie et pédagogie*, éditions Denoël, 1969
J. PIAGET, *Mes idées, propos recueillis par R.I. EVANS*, éditions Denoël/Gonthier, 1973
J. PIAGET et B. INHELDER, *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, PUF, 1974
H. POINCARÉ, *Calcul des probabilités*, éditions Gauthier-Villars, 1912
D. RUELLE, *Hasard et chaos*, éditions O. Jacob, 1991
A. RÉNYI, *Calcul des Probabilités*, réédition J. Gabay 1992
M. SERRES, *Éclaircissements, entretiens avec B. LATOUR*, PARIS, éditions F. Bourin, 1992
SOPHOCLE, *Œdipe-roi*, Collection du Repertoire de la Comédie française, Création du festival d'Avignon, 1972
G. VERGNAUD, *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?* éditions Hachette, 1994
L. S. VYGOTSKI, *Pensée et langage*, traduction L. SÈVE, 3e édition La dispute, 1997

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

DEUXIÈME PARTIE

MODÉLISATION D'UNE SITUATION ALÉATOIRE

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

INTRODUCTION

Michel HENRY

On peut se demander pourquoi la notion d'expérience aléatoire pose aujourd'hui de nouvelles questions, alors que ce concept est quasiment aussi vieux que le calcul des probabilités. Les expériences aléatoires ont pendant longtemps revêtu ce statut de concept abstrait, seulement là pour évoquer un substrat concret pour l'une des notions premières de la théorie des probabilités telle qu'on l'enseigne à l'Université.

Dans l'enseignement secondaire, pendant longtemps, les probabilités ont été enseignées comme application de la combinatoire, et les expériences aléatoires concernées se limitaient aux « tirages au hasard » dans des urnes ou des jeux de cartes (en exagérant un peu !). Dans les années 70, une esquisse de la théorie probabiliste fut un des objets d'enseignement.

Radicalement opposés à cet objectif, les programmes des classes de première de 1991, puis ceux de 1993, mettent l'accent sur l'observation et la description des expériences aléatoires. Les programmes de seconde de l'an 2000 et de première S de 2001 sont essentiellement fondés sur l'expérimentation et l'approche fréquentiste des lois de probabilités. Ils mettent de ce fait le calcul des probabilités en position de modélisation de problèmes réels, dont on sait la complexité et la difficulté de la mathématisation.

Ainsi, d'un point de vue didactique, il convient de clarifier cette notion d'expérience aléatoire pour que les enseignants puissent s'y retrouver entre ce qu'ils ont appris à l'Université et ce qui est évoqué, plus ou moins confusément, dans les manuels.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Pour approfondir cette question, on est immanquablement amené à séparer la description et l'expérimentation dans des situations concrètes des modèles simplifiés qui permettent de les mathématiser. Cette distinction se révèle maintenant essentielle pour que les élèves s'y retrouvent eux-mêmes et sachent ce qu'on attend d'eux. En termes didactiques, il s'agit de clarifier les éléments des contrats didactiques relatifs aux activités en statistique et probabilités.

De nouveaux outils sont maintenant présents dans les classes, parmi eux des ordinateurs et des calculettes performantes. Ces outils permettent de mieux poser la question de la modélisation du réel par la simulation numérique de situations aléatoires. Des recherches didactiques récentes montrent l'importance de la simulation. Celle-ci prend son sens si l'on dégage la notion de modèle pour cet enseignement.

Pour boucler cette partie, la question de la modélisation en probabilités conditionnelles est développée, question qui reste au programme de terminale. Il fallait en clarifier le modèle et la symbolique à l'intention des enseignants.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

1 - Les enjeux de la modélisation en probabilités

Bernard Dantal

Lors d'une émission télévisée sur les travaux de Paul-Emile VICTOR au Groenland, l'ethnologue Claude LEVI-STRAUSS déclarait :

"*La difficulté pour un ethnologue, c'est d'être à la fois dedans et dehors, il faut qu'il vive pleinement avec les gens dont il veut étudier le mode de vie, mais il faut aussi qu'il se comporte comme un observateur extérieur à eux, sinon il ne fait plus d'ethnologie*".

Il apparaît que l'enseignant de mathématiques dans le second degré se trouve confronté à une difficulté similaire à l'ethnologue, lors de l'enseignement des probabilités. En effet partant d'une observation, puis d'une description de la réalité, par étapes successives, l'enseignant doit aider ses élèves à s'extraire peu à peu de cette réalité pour construire progressivement un modèle mathématique.

Or ces étapes successives posent beaucoup de problèmes à cet enseignant, car il a un pied dans l'observation de la réalité et l'autre dans la construction du modèle.

Souvent il ne sait plus très bien où se situe son enseignement, ce qu'il traduit parfois par la déclaration : "*Les probabilités et les statistiques au lycée, ce n'est pas vraiment des mathématiques*".

Cela pose certaines questions didactiques, notamment :

"- Est-ce que le passage par l'observation de la réalité est nécessaire pour construire le modèle ?

- Ne pourrait-on pas se placer directement dans le modèle au moyen d'axiomes pour l'étudier, puis utiliser ce modèle par la suite dans des descriptions de réalités ?"

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Aujourd'hui on peut répondre, au moins en partie, à ces questions.

En effet, dans le programme de 1972, on avait voulu éviter au niveau du second degré la difficulté de la construction du modèle à partir de l'observation de la réalité. On peut dire que pour le plus grand nombre d'élèves ce choix didactique a conduit au naufrage, car pour eux les contenus d'enseignement n'avaient plus de sens.

Mais, tout aussi grave, le concept de probabilité lui-même perdait son sens et l'on voyait appliquer ce concept à des réalités auxquelles il ne pouvait convenir. Il en reste des traces aujourd'hui encore parfois dans les sujets de baccalauréat…

La démarche suggérée depuis 1991 par les programmes de probabilités du second degré, peut se traduire par le schéma suivant qui synthétise le développement théorique présenté dans les trois dernières parties de ce chapitre, visant la construction du sens pour le plus grand nombre d'élèves :

observation de la réalité	➤	description de la réalité	➤	construction d'un modèle	➤	mathéma-tisation du modèle	➤	interprétation des résultats dans la réalité

Effectivement en choisissant cette démarche, la difficulté importante est de construire des étapes intermédiaires entre l'observation de la réalité et la construction élaborée du modèle mathématique.

Au cours de ces étapes intermédiaires, est-ce que les concepts utilisés peuvent être définis rigoureusement d'un point de vue mathématique ?

C'est la question que nous nous sommes posée au sein de la commission inter IREM concernant le concept probabiliste « **d'expérience aléatoire** ».

Ce concept pose en effet de redoutables questions d'enseignement :

a - Si on le situe au niveau de la description de la réalité, c'est une expérience dont l'observateur ne peut pas prévoir le résultat avec certitude à l'avance.

Par exemple, pour un individu, aller passer un examen ou un concours est-elle une expérience aléatoire ?

On dit souvent dans le langage courant que le résultat d'une telle expérience est dû au hasard, à la « chance ». Mais l'utilisation du mot

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

aléatoire dans un cours de mathématique prend parfois un autre sens pour les élèves. En effet, jusqu'à présent, on n'établissait dans le cours de mathématiques que des résultats sûrs et prouvés, alors qu'une expérience aléatoire apparaît comme quelque chose de peu sûr, qui ne prouve rien, de non signifiant. Pour les élèves, tout est aléatoire dans une telle expérience : les conditions de sa production, son déroulement, ses résultats.

b - Si maintenant on situe ce concept comme première étape de la construction d'un modèle rendant compte objectivement d'une réalité observée (donc qui dépend de l'observateur), alors deux cas sont possibles.

Premier cas :

Pour qu'un observateur décide de décrire une expérience réelle sous le terme d'expérience aléatoire, il faut que d'après les conditions de l'expérience :

1 - Il pense qu'il ne peut pas en prévoir le résultat.

2 - Il pense pouvoir déterminer à l'avance l'ensemble des résultats possibles.

De fait comme dans toute modélisation, il élimine a priori un certain nombre de possibilités qu'il pense être pratiquement impossibles. Tout modèle, à n'importe quelle échelle, est forcément réducteur de la réalité.

3 - Il décide a priori, soit par l'observation des conditions, soit par une contingence totale (approche de Pascal et Fermat dans le problème des partis, position subjectiviste de Laplace), que tous les résultats possibles sont également probables.

Remarques sur ce premier cas :

1 - C'est une modélisation qui rend bien compte a posteriori de la réalité dans les cas facilement reproductibles des jeux de « hasard » où les issues sont symétriques, c'est à partir de cette remarque que Pascal a introduit les termes de *"géométrie du hasard"*.

2 - Malheureusement ce modèle est restrictif, car il faut pouvoir déterminer a priori l'ensemble des résultats possibles, il est d'autre part inadapté pour décrire la réalité lorsque les issues de l'expérience ne se ramènent pas à un système de cas équiprobables.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

3 - Cette approche conduit à la définition de Fermat et de Laplace de la probabilité avec la formule :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Deuxième cas :

Pour qu'un observateur décide de décrire une expérience réelle sous le terme d'expérience aléatoire, il faut que, d'après les conditions de l'expérience :

1 - Il pense qu'il ne peut pas en prévoir le résultat,

2 - Il pense qu'il peut reproduire l'expérience un grand nombre de fois dans des conditions « semblables ». (Il dit alors qu'il recommence la même expérience.)

Remarques sur le deuxième cas :

1 - La définition du mot « semblable » doit être précisée.

2 - Pour un observateur, des conditions sont semblables lorsqu'il décide que les variations des conditions qu'il ne prend pas en compte ne modifient pas le caractère de l'expérience.

3 - C'est l'œuvre historique de Jacques Bernoulli, *Ars Conjectandi*, qui a conduit à la loi des grands nombres. Cette loi est en quelque sorte la validation essentielle du modèle probabiliste, elle est grandement utilisée aujourd'hui pour modéliser tous les domaines de la réalité, fondant l'approche fréquentiste de la notion de probabilité.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

2 - Qu'est-ce qu'une expérience aléatoire ?

Jean-Claude Girard

A - L'idée de hasard

Aléatoire, *adj. : Que rend incertain, dans l'avenir, l'intervention du hasard.*
(Dictionnaire Robert)

Dans le sens commun, une épreuve aléatoire est donc simplement une expérience dont on ne peut ni prévoir, ni calculer le résultat. C'est le contraire d'une expérience déterministe, comme on en rencontre en physique, pour laquelle on peut déterminer ce qui va arriver si l'on connaît parfaitement les conditions initiales.

C'est donc le fait que l'on ne puisse pas prévoir les résultats, même si on répète l'expérience une deuxième fois « dans les mêmes conditions » qui rend cette expérience aléatoire.

Mais, que signifie « dans les mêmes conditions » ?

Dans une expérience concrète, physique, réelle, on n'a jamais exactement « les mêmes conditions » parce que les conditions initiales ne sont jamais exactement identiques. Par exemple, quand on lance un dé, on ne peut le lancer deux fois du même endroit, avec la même vitesse et la même direction et de toute façon pas en même temps, sauf à avoir deux dés et alors les conditions ne sont pas les mêmes pour les deux dés (équilibre, symétrie, poids et de nouveau, vitesse, direction etc.). Des changements, même imperceptibles entre les deux expériences (sur l'une au moins de ces conditions), conduiront à des résultats différents. C'est la manière dont Poincaré[1] définit, dans certains cas, le hasard : la grande sensibilité aux conditions initiales.

1 - Henri POINCARE, *Science et méthode*, Editions Flammarion, Paris, 1908.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

En ce sens, la réussite à un examen, le temps qu'il fera demain, la détermination du sexe d'un bébé sont des phénomènes (réels) aléatoires, c'est-à-dire dont le résultat est dû en partie au hasard même si le hasard qui intervient n'est pas toujours clairement identifiable.

Mais comment appréhender ce hasard ?

- Est-ce la rencontre de deux séries causales indépendantes (au sens d'Aristote ou de Cournot) ?

- Est-il dû à la complexité d'un système qui le rend très sensible aux conditions initiales (au sens de Poincaré) ?

- N'est-il que le reflet de notre ignorance (au sens de Laplace) ?

Certaines de ces expériences réelles peuvent être décrites, et leurs effets possibles étudiés, par des outils mathématiques (fonctions, ensembles, etc). Par exemple les résultats obtenus à partir des lois de Mendel (modèle génétique) sont en accord avec les fréquences d'apparition de certains gènes.

B - Expérience aléatoire réelle ou modèle ?

Une expérience aléatoire mathématique, c'est-à-dire un modèle d'expérience aléatoire doit vérifier les trois points suivants :

La description des conditions de l'expérience détermine celle-ci de façon précise et suffisante pour en garantir l'unicité (en regard de l'objet d'étude).

On n'aura donc aucun problème pour « répéter » cette expérience **fictive** dans les mêmes conditions. On pourra ainsi considérer que des expériences reproduites dans les conditions précisées relèvent de la même description, autorisant à dire que l'on répète la même expérience.

La plupart du temps certaines hypothèses faites à partir de l'observation d'expériences réelles restent implicites. Quand on lance un dé, on sous-entend : à six faces, équilibré, sans tricher etc. ce qui permet de prendre un modèle qui attribue une même probabilité à chacune des faces (sinon on ne saurait quel modèle prendre).

Que signifie, dans un énoncé, « **choisir au hasard** » ? Il faut souvent considérer cette expression comme un synonyme de tirage au sort avec la même probabilité pour tous les individus de la population mais il y a d'autres façons de « choisir au hasard », voir par exemple les différentes méthodes de sondages à deux degrés (ou plus), avec probabilités égales ou inégales, les sondages stratifiés, etc.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Les hypothèses devraient être explicites (autant que possible) dans une expérience aléatoire mathématique.

Comme tout modèle, cette expérience idéale représente plus ou moins bien la réalité.

On peut déterminer l'ensemble des issues possibles.

Cet ensemble E est lié à l'usage que l'on veut faire du modèle choisi. Par exemple, si on lance une pièce, on prend généralement E = {Pile, Face} en éliminant la possibilité pour la pièce de tomber sur la tranche, d'être désintégrée ou satellisée ! L'ensemble E = {Pile, Face} suffit pour modéliser la réalité.

Lancer une pièce n'est pas une épreuve aléatoire en soit. On a la certitude (dans des conditions normales) qu'elle va retomber. La considération de l'épreuve aléatoire nécessite que l'on sache à quoi l'on s'intéresse.

Au sens commun, l'arrivée du tiercé est aléatoire. Elle peut être modélisée par le tirage d'un arrangement de trois chevaux parmi ceux qui sont au départ. Dans la réalité, et dans le modèle, on peut attribuer (de façon subjective) à chacun une probabilité de gagner qui est donnée par sa cote. L'ensemble des résultats possibles est donc l'ensemble des arrangements possibles et l'on peut alors calculer la probabilité de chacun. On peut aussi, pour le même tiercé s'intéresser au temps du vainqueur, et alors E est un intervalle de $\mathbb{R}$.

On ne peut ni prévoir ni calculer le résultat de l'expérience.

On dira que c'est l'intervention du hasard (sans avoir besoin de le définir d'avantage) qui empêche de pouvoir déterminer, parmi les résultats possibles, celui qui se réalisera lors d'une exécution de l'expérience dans les conditions fixées. Avec les mêmes conditions initiales, on n'obtient pas toujours les mêmes résultats.

C - Où la notion de modèle devient incontournable

D'après David RUELLE[2], "*un modèle consiste à coller une théorie mathématique sur un morceau de réalité. Pour certains de ces morceaux de réalité, il existe des idéalisations qui font intervenir les probabilités. On s'intéresse à ces idéalisations parce qu'elles sont utiles.*"

2 - David RUELLE, *Hasard et Chaos*, Editions Odile Jacob, Paris, 1991.

Il y a donc souvent confusion entre modèle et réalité, entre expérience aléatoire réelle et expérience aléatoire mathématique. La plupart du temps, les expériences aléatoires des cours de probabilité sont des expériences mathématiques, tandis que les expériences aléatoires évoquées dans les exercices d'application ou de baccalauréat sont des expériences aléatoires réelles.

"Les sciences n'essayent pas d'expliquer ; c'est tout juste si elles tentent d'interpréter ; elles font essentiellement des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, à l'aide de certaines interprétations verbales, décrit les phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique réside uniquement et précisément dans le fait qu'elle est censée fonctionner." John VON NEUMANN[3].

Par exemple, lorsque l'on fait un test d'hypothèses, on accepte le modèle présupposé c'est-à-dire l'hypothèse suivant laquelle on est dans les conditions d'une certaine épreuve aléatoire, par exemple "l'échantillon est extrait d'une population de moyenne m" jusqu'à ce qu'une valeur de la moyenne d'échantillon trop improbable (dans l'hypothèse considérée) nous fasse rejeter le modèle.

Il est à remarquer que les probabilités sont largement déterminées par l'expérience aléatoire (mathématique) que l'on prend pour modèle. En fait, **elles font partie du modèle choisi.** Par exemple, dans le paradoxe de Bertrand[4], les différentes manières de choisir la corde "au hasard" donnent des résultats différents pour les probabilités[5].

De même, dans l'exemple du test ci-dessus, une valeur peut être jugée trop grande parce que sa probabilité d'apparition est trop petite dans le modèle lié à l'hypothèse testée.

En ce sens une simulation, informatique ou non, ne démontre rien, pas plus qu'une figure en géométrie, car les probabilités sont déterminées par le modèle employé pour la programmation. Une simulation consiste à remplacer une épreuve aléatoire réelle par une autre épreuve physique (généralement pseudo-aléatoire !) basée sur un modèle dont on pense qu'il représente bien la réalité de la première expérience. La simulation illustre et montre les conséquences de ce modèle, ce qui n'est déjà pas si mal !

---

3 - Cité par James GLEICK, *La théorie du chaos*, Editions Albin Michel, Paris, 1989.

4 - On trouvera une présentation de ce paradoxe célèbre dans l'article de Michel HENRY et Henri LOMBARDI : *Paradoxes et lois de probabilités* paru dans Repères-IREM n° 13 octobre 1993.

5 Voir par exemple, Gilbert Saporta, *Probabilités, analyse des données et statistiques*, Editions Technip, Paris, 1990.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

3 - UN EXEMPLE DE CONFUSION MODÈLE-RÉALITÉ

Jean-Claude GIRARD

Un domaine des mathématiques dans lequel il paraît indispensable de parler de modélisation est bien celui des probabilités. Dans la pratique, modèle et réalité sont si intimement liés qu'il est difficile de démêler l'un de l'autre. Voici, par exemple, le sujet national du Baccalauréat 1995, série ES, (exercice de spécialité) :

Un boulanger fabrique des pains de campagne qui doivent peser, en théorie, 600 grammes.

On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur les poids possibles des pains de campagne, exprimés en grammes et arrondis à 10 grammes près.

Le tableau suivant indique la probabilité p_i de l'événement $X = x_i$.

$X = x_i$	580	590	600	610	620
p_i	0,12	0,25	0,32	0,27	0,04

Exemple de lecture : la probabilité qu'un pain choisi au hasard pèse 590 grammes est 0,25.

1 - Calculer l'espérance mathématique de X et l'écart type de X.

2 - Un client achète un pain de campagne. Quelle est la probabilité que son pain pèse au moins 600 grammes ?

3 - Un contrôleur du service la répression des fraudes entre dans la boulangerie et prélève, au hasard, dix pains de campagne.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

a - Quelle est la probabilité d'avoir exactement trois pains de 580 grammes ?

b - Quelle est la probabilité d'avoir au moins un pain de 580 grammes ?

c - Quelle est la probabilité d'avoir au plus un pain de 580 grammes ?

On donnera les valeurs exactes puis des valeurs décimales approchées à 10^{-4} *près.*

Dès la première phrase, on mélange une expérience réelle (un boulanger fabrique des pains) et une idéalisation des résultats (les pains doivent peser, « en théorie »[1], 600 grammes). On passe ensuite clairement, mais sans le dire, à une mathématisation en faisant intervenir une variable aléatoire.

Mathématiquement, une variable aléatoire peut se définir sans retour à une quelconque réalité. Mais, ici, la seule définition possible consiste à revenir à l'expérience concrète. Quelle est-elle exactement ? Comment ont été déterminées les probabilités données ? On peut penser que c'est par une analyse statistique de la production dans le passé et sur un assez grand nombre de pains. Ces conclusions sont-elles encore valables pour l'avenir et, en particulier, pour la production du jour considéré ? On en fait l'hypothèse et c'est cela qui détermine le modèle. C'est donc **une réalité** (on a fabriqué un grand nombre de pains et on a calculé la distribution des fréquences des poids obtenus) **qui définit un modèle** (la loi de probabilité d'une variable aléatoire X qui représente le poids d'un pain).

Si la première question est clairement dans le modèle, par contre, la deuxième question entretient la **confusion entre réalité** (un client achète un pain) **et modélisation** (pour calculer une probabilité, il faut être dans un modèle). Le choix du pain est fait « au hasard »[2] (ce n'est pas dit mais on peut le supposer, et cela fait déjà partie des hypothèses) et le calcul doit se faire à l'intérieur du modèle déjà donné (on ne voit pas comment on pourrait faire autrement).

Cela pose alors un problème plus subtil : l'expérience qui consiste à choisir un pain « au hasard » dans la boulangerie est-elle la même que celle qui consiste à fabriquer un pain ? Il faut faire l'hypothèse que oui. Ce n'est pourtant pas la même réalité. La première concerne le boulanger et il peut fabriquer autant de pains qu'il veut. La deuxième est du côté du client qui,

1 - Mais quel est le sens de cette expression ? Exactement 600 grammes ?

2 - Le sens de cette expression sera également à définir.

lui, ne peut choisir que dans la limite du stock restant au moment de l'achat. N'y a-t-il pas danger de confondre les **probabilités** des différentes valeurs de la variable aléatoire X (le modèle) et les **fréquences** des poids des pains dans le magasin (la réalité) ?

La troisième question porte de nouveau sur **une réalité** : un enquêteur choisit dix pains au hasard.

Que signifie, dans cet énoncé, "choisir au hasard" ?

Dans la réalité, on peut pour cela numéroter les pains et tirer au hasard un nombre à l'aide d'une table de nombre au hasard ou avec la touche RAN d'une calculatrice. On sera conduit à un modèle d'équiprobabilité. Nous avons donc ici un implicite déterminant pour le choix du modèle visé.

Par contre, choisir "au hasard" un point sur une droite n'a pas de réalité physique et aucun modèle ne s'impose. Tout au moins avant qu'on ait dit comment on doit faire !

Les hypothèses de modèle devraient donc être explicites dans la description d'une expérience aléatoire.

Mais cette fois, dans cette troisième question, **le modèle n'est pas donné**. Il appartient à l'élève de modéliser et, comble de malheur, le seul modèle qu'il connaisse en terminale ES (la loi binomiale) ne s'applique pas ici ! En effet, si on se place dans une situation « réaliste », on ne voit pas le contrôleur reprendre deux fois le même pain. On est donc dans une situation qui s'apparente à un tirage « au hasard » et sans remise dans une urne. En toute logique, le meilleur modèle à appliquer est donc la loi hypergéométrique mais, d'une, part elle n'est pas au programme de terminale et d'autre part, elle nécessiterait de connaître le nombre total de pains en stock au moment du tirage au hasard ainsi que la distribution des fréquences de leurs poids.

On doit donc considérer, comme dans la deuxième question, que choisir 10 pains revient à fabriquer 10 pains et que le poids de chacun est aléatoire (modélisable par la loi de probabilité donnée) et **indépendant** du poids des autres, ce qui nous ramène à un schéma de Bernoulli. « **Supposer** » l'indépendance revient donc à construire un modèle incluant une hypothèse forte qui ne figure pas dans l'énoncé, même de façon implicite. La seule justification possible est que, sans elle, on ne peut pas faire le problème, mais c'est, convenons-en, un raisonnement assez spécieux.

Dans nos classes, cette situation est fréquente. Que faut-il « supposer »? Il revient au professeur d'alerter les élèves sur le fait que « le modèle n'est pas la réalité ». Doit-on en conclure qu'il faut habituer nos élèves à réfléchir à propos de la modélisation plutôt que de les entraîner seulement à appliquer des modèles? Si l'on veut éviter la confusion entre modèle et réalité, il faut développer la démarche de modélisation.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France   Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

4 - Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement

Michel Henry

A - Mathématiques et activités « concrètes »

Dans la période actuelle, que l'on a pu désigner par « post-moderne », la tendance à mettre en valeur le caractère instrumental des mathématiques s'est renforcée. Dans certaines études internationales[1], les mathématiques trouvent leur légitimité comme discipline de service, par le transfert de leurs concepts et méthodes pour résoudre des problèmes externes, posés par le développement des connaissances dans d'autres secteurs de l'activité humaine.

Sur le plan didactique, ce transfert suppose, au cours de l'apprentissage, d'avoir relié ces concepts, qui dans le cadre mathématique reçoivent des définitions précises, aux notions et idées générales qui se dégagent du travail d'exploration de la réalité et de sa modélisation.

Cette nécessité épistémologique converge avec l'objectif didactique de donner du sens aux objets introduits, en les reliant aux expériences et aux notions pré construites des sujets apprenants.

On peut trouver ici une explication partielle au phénomène actuel du développement, peut-être démesuré en France, de l'approche de chaque question d'enseignement par des "activités", dont le lien avec la réalité, censée donner ce sens aux notions nouvelles, n'est pas toujours évident. Sans que cette pratique des activités débouche nécessairement sur la maîtrise de nouvelles connaissances, elle a néanmoins pour intérêt de placer les élèves

1 - Notamment celle de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, présidée alors par Jean Pierre KAHANE. Cf. son article dans le bulletin n° 353 de l'APMEP, Avril 1986.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

dans un contexte d'expérimentation : essais-erreurs, conjectures, manipulations internes, essais numériques, contrôles graphiques, constructions géométriques auxiliaires, etc...

Ces comportements, transférés dans des situations de résolution de problèmes externes empruntés aux autres disciplines, posent la question des liens entre l'observation et la description du réel, c'est-à-dire des situations mises en scène pour présenter un tel problème, et le contrôle théorique que les connaissances mathématiques permettent. La démarche expérimentale et son corollaire, la validation de modèles abstraits, entrent progressivement dans le champ des compétences attendues dans l'apprentissage de certaines parties des mathématiques.

B - Notion de modèle

Le terme de « modèle » est utilisé dans des sens assez variés, voire contraires[2].

Dans une première acception, c'est ce que l'on reproduit par imitation (définition Larousse). Par exemple, le modèle du peintre (ou le « top-modèle » du photographe de mode) est l'objet (ou le sujet) réel que l'artiste se propose de représenter. Ce modèle porte en lui des qualités communes à d'autres objets (ou sujets) mais les met particulièrement bien en évidence, du point de vue de cet artiste qui se doit de choisir un « bon modèle » pour l'inspirer dans la réalisation de son œuvre.

Dans le même registre, on parlera d'un élève « modèle » en disant de lui qu'il donne un bon exemple aux autres élèves, à suivre si possible, car il a un comportement typique par rapport aux meilleures attentes que l'on peut avoir.

D'un point de vue analogue, mais dans une démarche inverse, on appelle modèle d'une théorie formelle, un exemple concret dont les propriétés décontextualisées réalisent celles de la théorie. Ainsi, l'ensemble des fonctions numériques définies sur un intervalle est un modèle pour la structure d'algèbre (espace vectoriel + anneau) de dimension infinie non dénombrable. La théorie formalise les propriétés de structure de cet ensemble.

2 - Anne-Marie DROUIN, *Le modèle en question*, Aster n° 7, 1988.

Nous adopterons un point de vue contraire, en nous inspirant de la définition donnée par Alain PAVE[3]:

> "*Un modèle est une représentation symbolique de certains aspects d'un objet ou d'un phénomène du monde réel, c'est-à-dire une expression ou une formule écrite suivant les règles du système symbolique d'où est issue cette représentation.*"

Cette notion de modèle a émergé au cours des années 60, lorsque est apparue la nécessité de mieux préciser la distinction entre le sujet du monde réel que l'on étudie et son idéalisation. On ne retient pour cette étude que certains des aspects caractéristiques de la réalité, qui semblent être pertinents et que l'on simplifie en une abstraction de cette réalité. Dans une conception platonicienne, l'objet idéal et abstrait ("qu'on ne voit que par la pensée") ainsi obtenu, bien défini, est un modèle de cette réalité complexe, changeante, insaisissable dans sa diversité. Mais, rejoignant BEGUIN[4], nous distinguerons une simple description ou une représentation de la réalité d'un modèle qui, dans sa structure, contient une part de connaissances théoriques permettant d'évaluer, interpréter et généraliser cette réalité.

Cette remarque nous conduit à la définition suivante, qui distingue le modèle en tant que structure abstraite de la symbolique utilisée pour le décrire :

> **un modèle est une interprétation abstraite, simplifiée et idéalisée d'un objet du monde réel, ou d'un système de relations, ou d'un processus évolutif issus d'une description de la réalité.**

Ce modèle peut être représenté dans différents systèmes de signes : images, schémas, langages ou symbolismes, s'inscrivant dans différents registres de représentations, plus ou moins isomorphes.

Par exemple, on peut présenter un modèle par une analogie, en y introduisant des objets idéalisés de la réalité. Cela veut dire que dans un vocabulaire courant, les objets du modèle sont doués de propriétés

3 - Alain PAVÉ, *Modélisation en Biologie et en Écologie*, Editions Aléas, 1994.

4 - C. BEGUIN, J-L. GURTNER, O. de MARCELLUS, M. DENZLER, A. TRYPHON et B. VITALE, *Activités de représentation et de modélisation dans une approche exploratoire de la mathématique et des sciences*, article en deux parties paru dans "Petit x" n° 38 et 41, 1995-96.

caractéristiques bien définies. Nous parlerons alors de **modèles « pseudo-concrets ».** C'est le cas notamment des modèles d'urnes en probabilités, où l'hypothèse implicite est l'équiprobabilité des boules dans un tirage « au hasard ».

Parmi les différents registres de représentations, le langage et le symbolisme mathématique permettent des descriptions puissantes sur lesquelles peuvent opérer des propriétés et des algorithmes généraux. Nous les appellerons **« modèles mathématiques »**. Souvent, ils nous sont tellement familiers que nous n'en voyons pas d'autres, et nous avons tendance à confondre ces représentations avec les objets idéaux en jeu, lesquels sont souvent confondus avec la réalité qu'ils modélisent.

C - Un modèle de base en probabilités : l'urne de Bernoulli

Prenons un exemple simple en probabilités.

Description d'un processus réel : *une entreprise produit des pièces d'un certain calibre. Leurs dimensions varient aléatoirement d'une pièce à l'autre, mais il y a des marges qui permettent de dire si une pièce est acceptable ou défectueuse. Une étude statistique montre que dans des conditions normales, les pièces acceptables sont en proportion p. Pour contrôler la qualité de la production, on fait périodiquement un échantillonnage et l'on enregistre le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon.*

Pour modéliser cette situation, on considère une urne (fictive) contenant une proportion p de boules blanches et 1-p de boules noires.

C'est une **urne de Bernoulli**, l'outil de base du probabiliste. La production d'une pièce est représentée par un **tirage au hasard d'une boule, avec probabilité p d'être blanche**.

L'échantillon prélevé est représenté par une suite de **n tirages avec remises** dans l'urne (pour interpréter le fait que la qualité d'une pièce ne dépend pas des pièces précédemment produites).

Le nombre de boules blanches obtenues est ce qu'on appelle une **variable aléatoire binomiale**, dont la loi bien connue (par les spécialistes) s'exprime en fonction de p. On peut ainsi comparer cette valeur théorique à la valeur estimée à partir de l'observation de l'échantillon, avec d'autant plus de confiance que n est grand.

Pour conduire ces calculs, on mathématise ce modèle en considérant que les boules de l'urne sont représentées par un ensemble abstrait Ω, appelé **univers**, dont les éléments ω (**éventualités**) sont équiprobables.

Cette hypothèse de modèle définit une **distribution** (dite uniforme) **de la probabilité P sur Ω** : $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card } \Omega}$. Le tirage aléatoire d'une boule revient à choisir l'un des ω. Son apparition réalise l'**événement élémentaire** {ω}.

La partie B de Ω composée par les ω qui représentent les boules blanches, en proportion p dans l'urne, est appelée un **événement** et on a : $P(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = p$.

On introduit ensuite une **variable aléatoire** X, dite variable de Bernoulli, application définie sur Ω à valeurs dans l'ensemble {0 ; 1}. On décide par exemple que l'image par X d'un élément ω représentatif d'une boule blanche est égale à 1.

La partie B est alors l'ensemble des antécédents de {1}. On écrit $P(B) = P[X = 1]$ ou encore $P(B) = P_X(\{1\})$.

Symboliquement, on écrit :

$$(\Omega \,;\, P) \xrightarrow{X} (\{0 \,;\, 1\}; P_X) \text{ , avec } P_X(\{1\}) = p.$$

C'est un **modèle probabiliste de Bernoulli.**

Le tirage avec remises de n boules est représenté par l'ensemble Ω^n et le nombre aléatoire de boules blanches obtenues détermine une variable binomiale sur Ω^n. Nous ne développons pas ici ce nouveau modèle.

D - Description du réel, modélisation et compétences attendues

Dans un processus de **modélisation**, nous distinguons donc deux étapes, pour l'analyse didactique. Chacune de ces étapes relève de compétences différentes et donc de contrats didactiques différents.

Pour préciser cela, caricaturons un peu la pratique courante : le professeur présente une situation dans des termes naïfs du langage courant. Cette présentation se réduit souvent à « l'habillage » d'un problème mathématique qu'il désire proposer aux élèves. Ainsi la description d'une réalité complexe disparaît pour laisser la place à la proposition d'un modèle déjà là, exprimé en termes pseudo-concrets. Le professeur attend ensuite des élèves qu'ils traduisent ce modèle en termes mathématiques, il les aide au besoin pour interpréter la question posée en un problème interne que

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

contractuellement les élèves doivent résoudre. Ils doivent enfin produire, si possible, un petit commentaire replaçant leurs résultats dans les termes pseudo-concrets du modèle. Il revient au professeur de donner les prolongements possibles et de porter sur la situation réelle les appréciations qui peuvent se dégager.

Si l'on veut introduire en mathématiques une véritable démarche expérimentale, il convient de ne pas négliger **la première étape** de la modélisation au **niveau de la situation concrète** : l'observation d'une situation réelle et sa description en termes courants.

Cette description est déjà une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité, dans la mesure où certains choix sont faits, pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié. Cette description est d'ailleurs pilotée par ce que j'appellerai un regard théorique, c'est-à-dire une connaissance de type scientifique s'appuyant sur des modèles généraux préconstruits, pour apprécier justement ce qui se révélera pertinent.

La démarche expérimentale consiste aussi à pouvoir agir sur la réalité, afin d'en étudier les évolutions et les invariants. Il faut donc pouvoir mettre en œuvre une expérimentation programmée par ce que je désignerai par « **protocole expérimental** », c'est-à-dire l'ensemble des instructions à suivre pour réaliser cette expérience et éventuellement la reproduire.

De nouvelles compétences sont alors attendues, qui peuvent être objet de formation : savoir décrire une situation porteuse d'un problème (par exemple, l'évolution des files d'attente devant les caisses d'un supermarché), savoir mettre en œuvre un protocole expérimental, et recueillir les effets obtenus, savoir organiser les données recueillies, savoir lire une statistique (par exemple, pointer les files à intervalles réguliers).

Puis il s'agit de traduire cette description en un système simplifié et structuré : c'est le niveau du **modèle pseudo-concret**. Cela se traduit par l'appel à un modèle général dont les conditions de transfert sont maîtrisées. En didactique, nous appelons cela « contextualisation » d'un savoir ancien.

Dans l'exemple précédent, il faut dégager les hypothèses pertinentes pour décrire les arrivées des clients, notamment le nombre moyen d'arrivées par unité de temps. Cette construction est guidée par un premier niveau de

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

connaissances théoriques du phénomène étudié (processus de Poisson) et par les outils mathématiques disponibles, déjà maîtrisés (équations différentielles). Elle conduit à poser des hypothèses de modèle (indépendance des arrivées...).

On peut alors passer à **la deuxième étape** : la **mathématisation** ou **formalisation** du modèle. Cela suppose que les élèves soient capables de représenter le modèle dans la symbolique propre aux mathématiques. Avec l'exemple précédent, il faut mettre l'évolution de la probabilité sous forme d'une équation différentielle. Puis ils doivent savoir interpréter la question posée en un problème purement mathématique (résolution de cette équation différentielle) et savoir faire appel aux outils mathématiques adaptés pour résoudre le problème abstrait (fonction exponentielle, intégration, raisonnement par récurrence...).

Enfin, il convient, en **troisième étape**, de pouvoir revenir à la question posée pour traduire dans les termes du modèle pseudo-concret, les résultats mathématiques obtenus, leur donner du sens pour dégager des réponses et **relativiser ces réponses** par rapport aux hypothèses de modèle (formuler la loi de Poisson pour le nombre d'arrivées de clients dans un intervalle de temps donné) ; il faut ensuite interpréter ces réponses pour apprécier leur validité et leur étendue dans la situation concrète (décider de l'ouverture ou de la fermeture d'une caisse pour réguler les files d'attentes). Ces compétences peuvent faire l'objet de formation dans diverses disciplines. Elles prennent un aspect spécifique en mathématiques du fait du caractère particulièrement abstrait des outils que l'on désire mettre en œuvre.

E - Schéma d'une modélisation

A partir des considérations précédentes, on peut schématiser la modélisation d'un phénomène réel ou d'un processus évolutif faisant intervenir certaines grandeurs variables, de la manière suivante :

Schéma d'une modélisation		
Etape de la modélisation	Objet de l'action	Activité attendue
Réalité	Étude d'un phénomène réel, ou d'un processus expérimental. Ex : situation binomiale, dessin géométrique du "drapeau anglais"	Description simplifiée des éléments pertinents pour le problème posé. Application d'un protocole expérimental. Cette description est filtrée par un regard théorique.
Modèle pseudo-concret	Situation générique, décontextualisée, abstraitement porteuse des propriétés objets de l'étude. Hypothèses de modèle : -implicites en général, -explicites pour le contexte particulier Ex : urnes de Bernoulli et tirage binomial, figures connues en géométrie : le parallélogramme.	Présentation du modèle en termes courants ou schématiques, validation rhétorique de l'analogie avec la description précédente. Confrontation des hypothèses de modèle avec les éléments correspondants de la description. Conjectures sur les propriétés du modèle répondant à la question.
Modèle mathématique	Ensemble d'équations ou de formalisations mathématiques représentant les propriétés du modèle et les hypothèses retenues. Ex : Univers $\Omega = [0 ; n]$, variable binomiale N et probabilités $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ configurations connues et théorèmes en géométrie.	Mise en équation ou formalisation : à partir des lois du phénomène étudié et des connaissances théoriques du modèle pseudo-concret, écriture mathématique des relations repérées entre variables dans un cadre théorique déterminé. Formulation dans ce cadre de la question posée.
Etude mathématique	Propriétés du modèle mathématique découlant des hypothèses et des théories mathématiques utilisées. Ex : E[N] = np, les médianes passent par le centre du parallélogramme.	Démonstration de résultats théoriques internes au modèle mathématique. Énoncé formel d'une réponse au problème mathématique posé.

Etape de la modélisation	Objet de l'action	Activité attendue
Confrontation modèle-réalité	Formulation en termes concrets des résultats obtenus. Recontextualisation. Confrontation du modèle complété par ces résultats avec les informations accessibles de la réalité. Ex : La moyenne des succès obtenus dans un grand nombre de tirages binomiaux comparée à np.	Comparaison des résultats numériques ou qualitatifs avec les mesures expérimentales correspondantes. Évaluation de la marge d'erreur et acceptabilité du modèle.
Généralisation et prévisions	Extension du modèle validé à d'autres situations analogues, conditions de généralisation. Prévisions des résultats attendus dans ces nouvelles situations. Ex : Contrôle de la valeur réelle de la probabilité p. Intervalle de confiance et test d'hypothèse pour un pourcentage réel dans une population échantillonnée.	L'appréciation de la validité et de la généralisation du modèle suppose une connaissance spécialisée de la situation étudiée. Ce n'est plus l'affaire du mathématicien. Le spécialiste relativisera les conclusions, explications et généralisations issues de l'étude mathématique en fonction des hypothèses de modèle.

Dans une modélisation, il y a toujours deux étapes délicates qui relèvent d'une connaissance spécialisée des phénomènes étudiés :

- **l'identification,** c'est-à-dire le choix entre plusieurs modèles possibles et la détermination expérimentale des paramètres qui interviennent alors comme hypothèses de modèle,

- **la validation**, c'est-à-dire l'évaluation du degré d'approximation des résultats théoriques obtenus avec les valeurs expérimentales correspondantes et la décision que le modèle est ou n'est pas bien adapté à la situation étudiée.

F - Conclusion : remarques épistémologiques et didactiques

Revenons sur l'importance didactique de la modélisation. Lors de l'introduction en classe des probabilités, nous avons vu l'intérêt épistémologique de bien distinguer réalité, modèle pseudo-concret et modèle

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

mathématique. Il se résume par la nécessité d'introduire de nouveaux objets formels au sein d'une théorie.

Dans les exercices traditionnels où le calcul des probabilités est conçu comme une application de la combinatoire, les élèves se trouvent déroutés, car ils ne voient pas les applications à des situations aléatoires réelles et complexes. Retenant les probabilités comme un jeu de l'esprit, ils n'apprécient guère les hésitations et les incertitudes sur la validité de leurs résultats issus de calculs de combinatoire mal maîtrisés.

Mais sur le plan didactique, je soulignerai un argument supplémentaire. Poser les problèmes en termes de modélisation, suppose contractuellement de rendre explicites les hypothèses de modèle, donc de se poser la question de leur choix, en relation avec la situation étudiée. On permet alors aux élèves de sortir de certains paradoxes ou de surmonter des obstacles liés à certaines conceptions erronées. Ainsi, il revient aux recherches en didactique des probabilités de repérer et analyser ces obstacles[5], aussi bien culturels qu'épistémologiques ou didactiques.

Pour terminer reprenons l'exemple classique des deux dés :

On lance deux dés. Quelle est la probabilité d'obtenir un 5 et un 6 ?

On rencontre souvent cette réponse :

"si les dés sont rigoureusement identiques et si on les jette ensembles, il y a 21 issues constituées par les 6 doubles et les 15 paires panachées. La probabilité est alors de 1/21.

Par contre si on jette les dés successivement ou si l'on peut les distinguer par la couleur, il faut distinguer les couples (5, 6) et (6, 5) et la probabilité cherchée est 2/36".

Cette réponse est plus fréquente qu'on ne le croit (la moitié de mes étudiants d'un examen de probabilités en Licence ont commencé le problème avec ce raisonnement). Mais elle révèle aussi une conception subjective de la probabilité, s'opposant à l'approche fréquentiste qui donne à la probabilité un sens objectif : "si, en tant qu'observateur, je ne peux distinguer les deux dés, faute d'un regard assez fin, cela change la probabilité que j'attribuerai à la paire {5 ; 6}". Dépend-elle vraiment de la couleur des dés ? Demandez

5 - On peut consulter par exemple l'article d'André TOTOHASINA, *L'introduction du concept de probabilité conditionnelle* paru dans Repères IREM n° 15 et sa bibliographie.

dans une classe de première, avant d'aborder le chapitre, si du point de vue des probabilités, il revient au même de lancer un dé deux fois successives ou deux dés ensembles ?

L'enseignement des probabilités au Lycée est délicat. Les élèves y rencontrent de nombreuses difficultés cumulées : introduction d'un nouveau concept lié à une idée de limite (fréquence stabilisée), vocabulaire des ensembles, logique des événements, et surtout démarche de modélisation. La réponse didactique ne peut-être de négliger cette démarche. On a constaté l'échec de l'enseignement formel de la structure d'espace probabilisé, sans que les élèves puissent relier ses propriétés à des situations d'évaluation d'un "degré d'incertitude". Elle réside plutôt dans la familiarisation plus précoce des élèves avec les situations aléatoires réelles (comme c'est maintenant le cas dans de nombreux pays étrangers au niveau collège ou même primaire), avec leur description et avec l'expérimentation. Les outils de simulation seront alors précieux. Il convient aux recherches en ingénieries didactiques de proposer des situations exploitables à ces niveaux.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

5 - Notion d'expérience aléatoire. Vocabulaire et modèle probabiliste

Michel Henry

A - Expérience aléatoire dans l'enseignement

Revenons aux objectifs du programme de première de 1991 dont voici un extrait :

> *"L'objectif est d'entraîner les élèves à* ***décrire quelques expériences aléatoires simples*** *et à calculer des probabilités. Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera (...) sur la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsqu'une même expérience aléatoire est répétée un grand nombre de fois".*

Cet objectif pose la question du lien entre la **notion** d'expérience aléatoire et la modélisation en probabilités, notamment avec l'interprétation de la fréquence stabilisée d'un événement comme valeur estimée de sa probabilité.

La notion d'expérience aléatoire a divers statuts : elle relève d'un habillage pseudo-concret dans les manuels, alors qu'elle concerne une véritable observation du réel dans le programme.

Il n'est pas inutile de regarder plus précisément cette question.

L'objectif affiché est donc de faire le lien entre l'observation, la description d'expériences aléatoires « réelles » et le modèle probabiliste à construire. Dans ce modèle, la probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires (représentant les issues de l'expérience aléatoire) qui le constituent. Ces dernières font partie des hypothèses de modèle : estimées à partir de l'observation des fréquences

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

stabilisées ou issues d'un calcul a priori à partir d'une hypothèse d'équiprobabilité.

Dans les programmes antérieurs à celui de 1991, l'univers-modèle Ω était posé (ou explicité par les élèves) a priori. Ce modèle était par principe accompagné de l'hypothèse d'équiprobabilité permettant d'introduire la probabilité d'un événement par la définition de Laplace :

$P(E) = \dfrac{\text{nombres de cas favorables}}{\text{nombres de cas possibles}}$, déterminée numériquement par un calcul de combinatoire.

La notion d'expérience aléatoire, décrite en termes pseudo-concrets pour fournir la liste des issues possibles à envisager, n'intervenait que pour donner du sens à cet univers Ω.

Aujourd'hui, d'un point de vue didactique, la notion d'expérience aléatoire change de niveau pour désigner un phénomène réel. Les explications données jusque là s'avèrent insuffisantes ou plutôt source de confusions. Voyons cela de plus près.

B - Retour sur la notion d'expérience aléatoire

En probabilités, comme dans toute théorie mathématique, il y a des notions primitives, c'est-à-dire des notions auxquelles la pratique courante dans la réalité nous permet de donner du sens, sans qu'une définition mathématique puisse être formulée. Ces notions sont censées faire le lien entre le modèle et la réalité. Ce lien est un acte de foi au départ. Par exemple, le point, la droite, le plan en géométrie, les entiers en arithmétique ou l'infini en analyse sont des notions primitives avant qu'elles puissent prendre le statut de concepts au sein d'une théorie et participer aux énoncés d'axiomes.

En probabilité, la notion primitive de base est celle d'« expérience aléatoire », du moins pour le programme de 1991, c'était un choix de transposition didactique.

Qu'est-ce qu'une expérience aléatoire ? Habituellement on dit aux élèves :

- c'est une expérience reproductible,
- le hasard intervient dans son déroulement pour en rendre l'issue incertaine,
- on peut faire la liste des issues possibles.

Cette caractérisation n'est pas satisfaisante : elle confond réalité et modèle. Elle ne fonde pas assez clairement le modèle mathématique standard. Elle se heurte à certaines conceptions, elle soulève certaines questions. Par exemple :

- Qu'appelle-t-on « reproductible » ? (un grand nombre de fois dans les mêmes conditions). L'expérience réelle ne peut être qu'unique. La recommencer, c'est en réalité faire une autre expérience. D'ailleurs, objectait un élève déterministe, "*la preuve qu'en recommençant on fait une autre expérience, c'est que l'on obtient alors une autre issue que précédemment*". Il faut donc clarifier cela.

- Qu'est-ce que j'appelle le hasard ? et l'incertitude ?

- Faire la liste des issues ? c'est déjà simplifier la réalité, faire abstraction de certains résultats jugés non pertinents. Par exemple, si je joue à « pile ou face », je n'enregistre pas la position de la pièce par rapport aux 4 points cardinaux !

Dans cette présentation, il y a ambiguïté sur le terme « expérience aléatoire » qui désigne encore une notion floue. Précisons-la.

> **La notion d'"expérience aléatoire" est dégagée pour désigner un processus réel de nature expérimentale, où le hasard intervient, avec des issues possibles bien identifiées**.

On ne sépare donc pas la description d'une expérience aléatoire de la donnée de ces issues possibles que l'on va considérer. Ainsi, dans la nature, il n'y a pas d'expériences aléatoires, il y a des situations complexes ou des systèmes évolutifs (par exemple jet d'une pièce de monnaie, mais aussi la situation météorologique, etc...) qui dépendent de manière sensible des conditions initiales, de telle sorte qu'on ne peut déterminer leurs évolutions, quels que soient les instruments d'observation et la puissance des outils de calcul.

Une expérience aléatoire, c'est la mise en place par un expérimentateur d'un tel système évolutif, quand l'expérimentateur s'intéresse aux issues (observables) qui vont se présenter à la fin du processus. De la complexité naturelle, l'expérimentateur ne retiendra donc pour la description de son expérience aléatoire, que ce qui lui semble pertinent pour indiquer comment la réaliser et quelles issues possibles il veut considérer. Cette description du processus expérimental doit lui paraître suffisante pour pouvoir affirmer qu'il a bien réalisé l'expérience aléatoire qui fait l'objet de son étude.

A la notion d'expérience aléatoire (mise en œuvre expérimentale par une intention humaine d'un processus aléatoire et donnée des issues possibles que l'on désire étudier), nous associons donc la notion de « **protocole expérimental** », c'est-à-dire le texte des instructions à respecter pour pouvoir affirmer que l'on a bien réalisé l'expérience aléatoire, objet de l'étude.

Ainsi, nous donnons le sens suivant à la locution « répétition de la **même** expérience aléatoire » : nous conviendrons que nous avons répété une même expérience aléatoire, si nous sommes d'accord que les processus expérimentaux que nous avons fait fonctionner dans les deux cas respectent bien le protocole donné.

C'est donc ce protocole expérimental accompagné de la liste des issues possibles à observer, qui caractérise « l'expérience aléatoire ». Cette notion devient une notion générique pour désigner tous les processus expérimentaux de même nature qui respectent un tel protocole.

L'enseignement de cette notion devrait donc proposer aux élèves des tâches de rédaction de protocoles expérimentaux pour décrire, par un texte, des processus aléatoires que l'on peut éventuellement faire fonctionner devant eux, en soulignant les conditions expérimentales minimales, la place du hasard dans le processus et la liste des issues possibles.

Puis, à partir de cette activité, peut se développer la modélisation qui suppose la mise en œuvre des compétences que nous avons pointées lors de la présentation des différents niveaux d'abstraction et de mathématisation. Elles se résument par l'aptitude à bien séparer réalité et modèle.

C - Vocabulaire et symboles associés aux deux premières étapes de la modélisation

A ce point de notre réflexion didactique, ayant montré l'importance de séparer la réalité des modèles censés la décrire, il convient de préciser le vocabulaire, de telle sorte qu'à chaque niveau de description soient associés des termes spécifiques permettant aux élèves de repérer le point de vue auquel on se place : réalité sensible, habillage pseudo-concret, modèle probabiliste.

Il convient aussi que ce vocabulaire rejoigne celui qui est généralement employé, en le précisant.

Une **expérience aléatoire** est donc la mise en œuvre dans des conditions expérimentales déterminées par un protocole, d'un processus évolutif pour un système matériel dont le comportement est sensible par rapport aux conditions initiales, de telle sorte que l'on ne peut prévoir son état en fin de parcours. Dans la réalité, on parlera d'une **expérience** « **concrète** ».

Idéalisée, caractérisée par le **protocole**, on parlera d'**expérience** « **abstraite** » ou de l'expérience modèle. Ainsi, on pourra abstraitement répéter cette **même expérience** « un grand nombre de fois », ce qui concrètement revient à reproduire le processus expérimental dans des conditions protocolaires analogues.

Ce processus peut comporter plusieurs étapes élémentaires qu'on appellera « **épreuves** », concrètes ou abstraites suivant le niveau où l'on se place. Ainsi une expérience peut combiner une succession d'épreuves ou un ensemble d'épreuves menées en parallèle.

Le « **résultat** » d'une expérience est l'état réel du système à la fin du processus étudié. La complexité du système en évolution et les moyens d'observation et de calcul ne permettent pas de donner par avance ce résultat. On dit qu'il dépend du **hasard**.

Dans le protocole expérimental, on peut décider de ne retenir du résultat obtenu que quelques caractéristiques particulières, résumant ce résultat. Tous les résultats observables de l'expérience peuvent être ainsi classés dans l'une ou l'autre des catégories définies par ces caractéristiques, ces catégories s'excluant mutuellement. On les appelle « **issues** » ou « **éventualités** » de l'expérience aléatoire. Ainsi la **réalisation** d'une issue est le "fruit du hasard" et du choix d'issues effectué. Ces issues sont dites « **aléatoires** ».

L'ensemble des catégories permettant de classer tous les résultats observables est appelé : « **ensemble des issues possibles** » ou « **univers** ». Au niveau du lycée, cet ensemble est fini.

Souvent, au résultat d'une expérience, on associe un repère qualitatif ou une ou plusieurs valeurs numériques, déterminées par des mesures expérimentales. Reprenant le terme usité en statistiques descriptives, cette relation est appelée « **caractère** ». Dans ce cas, les caractéristiques que l'on souhaite conserver pour identifier le résultat, peuvent être déterminées (par image réciproque) par les valeurs possibles du caractère, discrètes ou regroupées en classes.

Un « **événement** » est un ensemble particulier d'issues possibles. Si le résultat de l'expérience aléatoire détermine une issue i, on dit que « **i est réalisée** », et si i est une des issues d'un événement *E*, on dit que « ***E* est réalisé** ». Appréciations portées sur le résultat de l'expérience réelle, ces notions s'inscrivent donc dans le cadre de l'expérience abstraite ou idéalisée.

A ce niveau de la réalité et de sa description simplifiée, il ne s'agit pas de définitions au sens mathématique, mais de la description du substrat concret qui donnera du sens aux termes introduits dans le modèle probabiliste, soit en tant que termes primitifs (expérience aléatoire, issue, ...), soit définis à partir des précédents.

Au niveau du modèle pseudo-concret, on reprendra le même vocabulaire, puisque ce modèle est décrit dans les termes naïfs de la réalité. Mais ces termes, en désignant des objets abstraits, revêtent alors un sens plus précis. Passant de notion à concept, ils désignent des signifiants d'objets concrets ainsi signifiés.

Par exemple, certaines situations concrètes peuvent être représentées génériquement par des **modèles d'urne**. C'est le cas des expériences aléatoires composées d'épreuves dont on peut catégoriser les résultats en un ensemble d'issues "*également possibles*", selon les termes de Laplace, autorisant l'**hypothèse de modèle** d'équiprobabilité des boules dans l'urne (il y a d'autres objets pseudo-concrets usuels : pièces de monnaie, dés, cartes à jouer, ..., porteurs implicites de leurs hypothèses de modèle, en général l'équiprobabilité).

Le protocole expérimental détermine les conditions d'extraction des boules de l'urne. D'ailleurs, l'analyse exhaustive des différents cas d'urnes (nombre de couleurs) et des différentes conditions d'extraction (remise ou pas, nombre d'épreuves, résumés des issues observées représentant les résultats de l'expérience) conduit à une liste standard des **lois de base** finies usuelles.

La modélisation d'une expérience, par un schéma d'urne par exemple, suppose donc une connaissance préalable, au moins partielle de cette liste, pour mieux identifier la situation concrète avec le modèle d'urne adéquat. C'est ce que j'appelle le « **regard théorique** ».

L'extraction (fictive) d'une boule (épreuve modèle) représente une issue d'une des épreuves concrètes. La couleur de la boule obtenue réalise cette issue. Les issues possibles que l'on a choisi de retenir, en termes d'urne, constituent l'**univers modèle** associé à l'expérience aléatoire. Cet univers se présente donc comme un ensemble « naïf », déterminé par la liste de toutes les issues qui caractérisent exhaustivement tous les résultats possibles de l'expérience. Du point de vue du sens, cet univers représente donc la « **certitude** ».

Sa partie E, représentative de l'événement *E* associé à l'expérience aléatoire, est encore appelée « **événement** », malgré la confusion de statut que ce même vocable peut entraîner.

Dans le modèle pseudo-concret, on peut faire fonctionner sur les événements les opérations (complémentaire, union, intersection, différence ensembliste) de l'algèbre des parties d'un ensemble. Ces opérations reflètent la logique propositionnelle (non, ou, et) combinant entre eux les événements concrets, dès lors qu'ils sont associés aux parties définies en compréhension de l'univers modèle par le sens que l'on a donné aux issues de cet univers.

Dans ce modèle pseudo-concret, un caractère numérique associé aux résultats de l'expérience aléatoire est représenté par une application numérique définie sur l'univers modèle. Cette application, opérant sur les issues, est appelée « **variable aléatoire** », ce qui est source d'une confusion avec la fonction associée définie dans le modèle mathématique. (On l'a aussi désigné par « **aléa numérique** »).

L'expérience aléatoire peut donc être répétée, dans le sens que nous avons donné à cette action. On peut s'intéresser à un événement particulier *E* que chaque résultat d'expérience réelle peut (ou non) réaliser. La proportion des expériences réalisant *E* parmi toutes celles qui ont été effectuées est la « **fréquence** » observée de l'événement *E*.

Il est un fait d'observation que la fréquence d'un événement tend à se « **stabiliser** » quand le nombre n d'expériences effectuées est de plus en plus grand (interprétation : dans la quasi-totalité des observations, elle restera comprise dans un intervalle dont la longueur se réduit quand n augmente). Ce fait peut être compris comme une loi de la nature (ou du hasard). La notion de fréquence intervient donc au niveau de l'expérience idéalisée et de sa description.

Dans le modèle pseudo-concret, on introduit le concept de « **probabilité** » de l'événement *E*. C'est un nombre réel, associé à la partie E de l'univers représentant l'événement *E*. Ce nombre interprète l'idée de « **chance** » que l'on a d'observer l'événement *E* quand on effectue réellement l'expérience. On peut interpréter cette probabilité comme un degré de la certitude ainsi que le suggérait Bernoulli.

Cette nature subjective du sens que l'on donne à ce concept de probabilité est tempérée par le fait objectif de la stabilisation de la fréquence de *E* et par l'idée (pas toujours facilement acceptée par la culture ou la psychologie individuelle) que cette « chance » correspond à cette fréquence.

Du point de vue conceptuel, il faut imaginer que la suite des fréquences de *E* que l'on pourrait observer si l'on répétait *E* à l'infini, se stabiliserait de plus en plus précisément vers une valeur limite théorique, sorte de mesure idéale de l'incertitude de *E*, alors que les fréquences observées en sont des mesures concrètes approximatives. La probabilité de E serait alors l'expression **dans le modèle** de cette valeur idéale. On doit donc la distinguer de la fréquence théorique limite, comme on distingue le modèle de la réalité.

D - Propriétés de base et hypothèses de modèle

Dans ces conditions, les probabilités des événements associés à l'expérience aléatoire jouissent des mêmes **propriétés d'additivité** que les fréquences de ces événements :

- une probabilité est comprise entre 0 et 1,
- la probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des issues le constituant,
- et la somme de toutes les probabilités des issues constituant l'univers (**probabilités élémentaires**) est égale à 1, probabilité de la certitude.

On obtient ainsi la présentation d'une loi de probabilités au sens du programme 2001 de première.

Il reste à préciser les conditions dans lesquelles les probabilités élémentaires sont déterminées. Elles relèvent d'**hypothèses de modèle**. Dans la pratique, on trouve trois catégories d'hypothèses :

a - Le contexte de l'expérience aléatoire, les symétries des objets matériels utilisés, permettent de ramener tous les résultats à un ensemble n d'issues qui sont considérées comme également possibles. On fait alors l'**hypothèse d'équiprobabilité**. On dit aussi que l'on admet la **distribution uniforme** des probabilités sur l'univers de ces n issues.

Cela revient à donner aux probabilités de chaque issue la même valeur $\frac{1}{n}$.

b - La complexité de l'expérience aléatoire ne permet pas de se ramener à un système d'issues équiprobables (ou c'est trop compliqué : fiabilité de systèmes complexes, phénomènes économiques, météo, ...). On peut alors déterminer la probabilité de chaque issue ou événement en effectuant « un grand nombre de fois »[1] l'expérience aléatoire, et en retenant pour valeur numérique de cette probabilité la **valeur des fréquences observées** de cette issue ou événement. Ces fréquences sont alors conçues comme mesures approximatives de cette probabilité, comme une mesure physique, avec le degré de précision souhaité suivant le nombre d'expérience que l'on consent d'effectuer.

c - On reconnaît dans le processus expérimental une situation relevant d'un modèle standard. Dans ce modèle, les probabilités des issues sont réparties selon une **loi** connue qui dépend d'un ou plusieurs **paramètres** (par exemple, les probabilités binomiales dépendent de la valeur de la probabilité p de Bernoulli). On **estime** alors ces paramètres à partir d'un **échantillon** de résultats obtenus en répétant l'expérience (estimation inférentielle), ce qui détermine entièrement la loi que l'on accepte alors comme **hypothèse de modèle**. Les probabilités élémentaires sont alors calculées à partir des données ou des propriétés mathématiques connues du modèle.

E - Le modèle probabiliste

Pour développer les propriétés du modèle représentatif d'une expérience aléatoire, et les valider par des démonstrations, pour pouvoir utiliser les outils de calcul, il convient d'interpréter ce modèle dans le cadre mathématique formel adapté : c'est la mathématisation du modèle (et du problème !). Depuis Kolmogorov, adoptant la représentation ensembliste, les probabilistes se placent dans le cadre de la **théorie de la mesure**. Dans ce cadre, les notions d'expérience aléatoire, d'issue ou d'événement sont des **notions premières** et n'interviennent que pour fixer les idées, donner du sens aux objets formels de cette théorie.

Ainsi l'univers sera représenté par un ensemble abstrait généralement noté Ω, appelé « **ensemble référentiel** », ses éléments ω représentent les issues de l'expérience aléatoire idéalisée, on les appelle les « **éventualités** ».

1 - Dans la pratique, on calcule qu'environ un millier d'expériences permettent de déterminer cette probabilité avec deux chiffres significatifs.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

[Quand cet ensemble est infini non dénombrable[2], l'existence d'une distribution de probabilité sur Ω passe par la sélection d'une famille de parties de Ω structurée en « **tribu** » *T* (famille contenant toutes les parties obtenues par les opérations ensemblistes à partir de ses sous-familles dénombrables), conformément à la théorie de Borel et Lebesgue.]

Dans le cas fini [ou dénombrable] auquel on se limite au lycée, cette difficulté est inutile et l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ de Ω représente les événements associés à l'expérience aléatoire. Ces parties (sélectionnées ou non) sont encore appelées « **événements** ». Un événement-singleton {ω} est appelé « **événement élémentaire** ».

Les probabilités des événements sont alors considérées comme valeurs images d'une application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ [ou sur *T*] à valeur dans [0, 1], appelée « **mesure de probabilité** » ou simplement « **probabilité** ». La notation fonctionnelle est utilisée : à l'événement E, on associe sa probabilité p = P(E). Dans le cas fini ou discret, la probabilité P est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires $p_i = P(\{\omega_i\})$. (Cette écriture est parfois abusivement simplifiée en $P(\omega_i)$, assimilant un événement élémentaire $\{\omega_i\}$ à l'éventualité.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ [ou (Ω, T, P)], [structuré en espace de mesure] est appelé « **espace probabilisé** ».

Mais, pour avoir accès aux outils de calcul et pour expliciter analytiquement la probabilité P, on transfère cette structure abstraite d'espace probabilisé dans un espace numérique, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$, au moyen d'une « **variable aléatoire** » X. Cette variable est censée représenter un caractère auquel on s'intéresse. C'est une application définie sur Ω, à valeur dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$, [muni de la tribu B engendrée par les intervalles, dite tribu « **borélienne** ». (Quand Ω est un ensemble infini non dénombrable, on doit supposer que les images réciproques par X des boréliens sont dans la tribu *T*. On dit alors que X est « **mesurable** ».)].

La probabilité P sur Ω est alors donnée par l'intermédiaire de la probabilité image P_X de P par X : si B est un intervalle de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{R}$ ou un pavé de $\mathbb{R}^n$ [ou si $B \in \mathcal{B}$] et si $A = X^{-1}(B)$, on a : $P(A) = P_X(B)$. Les probabilistes notent aussi $P(A) = P(X \in B)$ ou $P(A) = P(X = x_i)$ quand B est l'événement $\{x_i\}$. P_X est appelée la « **loi de X** ». [C'est une mesure sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$, définie sur les boréliens].

2 - Les parties entre [ ] dans ce paragraphe sont destinées à remuer quelques souvenirs universitaires ! Elles sont sans doute inutiles (trop abstraites ou trop connues) et peuvent être négligées en première lecture.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

[Dans le cas de modèles infinis, on se donne d'abord cette loi, au moyen de sa **fonction de répartition** : $F_X(x) = P(X \leq x) = P_X(]-\infty, x])$, ou de sa **densité** : $f_X(x) = F_X'(x)$, ou de sa **fonction caractéristique** (transformée de Fourier de f_X). La probabilité P reste abstraite.]

Dans le cas où Ω est fini, l'utilisation de variables aléatoires est commode pour repérer des lois connues et appliquer des résultats théoriques, notamment des calculs d'espérances, de variances, ou faire fonctionner des théorèmes. Sans cette connaissance de base en probabilités, on ne voit pas ce que peut apporter la notion de variable aléatoire et de loi pour résoudre de vrais problèmes. C'est pourtant la situation créée par le programme de terminale qui, limitant la notion de loi à la donnée des probabilités $p_i = P(X = x_i)$, exclut toute référence à des lois standard.

Le modèle choisi pour étudier une expérience aléatoire est donc représenté par des objets mathématiques dont la symbolique peut être résumée par le schéma générique suivant, appelé le « **modèle probabiliste** » :

$$(\Omega, \mathcal{T}, P) \xrightarrow{X} (IR, \mathcal{B}, P_X).$$

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

6 - Modélisation en probabilités conditionnelles

Michel Henry

A - Situations de probabilités conditionnelles

A partir des issues **d'une expérience aléatoire**, on définit un univers Ω, ensemble des éventualités ω. On s'intéresse à deux événements A et B, parties de Ω, représentatives de deux caractéristiques ou propriétés possibles *A* et *B* de ces issues. Quand ω ∈ A, on dit que « l'événement *A* est réalisé ». (Double statut du mot « événement ».)

On désire avoir une idée sur le lien entre *A* et *B*. Il peut être de nature logique : quand *A* est réalisé, alors *B* l'est aussi. Dans ce cas, on a simplement l'inclusion $A \subset B$ pour exprimer le fait que si $\omega \in A$, alors $\omega \in B$. On a : $P(A) \leq P(B)$.

Mais ce lien peut être de nature stochastique : quand on répète l'expérience, les événements *A* et *B* sont plus ou moins fréquemment réalisés conjointement, de telle sorte que lorsque l'on sait que l'un des deux est réalisé, cela donne une idée de nature probabiliste sur la réalisation éventuelle de l'autre. Quand cette fréquence est élevée, on parle de « forte corrélation », ou de dépendance stochastique. C'est cette notion qu'il s'agit de modéliser.

Dans la pratique, diverses situations relèvent des probabilités conditionnelles :

Les situations chronologiques

Elles sont particulièrement adaptées aux représentations avec des arbres, où l'expérience est décomposée en deux épreuves successives, les issues de la première conditionnent le déroulement (donc la répartition de la probabilité) de la deuxième.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

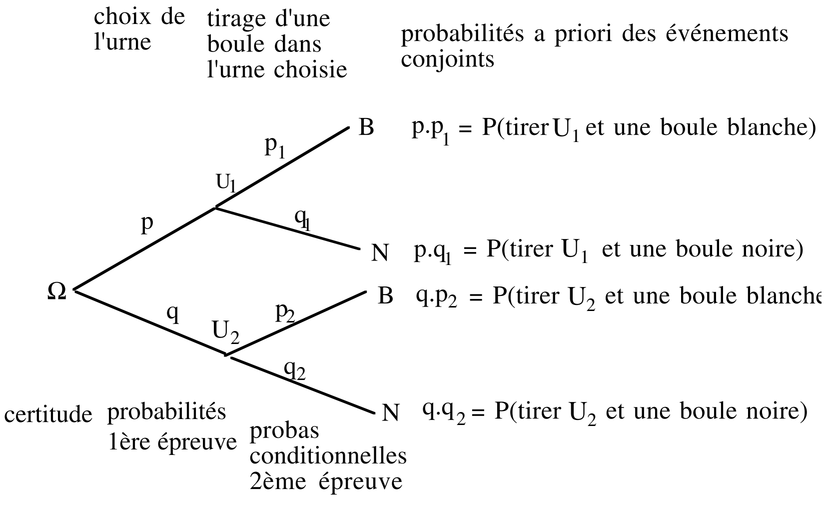
Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Par exemple, *j'ai deux urnes U_1 et U_2 avec des proportions de boules blanches et noires (p_1, q_1) et (p_2, q_2) différentes. On tire d'abord une urne (à pile ou face ou par un tirage de Bernoulli avec probabilités p et q), puis une boule dans l'urne issue de cette première épreuve. Qu'elle est la probabilité d'avoir une boule blanche ?*

La couleur de la boule obtenue dépend de deux hasards successifs, elle est conditionnée par l'issue de la première épreuve. La probabilité d'avoir une boule blanche est alors composée des probabilités p, q, p_1 et p_2, elle vaut : $p.p_1 + q.p_2$.

C'est la formule des probabilités composées, donnée par Laplace comme septième principe et que l'on peut présenter et « justifier » intuitivement par des arguments cardinalistes ou fréquentistes (sa démonstration part de la définition de la probabilité conditionnelle et est interne au modèle mathématique).

Voici un schéma en arbre utilisé pour représenter cette situation :



C'est la situation la plus intuitive, mais source d'obstacles didactiques[1]. Il n'est pas évident qu'il faille entamer l'étude de ce chapitre en terminale par des exemples de ce type.

1 - Voir pour cela l'article d'André TOTOHASINA dans Repères-IREM n° 15, *L'introduction du concept de probabilité conditionnelle.*

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Les situations causalistes

Elles s'apparentent aux précédentes et sont aussi assez bien décrites par des schémas en arbres. Voici un exemple type :

100 cobayes sont traités par trois produits provoquant une maladie M.

50 sont traités par le produit P_1 *qui donne M avec la probabilité 0,25.*

25 sont traités par le produit P_2 *qui donne M avec la probabilité 0,5.*

25 sont traités par le produit P_3 *qui donne M avec la probabilité 0,3.*

Un cobaye ***pris au hasard*** *a la maladie M. Quelle est la probabilité qu'il ait été traité par* P_1 *?*

On y rencontre les mêmes obstacles didactiques quand il s'agit « d'inverser l'arbre » pour expliciter les probabilités des causes, conditionnellement à l'observation d'une conséquence possible. C'est dans ce cadre que la notion de probabilité conditionnelle a été historiquement progressivement dégagée.

Assez spectaculaire, la recherche des probabilités des causes, simple sur le plan mathématique, n'est pas exempte d'obstacles épistémologiques difficiles et de comportements erronés. Peut-on par exemple l'appliquer aux phénomènes historiques non reproductibles ? C'est pourquoi la formule de Bayes qui donne ces probabilités a été exclue du programme de terminale. Laplace la donne en sixième principe, dans des hypothèses maladroites, le conduisant à un raisonnement pour le moins insuffisant, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

Les situations ensemblistes

Elles s'apparentent directement au modèle mathématique standard : l'issue d'une expérience aléatoire est porteuse de deux caractères qui peuvent être stochastiquement liés.

Par exemple dans un tirage au hasard d'une personne dans une population, l'observation croisée de son poids et de sa taille conduit à des résultats corrélés : les événements A = « la personne pèse plus de 65 kg » et B = « elle mesure plus de 1,75 m » sont sans doute liés.

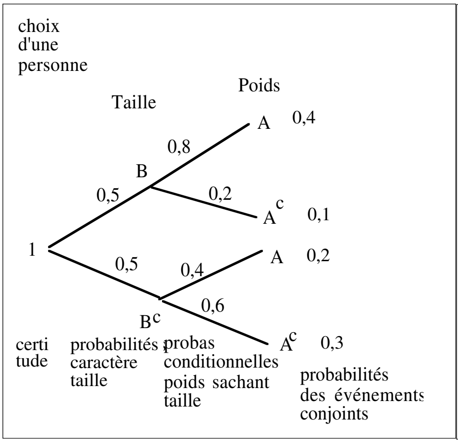
Ces situations sont assez bien décrites par des tableaux de contingences à double entrée, donnant les probabilités conjointes et les

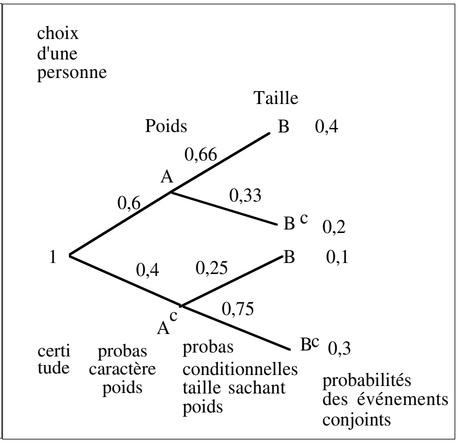
Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

probabilités marginales des événements A et B étudiés. Elles peuvent aussi être décrites par des schémas d'arbres, dont l'enchaînement n'a pas d'ordre privilégié. Ils peuvent être plus facilement inversés que les précédents, d'un point de vue du sens.

Taille / Poids	B = plus de 1,75 m	B^c = moins de 1,75 m	distribution marginale des probabilités des poids
A = plus de 65 kg	0,4	0,2	0,6
A^c = moins de 65 kg	0,1	0,3	0,4
distribution marginale des probabilités des tailles	0,5	0,5	1

Ce tableau donne les deux arbres suivants :





Cette notion de probabilité conditionnelle a été une source d'hésitations historiques. Voyons celles de D'Alembert et de Laplace.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

B - Interprétations de D'Alembert et de Laplace

1 - D'Alembert et la navigation au XVIII^e^ siècle.

Dans l'article "*Probabilités*", de l'*Encyclopédie*, D'Alembert donne un exemple de *probabilité composée :*

"Un ami est parti pour les Indes, sur une flotte de 12 vaisseaux, j'apprends qu'il en a péri trois, et que le tiers de l'équipage des vaisseaux sauvés est mort dans le voyage ; la probabilité que mon ami est sur un des vaisseaux arrivés à bon port, est 9/12, et celle qu'il n'est pas du tiers mort en route, est 2/3. La ***probabilité composée*** *qu'il est encore en vie***,** *sera donc les 2/3 de 9/12 ou 6/12 ou une demie certitude. Il est donc pour moi entre la vie et la mort".*

Dans cet exemple pseudo-concret, D'Alembert donne le principe de la multiplication des probabilités, comme on le ferait de proportions, sans dégager la notion de probabilité conditionnelle ni se préoccuper de l'indépendance des « événements », un peu tirés par les cheveux, qu'il examine.

2 - Les deux principes de Laplace

Pierre Simon LAPLACE est le mathématicien qui personnifie le tournant entre le XVIII^{e} et le XIX^{e} siècle, il peut être considéré avec Cauchy comme le maître à penser de l'école française qui étendra son influence jusqu'au XX^{e} siècle.

Il s'est intéressé très tôt aux probabilités, aussi bien du point de vue des applications que pour en faire une théorie mathématique à part entière, axiomatisée. Son premier ouvrage, publié en 1774, s'intitule : *Mémoire sur la probabilité des causes par les événements*. Il était nécessaire de faire la clarté sur les possibilités - et les limites- du calcul des probabilités dans ce domaine.

Dans sa présentation, il écrit :

"Je me propose de déterminer la probabilité des causes par les événements, matière neuve à bien des égards et qui mérite d'autant plus d'être cultivée que c'est principalement sous ce point de vue que la science des hasards peut être utile dans la vie civile".

Dans son *essai philosophique sur les probabilités* paru en 1825, Laplace rassemble les définitions et propriétés de base, énoncées en 10 "*principes*", qui peuvent être considérés comme une première axiomatique du calcul des probabilités.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Curieusement, Laplace énonce d'abord le sixième principe du calcul des probabilités des causes, formule abusivement appelée « de Bayes », avant de donner au septième principe la formule des probabilités totales :

Sixième principe :

"Chacune des causes, auxquelles un événement observé peut-être attribué, est indiquée avec d'autant plus de vraisemblance, qu'il est plus probable que cette cause étant supposée exister, l'événement aura lieu ;"

Traduction avec nos notations : soient C_1 et C_2 deux causes qui peuvent produire un événement E avec les probabilités respectives $P(E/C_1)$ et $P(E/C_2)$.

Si $P(E/C_1) > P(E/C_2)$, alors les probabilités des causes C_1 et C_2 sachant qu'on a observé E, sont dans le même ordre : $P(C_1/E) > P(C_2/E)$.

... *"la probabilité de l'existence d'une quelconque de ces causes est donc une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement, résultante de cette cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables relatives à toutes les causes :"*

Traduction avec nos notations : donc (!),

$$P(C_1 / E) = \frac{P(E / C_1)}{P(E / C_1) + P(E / C_2)} .$$

... *"si ces diverses causes considérées* ***a priori*** *sont inégalement probables, il faut au lieu de la probabilité de l'événement, résultante de chaque cause, employer le produit de cette probabilité, par la possibilité de la cause elle-même".*

Traduction avec nos notations :

$$P(C_1 / E) = \frac{P(E / C_1)P(C_1)}{P(E / C_1)P(C_1) + P(E / C_2)P(C_2)} .$$

Laplace distingue ici deux notions : probabilité d'un événement et possibilité d'une cause, estimée a priori, sans que cette cause soit clairement issue d'une expérience aléatoire, comme le montre l'exemple de son urne qu'il traite ensuite. Dans cette interprétation causaliste, il lui est difficile de concevoir la probabilité de l'événement conjoint $P(E \cap C_1)$.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Septième principe :

"La probabilité d'un événement futur est la somme des produits de la probabilité de chaque cause, tirée de l'événement observé, par la probabilité que, cette cause existant, l'événement futur aura lieu."

Traduisons : $P(E) = P(C_1)P(E/C_1) + P(C_2)P(E/C_2)$. C'est la formule des probabilités totales. Remarquons qu'avec la formule des probabilités composées : $P(A \cap B) = P(A/B).P(B)$, elle contient le sixième principe :

$$P(C_1 / E) = \frac{P(C_1 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E / C_1)P(C_1)}{P(E / C_1)P(C_1) + P(E / C_2)P(C_2)} .$$

3 - L'urne de Laplace

Laplace illustre alors ce principe des probabilités totales avec cet exercice classique de l'urne inconnue :

"Imaginons une urne qui ne renferme que deux boules dont chacune soit ou blanche, ou noire. On extrait une de ces boules, que l'on remet ensuite dans l'urne, pour procéder à un nouveau tirage. Supposons que dans les deux premiers tirages on ait amené des boules blanches ; on demande la probabilité d'amener encore une boule blanche au troisième tirage".

Laplace tient alors le raisonnement suivant :

"On ne peut faire ici que ces deux hypothèses : ou l'une des boules est blanche, et l'autre noire, ou toutes deux sont blanches.

Dans la première hypothèse, la probabilité de l'événement observé est 1/4 ; elle est l'unité ou la certitude dans la seconde.

Ainsi, en regardant ces hypothèses comme autant de causes, on aura, par le sixième principe, 1/5 et 4/5 pour leurs probabilités respectives.

Or, si la première hypothèse a lieu, la probabilité d'extraire une boule blanche au troisième tirage est 1/2 : elle égale l'unité dans la seconde hypothèse ; en multipliant donc ces dernières probabilités, par celles des hypothèses correspondantes, la somme des probabilités, ou 9/10, sera la probabilité d'extraire une boule blanche au troisième tirage."

Traduction : Les deux urnes possibles sont $C_1 = \{b ; n\}$ et $C_2 = \{b ; b\}$; deux tirages avec remises amènent l'événement $A = (b_1 ; b_2)$. Quelle est la probabilité de tirer encore une boule blanche au troisième coup (événement E) ?

Expression du septième principe :

$P(E/A) = P(C_1/A)P(E/C_1 \text{ et } A) + P(C_2/A)P(E/C_2 \text{ et } A)$

et on applique le sixième principe pour calculer $P(C_i/A)$:

$$P(C_1/A) = \frac{P(A/C_1)}{P(A/C_1) + P(A/C_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{5}$$

et : $$P(C_2/A) = \frac{P(A/C_2)}{P(A/C_1) + P(A/C_2)} = \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{4}{5}$$

d'où : $P(E/A) = \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{5} + 1 \text{ x } \frac{4}{5} = \frac{9}{10}$

Dans ce calcul, Laplace fait implicitement l'hypothèse $P(C_1) = P(C_2)$.

Mais l'urne aurait pu être issue d'un choix aléatoire entre les trois possibilités suivantes : on lance un dé :

- si on obtient 1, on prend l'urne {n, n} (C_0).
- si on obtient 2, 3 ou 4, on prend l'urne {b, n} (C_1).
- si on obtient 5 ou 6, on prend l'urne {b, b} (C_2).

Le calcul est alors différent :

$$P(C_1 / A) = \frac{P(A/C_1)P(C_1)}{P(A/C_1)P(C_1) + P(A/C_2)P(C_2)} = \frac{\frac{1}{4} \text{x} \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \text{x} \frac{1}{2} + 1\text{x}\frac{1}{3}} = \frac{3}{11}$$

$$P(C_2 / A) = \frac{P(A/C_2)P(C_2)}{P(A/C_1)P(C_1) + P(A/C_2)P(C_2)} = \frac{1\text{x}\frac{1}{3}}{\frac{1}{4} \text{x} \frac{1}{2} + 1\text{x}\frac{1}{3}} = \frac{8}{11}$$

d'où : $P(E/A) = \frac{1}{2} \text{ x } \frac{3}{11} + 1 \text{ x } \frac{8}{11} = \frac{19}{22}$!

4 - Un exemple dans le style de Laplace.

Reprenons l'exercice des cobayes traités par les trois produits. Comparons-le avec la situation suivante :

Dans la nature, il y a des rongeurs qui peuvent être porteurs de trois sortes de virus V_1, V_2, V_3. Chaque virus donne la maladie M avec les probabilités 0,25 ; 0,5 ; 0,3.

On attrape un rongeur, il est malade. Quelle est la probabilité qu'il ait le virus V_1 ?

Le raisonnement de Laplace serait le suivant : n'ayant aucune indication sur la répartition des virus V_1, V_2, V_3 dans la région où on a attrapé le rongeur, je considère qu'il a été prélevé au hasard dans une population où l'on fait l'hypothèse d'équiprobabilité des trois sortes de virus :

$$P(V_1) = P(V_2) = P(V_3) = \frac{1}{3}.$$

C'est une hypothèse de modèle, sans doute fausse, mais qui semble la plus raisonnable.

On applique alors le sixième principe sous sa première forme :

$$P(V_1 / M) = \frac{P(M / V_1)}{P(M / V_1) + P(M / V_2) + P(M / V_3)} = \frac{0,25}{0,25 + 0,5 + 0,3} = 0,238$$

Mais quel sens a cette valeur numérique, avec de telles hypothèses de modèle, pour une « prise » de rongeur qui n'a rien d'une expérience aléatoire ?

C - Définition de la probabilité conditionnelle et modélisation

1 - Introduction du modèle

Comment interpréter le fait qu'une connaissance partielle sur un résultat d'une expérience aléatoire permet de modifier la probabilité que l'on va attribuer à un événement qui lui est lié ?

Il faut faire comprendre qu'une donnée nouvelle sur le déroulement d'une expérience aléatoire modifie non pas les probabilités des événements, mais la **description** de cette expérience, et par conséquent le modèle utilisé pour représenter les résultats possibles : on va changer de référentiel et déterminer une nouvelle répartition de probabilité sur le nouveau référentiel.

En fait, une approche fréquentiste va clarifier cette situation : **pour estimer une probabilité conditionnelle, on procède à une autre expérience aléatoire.**

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France   Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Supposons en effet qu'à l'issue de l'expérience primitive, on sache que l'événement *B* est réalisé.

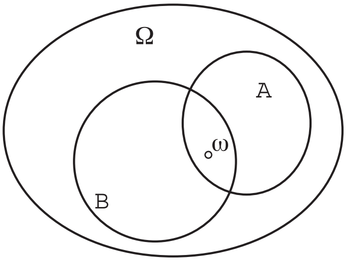
Reproduisons cette expérience un grand nombre de fois, en éliminant les épreuves où *B* n'est pas réalisé (on peut du moins imaginer cette répétition).

Cette procédure met en œuvre une autre expérience aléatoire : celle qui consiste à ne retenir l'issue de la précédente, **que** si *B* est réalisé, sinon on recommence.

Dans cette nouvelle expérimentation, la probabilité d'un événement *A* est déterminée par la fréquence des *A* intervenant dans les épreuves retenues. Elle est donc différente de la probabilité a priori de *A*, estimée par la fréquence des *A* intervenant dans l'ensemble des épreuves reproduisant l'expérience primitive.

2 - *Définition ensembliste*

La définition classique se plaçait résolument dans le cadre de la modélisation ensembliste, minimisant ainsi les obstacles dus à des conceptions subjectivistes. Reprenons ici cette définition, afin de montrer comment elle peut prendre en compte les remarques précédentes :



- Ω est l'ensemble référentiel représentant l'expérience aléatoire primitive.

- B est un événement de probabilité non nulle.

- A est l'événement dont on cherche la probabilité.

$\{\omega\}$ est l'événement élémentaire représentant l'issue de l'expérience.

Changement d'expérience : on sait que *B* est réalisé ($\omega \in$ B). B est le nouveau référentiel. On désigne par P_B la probabilité des événements issus de cette expérience qui garantit la réalisation de *B*. *A* ne peut alors être réalisé que par la réalisation conjointe de *A* et *B*. La probabilité de l'événement A, $P_B(A)$, sera donc celle de $A \cap B$ avec comme donnée : $P_B(B) = 1$. On remarque

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

alors que si les événements élémentaires sont **équiprobables**, ils le sont aussi bien dans Ω que dans B et nécessairement, si P(B) ≠ 0 :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card } B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

3 - Interprétation fréquentiste

Mais si on est dans une situation de non-équiprobabilité, l'esprit fréquentiste du programme de terminale S enseigné en 2002 demande de revenir à l'introduction des probabilités par les fréquences.

Désignons par *E* l'expérience primitive représentée par le référentiel Ω, et B une partie de Ω représentant un événement *B* associé à E, de probabilité non nulle : P(B) ≠ 0.

Si l'on reproduit *E* un grand nombre n de fois, la valeur observée f_B de la fréquence d'apparitions de *B* sera proche autant qu'on le veut de P(B) :

$$f_B = \frac{\text{nombre de réalisations de l'événement B}}{n}$$

Soit *A* un événement associé à *E*, on s'intéresse à la réalisation conjointe de *A* et *B*. P(A∩B) sera de même estimée par :

$$f_{A \cap B} = \frac{\text{nombre de réalisations conjointes de A et B}}{n}$$

On s'intéresse à la fréquence d'apparition des *A* accompagnant la réalisation de *B*, celle-ci est donnée par :

$$f_{A/B} = \frac{\text{nombre de réalisations conjointes de A et B}}{\text{nombre de réalisations de l'événement B}}$$

d'où : $f_{A/B} = \dfrac{f_{A \cap B}}{f_B}$.

La probabilité d'obtenir *A*, lorsque l'on considère l'expérience aléatoire E_B consistant à n'accepter un résultat de *E* que lorsque *B* est réalisé, est estimée par : $f_{A/B}$.

La relation obtenue entre les fréquences conduit donc à la relation liant cette probabilité

$P_B(A)$ aux probabilités a priori de $A \cap B$ et de B :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

ce qui généralise cette même relation obtenue sous l'hypothèse d'équiprobabilité.

On remarque que $P_B(A)$ est proportionnelle à $P(A \cap B)$, ce qui est cohérent avec l'idée de réduire la probabilité de A à celle de $A \cap B$ lorsque B est réalisé, avec la contrainte : $P_B(B) = 1$.

A partir du sens ainsi donné à la notion de probabilité conditionnelle, les élèves peuvent aisément relier la définition de l'indépendance stochastique de A et de B, introduite dans le modèle sous la forme : $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$, avec l'idée concrète que l'on peut s'en faire :

A et B sont indépendants si la réalisation de B ne modifie pas *la valeur* de la probabilité de A d'un modèle à l'autre : $P_B(A) = P(A)$.

4 - Deux modèles mathématiques

L'expérience primitive *E* est représentée par l'univers Ω et l'espace probabilisé $(\Omega ; P_\Omega)$.

Soient *A* et *B* deux événements de *E*, représentés par les parties A et B de Ω de probabilités $P_\Omega(A)$ et $P_\Omega(B)$ non nulles.

On interprète le fait qu'une issue de *E* réalise B en introduisant une nouvelle expérience aléatoire E_B qui consiste à ne retenir E que si B est réalisé. E_B est représentée par l'univers B.

Les issues qui, réalisant *B*, réalisent *A* sont représentées par des ω, éléments de la partie $A \cap B$ de Ω. $A \cap B$ peut être considéré comme une partie de l'ensemble B, c'est la trace $t_B(A)$ de A sur B. La probabilité conditionnelle P_B est alors définie sur B par $P_B[t_B(A)]$, que l'on abrège en

$$P_B(A) = \frac{P_\Omega(A \cap B)}{P_\Omega(B)}.$$

Le nouvel espace probabilisé est alors $(B ; P_B)$.

Mais on peut aussi considérer que pour représenter la nouvelle expérience E_B, on conserve l'univers Ω ; la définition de la probabilité conditionnelle P_B revient simplement à changer la distribution de probabilité sur Ω, remplaçant P_Ω par P_B, définie sur Ω par :

$$P_B(A) = \frac{P_\Omega(A \cap B)}{P_\Omega(B)} .$$

Pour P_B, les parties du complémentaire de B sont de probabilités nulles.

Le nouvel espace probabilisé est dans ce cas (Ω ; P_B).

C'est généralement celui-ci que les probabilistes utilisent.

Notations

On peut rencontrer deux notations : $P_B(A)$ et P(A/B). Le programme de terminale de 2002 impose $P_B(A)$.

La notation $\mathbf{P_B}$ signifie un changement de probabilité sur l'univers Ω, de la même manière qu'en analyse, on change de fonction.

La notation **P(A/B)** fait plutôt penser à un changement d'univers : A/B serait la trace de A sur B et P apparaît plutôt comme l'abréviation de « probabilité » que comme le symbole d'une mesure sur B. Certains écrivent même : Prob(A) !

De plus l'ordre de lecture de A/B fait penser à un « événement » conditionnel. De nombreux exercices de terminale sont rédigés dans cette ambiguïté. Le concept d'événement conditionnel peut avoir un sens. Mais c'est une complication inutile, inductrice d'erreurs (on ne peut parler d'événements indépendants du type A/B et C/D, car B et D ne représentent pas la même expérience aléatoire).

Troisième partie

Exemples typiques de modélisation

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

1 - Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités

Jean-Claude Girard

L'introduction des probabilités, quel que soit le niveau où elle a lieu, fait l'objet de difficultés peu comparables avec ce qu'on connaît dans les autres parties des mathématiques. Les élèves rencontrent des raisonnements d'un type différent de ceux qu'ils connaissaient auparavant et qui les déroutent. Les professeurs sont déconcertés par cette partie du programme où ils sont moins à l'aise. Certains vont jusqu'à les rejeter -"Ce ne sont pas des vraies maths !" - ou à se demander si tout cela est sérieux.

Il me semble que ces difficultés peuvent avoir plusieurs origines.

A - Obstacles épistémologiques

Définir le hasard n'est pas simple. Cela suppose au préalable que l'on admette son existence. Le fait que le hasard existe n'est pas une évidence pour tout le monde.

Pour Aristote, "*les faits que nous appelons faits de fortune ou de hasard sont des rencontres, d'ailleurs rares, de séries qui n'étaient pas comprises dans un même projet, dans une même intention*"[1].

Mais d'après Laplace[2], le hasard n'est que "*la conséquence de l'ignorance où nous sommes des véritables causes*" de ce que nous observons. Il faut se souvenir que l'époque de Laplace marque l'apogée du déterminisme : "*Nous*

1 - Cité par J.P. BENZECRI, *Histoire et préhistoire de l'analyse des données*, Editions Dunod, Paris, 1982.

2 - Pierre Simon de LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités*, Courcier imprimeur, Paris, 1814.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre"[3].

Pour Poincaré[4], un des aspects du hasard se rencontre dans une situation pour laquelle toute prédiction est impossible car présentant une grande sensibilité aux conditions initiales c'est-à-dire qu'un changement imperceptible dans les conditions de départ peut provoquer d'énormes différences dans l'état final.

La théorie récente du chaos déterministe, dont Poincaré fut le précurseur, reprend cette conception dans la caractérisation d'un régime chaotique. De plus, la connaissance du système, pendant un temps aussi long que l'on veut, ne permet pas de prévoir son évolution ultérieure.

Pour la biologie moderne ou la physique quantique, le hasard fait partie de la théorie elle-même. La connaissance de l'état passé et présent ne permet pas de prédire l'état futur mais seulement de mesurer la vraisemblance de chacun des états possibles[5].

Pour avoir fait de nombreuses fois l'expérience avec des étudiants (ayant déjà reçu ou non un enseignement de probabilités) il est amusant de voir que l'on retrouve ces différences de vues au sujet du hasard.

Après avoir lu un texte de Laplace[6] ou de Poincaré[7], les étudiants sont invités à répondre à la question : Parmi les trois phrases suivantes, quelle est celle qui correspond le plus à votre idée ?

a - le hasard n'est que la conséquence de notre ignorance,

b - le hasard dissimule l'ordre divin,

c - le hasard a constitué l'univers dans l'ordre où nous le voyons.

Au début de la séquence, une « grosse moitié » choisit la première opinion, montrant une foi sans limites dans le déterminisme et le progrès de la science pour trouver les « variables cachées ». Leur argument principal est que toute chose doit avoir une cause.

Une « petite moitié » opte pour la proposition c. Ces étudiants pensent que le hasard existe vraiment dans les choses elles-mêmes et que l'on ne

3 - ibid.

4 - Henri POINCARE, *Science et méthode*, Editions Flammarion, Paris, 1908.

5 - Voir Charles RULHA, *La physique du hasard*, Editions Hachette, Paris, 1989.

6 - Introduction, op. cit.

7 - Extrait du chapitre *Le hasard*, op. cit.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

pourra pas tout savoir et tout calculer, rejoignant en cela la science moderne. Ils citent, quand on les pousse un peu, la théorie du big-bang, Mendel ou Darwin.

Entre les deux, quelques courageux osent dire qu'ils choisissent la proposition b.

Au cours de la discussion qui ne manque pas de s'instaurer, les avis évoluent, certains changent d'opinion. Je me garde évidemment de trancher (comment le faire ?), mais j'apporte quelques arguments à chaque groupe sous la forme de citations :

"Tout ce qui existe dans l'Univers est le fruit du Hasard et de la Nécessité"

(Démocrite).

"You believe in a God who plays dice, and I in a complete law and order[8]*"*

(Albert Einstein).

"Un peu de science éloigne de Dieu, beaucoup de science y ramène..."

(Saint Augustin ?).

Sans vouloir disserter sur la médiocrité des connaissances de la jeunesse actuelle (il ne me semble pas que les dernières générations ont été différentes), de telles réflexions ont peu de chances d'avoir lieu spontanément avant que le problème ne soit abordé en philosophie en classe de terminale. D'autant plus que l'incertain n'a pas beaucoup sa place dans l'enseignement, ni à l'école ni au collège, au pays de Descartes. Il serait souhaitable, avant d'aborder les probabilités, de présenter quelques activités ayant pour objet de montrer que les choses ne sont pas toujours sûres et que, dans tous les phénomènes, physiques, biologiques, génétiques, sociaux, il existe une certaine variabilité (et c'est heureux !).

Définir les probabilités n'est pas plus simple. Il faut, là encore, admettre au préalable qu'elles existent.

Dans l'introduction de son *Calcul des probabilités* écrit en 1908, Poincaré commence le premier chapitre par cette phrase : "*On ne peut guère donner une définition satisfaisante de la Probabilité*."

C'était bien sûr avant la définition axiomatique de Kolmogorov (1930). Mais en 1970, B. de Finetti écrit (en gros caractères) dans la préface de son ouvrage sur la Théorie des Probabilités : "*LA PROBABILITE N'EXISTE PAS.*"[9]

8 - Vous croyez dans un Dieu qui joue aux dés et moi dans un ordre et une loi.

9 - Cité par Gilbert SAPORTA, *Probabilités, analyse des données et statistique*, Editions Technip, Paris, 1990.

Il apparaît donc qu'il est un peu naïf de penser que les probabilités que l'on va enseigner aux élèves ne vont pas plus loin que celles de Pascal et que cela ne pose pas de problèmes !

B - Obstacles didactiques

Compte tenu des deux dernières remarques, comment définir sans ambiguïté la probabilité d'un événement ?

Les programmes de seconde et première privilégient l'approche fréquentiste. Est-ce la plus naturelle ? Est-ce la plus « rigoureuse » ?

Remarquons d'abord que cette définition ne s'applique qu'à des événements qu'il est possible de répéter !

D'autre part, comment comprendre le sens de cette « limite » qui n'en est pas une ? (au sens classique et en supposant qu'il soit acquis par des élèves de Première).

Enfin, cette définition repose sur la loi des grands nombres dont la démonstration est basée sur les propriétés des probabilités. La boucle est bouclée !

Une deuxième définition possible, plus naturelle à première vue, est basée sur les principes de symétrie. C'est la « géométrie du hasard », selon les termes de Pascal. Un dé régulier a six faces, chacune a une probabilité de 1/6 d'apparaître, par raison de symétrie.

Malheureusement, un dé régulier, ça n'existe pas, pas plus que les fourmis de dix-huit mètres ni les vrais triangles rectangles d'ailleurs ! D'autre part, comment savoir si un dé peut être considéré comme régulier sans faire un grand nombre de lancers et voir si chacune des faces apparaît bien « approximativement » avec une fréquence de 1/6 ? De nouveau, la boucle est bouclée.

Ces deux approches de la notion de probabilité sont qualifiées d'objectives en ce sens qu'elles supposent, ce qui est loin d'être admis par tout le monde, qu'il existe une probabilité liée seulement à l'épreuve aléatoire et indépendante de l'observateur.

Pour ceux qui dénient l'existence d'une probabilité objective, une autre définition de la probabilité est possible, elle est qualifiée de subjective. La probabilité d'un événement est la mesure de l'incertitude que nous avons dans sa réalisation. Cette définition est à rapprocher de la cote à laquelle nous sommes prêts à parier qu'il va se réaliser[10].

10 - Voir T. H. WONNACOTT et R. J. WONNACOTT, *Statistique*, Editions Economica, Paris, 1991.

Autrement dit, "*We must remember that the probability of an event is not a quality of the event itself, but a mere name for the degree of ground which we, or someone else, have for expecting it*[11]". (J. Stuart Mill[12])

Il est alors possible de définir la probabilité d'événements dont il n'est pas nécessaire d'admettre la répétition.

En économie, par exemple, on chiffrera a priori la probabilité de certains événements élémentaires avant de calculer par les théorèmes classiques la probabilité d'autres événements afin de prendre une décision sur des bases moins aléatoires.

Ceci rejoint la définition d'Emile Borel[13] : "*le but principal du calcul des probabilités est de calculer les probabilités d'événements complexes en fonction des probabilités, supposées connues, de phénomènes plus simples*".

La difficulté est de chiffrer ces probabilités a priori. Sur quelles bases ? Avec quelles arrière-pensées ?

Par exemple, quelle confiance peut-on avoir dans cette déclaration du ministre de l'environnement : "*une catastrophe comme celle de Tchernobyl n'a qu'une chance sur 100 de se produire en France*" ?

Un autre exemple, auquel j'aurais tendance à accorder plus de crédit, "*la probabilité qu'une tartine de confiture tombe du mauvais côté est proportionnelle au prix de la moquette*".

Les probabilistes appelés Bayésiens définissent également une probabilité a priori mais, à la lumière de résultats obtenus dans une première série d'expériences, ils recalculent, à l'aide du théorème de Bayes, une nouvelle probabilité a posteriori.

Bayésiens et non-Bayésiens sont bien entendu opposés sur le fait de croire ou non à la possibilité de définir dans tous les cas une probabilité a priori.

Une dernière définition, axiomatique, permet de définir un ensemble de règles mathématiques cohérentes et non contradictoires, à l'image des axiomes d'incidence en géométrie ou de la théorie axiomatique des ensembles. Assez récente (1933), elle est l'œuvre du mathématicien russe A. Kolmogorov.

11 - On doit se rappeler que la probabilité d'un événement n'est pas une qualité de l'événement lui-même mais un simple nom pour le degré de confiance que nous, ou quelqu'un d'autre, avons dans sa réalisation.

12 - Cité par Albert JACQUARD, *Les Probabilités*, Editions PUF, Paris, 1974.

13 - Emile BOREL, *Probabilités et certitude*, Editions PUF, Paris, 1950.

Plus besoin de savoir ce qu'est la probabilité d'un événement ni même de savoir si elle existe. De même qu'il n'est pas besoin de définir un point ni de savoir s'il existe pour bâtir la géométrie euclidienne. Nul besoin, non plus, de savoir s'il existe un vrai triangle rectangle pour démontrer le théorème de Pythagore.

Seules sont nécessaires quelques idées de départ assez intuitives et le reste est une construction mathématique.

La seule justification, pour la géométrie, est que ça marche ! Du moins concernant le monde qui nous entoure ou alors, une autre géométrie doit être construite et utilisée.

Il en est de même pour les probabilités.

Laissons la conclusion à Borel : "*les probabilités doivent être regardées comme analogues à la mesure des grandeurs physiques, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent jamais être connues exactement mais seulement avec une certaine approximation*."

C - Obstacles mathématiques

En plus de ces problèmes de définitions qui sont déjà un petit peu déroutants, les élèves sont confrontés à d'autres difficultés mathématiques. Nous savons tous que les pourcentages sont une grande source d'erreurs au niveau de l'enseignement (et même dans la population adulte). Sur quels ensembles les calcule-t-on ? Ces ensembles sont-ils disjoints ou non, inclus l'un dans l'autre, etc... ? Les pourcentages vont-ils se multiplier ou s'ajouter ?

On retrouve les mêmes difficultés dans les probabilités. Peut-on les ajouter, les multiplier ? d'où les obstacles dans les notions d'indépendance, d'incompatibilité et de probabilités conditionnelles.

Plus subtil, l'effet de structure. Par exemple : entre deux années de référence, le prix du riz de luxe a augmenté de 15 % et celui du riz ordinaire de 25 %. Comment se fait-il que le prix moyen, les deux qualités confondues, ait augmenté de 32 % ? Essayez avec des chiffres[14] et vous aurez envie de dire comme Cantor à propos des résultats qu'il obtenait sur l'infini : "*je le vois et je n'arrive pas à le croire* !"

14 - Par exemple, si la production de riz de luxe était de 10 Mt à 200 unités la tonne et celle du riz ordinaire de 100 Mt à 100 unités la tonne et que l'année suivante, les productions étaient respectivement de 86 Mt et 24 Mt.

Les programmes actuels ajoutent une difficulté supplémentaire puisque l'on ne dispose plus des ensembles. C'est bien entendu le moment d'en parler mais il ne faut pas croire qu'ils vont être opérationnels immédiatement.

Il faut encore mentionner, pour mémoire, les difficultés de langage : la différence, d'ordinaire négligée, entre « un », « un exactement », « au moins un », « un au plus » etc... et les erreurs de logique (autre partie des mathématiques que l'on considère comme trop difficile à étudier pour elle-même jusqu'à un certain niveau et qui est supposée acquise à partir de ce même niveau sans enseignement spécial) : « A entraîne B » ne signifie pas que « B entraîne A », si « A entraîne B » alors « (non B) entraîne (non A) » et pas le contraire. Le contraire de blanc n'est pas noir (enfin pas toujours !), le contraire de 0 n'est pas forcément 1, le contraire de « jamais » n'est pas « toujours », etc...

D - Obstacles dus aux conceptions des élèves

Il est bien facile d'admettre que l'événement impossible a comme probabilité 0, mais comment admettre qu'un événement de probabilité 0 puisse se produire ?

Mieux, on peut admettre qu'un événement de probabilité « très petite »puisse être qualifié d'impossible. Borel donne l'exemple célèbre des singes dactylographes : des singes tapent au hasard sur une machine à écrire, quelle est la probabilité pour qu'ils écrivent les oeuvres de Shakespeare au complet et sans erreur ? Un tel événement a une probabilité si petite que l'on peut le qualifier d'impossible. Borel distingue d'ailleurs les événements impossibles à l'échelle humaine (ceux dont la probabilité est inférieure à 10^{-15}), impossible à l'échelle cosmique (ceux dont la probabilité est inférieure à 10^{-50}), impossible à l'échelle supercosmique (ceux dont la probabilité est inférieure à 10^{-110}).

Par contre, si une variable continue peut prendre toutes les valeurs réelles, chacune de ces valeurs a pour probabilité 0 et pourtant une de ces valeurs sera réalisée au cours de l'expérience aléatoire !

Une autre conception erronée[15] est liée à la nature du hasard. Celui-ci, dans la répétition d'une même épreuve aléatoire, devrait faire se réaliser un événement qui ne s'est pas réalisé depuis longtemps (le hasard compense). Par contre, si un événement s'est réalisé plusieurs fois, il va continuer à se

15 - En anglais, on utilise le terme imagé de “misconception”.

réaliser (c'est la célèbre loi des séries!). Ces conceptions erronées de la loi des grands nombres sont parfaitement incompatibles entre elles et pour cette raison, elles ne sont pas mobilisées par les mêmes individus dans une même situation sauf dans les « pronostics » du jeu de loto : il y a des numéros « en déficit » qu'il faut jouer parce qu'ils vont sortir (le hasard compense) et des numéros « en forme » qu'il faut jouer aussi (la loi des séries).

La première conception rejoint l'idée qui est que la normalité (si j'ose dire !), c'est la loi uniforme (bien qu'ici, c'en soit une !). Tous les numéros doivent sortir régulièrement, sans trop d'écart par rapport à ce qui est prévu sur le court terme et sans écart du tout sur le moyen terme.

Malheureusement, ce n'est pas la loi uniforme qui s'applique le mieux à la réalité, mais plutôt la loi normale.

Partout où une distribution uniforme apparaît, on reconnaît plutôt la main de l'homme que l'intervention du hasard (Dieu ou la nature ! voir la discussion du début).

Une autre idée fréquente est qu'un événement a toujours une chance sur deux de se produire, car comme disent les élèves, il y a toujours deux cas possibles "ou il se produit ou il ne se produit pas". Par exemple, je pose souvent la question suivante : "Un événement a 1 chance sur 100 de se produire au cours d'une épreuve aléatoire, quelle est la probabilité de le voir se réaliser (au moins une fois) si on répète 100 fois cette épreuve (en ayant 1 chance sur 100 à chaque fois) ?" L'erreur attendue est évidemment 100 chances sur 100 mais à chaque expérience quelques élèves répondent 1 chance sur 2 avec l'argument cité ci-dessus. J'ai l'impression que l'on retrouve cette réponse chez certains élèves chaque fois qu'ils n'ont aucune idée du résultat, ni de la méthode pour le calculer.

Il faut remarquer, à leur décharge, que la loi uniforme, dans laquelle tous les cas possibles ont la même probabilité, constitue le postulat Bayésien (voir le paragraphe précédent) c'est-à-dire la distribution a priori choisie en l'absence d'information, mais on n'est pas obligé d'être Bayésien !

Pour finir et pour compliquer encore la tâche des héroïques professeurs qui doivent enseigner les probabilités, certaines expressions de la vie courante viennent créer des confusions regrettables. Par exemple, quand un élève dit "avec un dé équilibré, la face 6 sortira en moyenne une fois sur 6", quel sens met-il derrière le mot « moyenne » ? Que signifie, pour lui, le rapport de 1 sur 6 ? Sa phrase signifie-t-elle que si on répétait un grand nombre de fois l'expérience qui consiste à jeter un dé 6 fois de suite, la moyenne du nombre de réussite dans une expérience serait de 1/6 ? Ou emploie-t-il, plus simplement, l'expression « en moyenne » comme synonyme « d'à peu près » ?

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

C'est cet amalgame entre fréquence et moyenne qui fait que, de temps en temps, certaines probabilités ont l'indélicatesse de dépasser 1.

Il faut bien reconnaître que ces complications de vocabulaire sont présentes dans tous les domaines des mathématiques. Par exemple, comment faire comprendre à un élève ce qu'est une démonstration quand, pour lui, cela consiste en une accumulation d'arguments plus ou moins reliés les uns aux autres ?

E - Obstacles dus aux conceptions des professeurs

Une autre difficulté est liée cette fois aux conceptions des professeurs par rapport aux probabilités et à la façon de les enseigner. La plupart d'entre eux ont reçu, quand ils en ont reçu, un enseignement axiomatique très éloigné de ce qu'ils sont supposés enseigner à leurs élèves (théorie de la mesure par exemple) et ils considèrent alors que cette partie des mathématiques qui fait appel uniquement, au moins au lycée, aux 4 opérations et aux pourcentages n'est pas très glorieuse à enseigner, d'autant plus qu'elle ne se fait pas sans douleur.

Certains se demandent : comment le hasard, concept mal défini et par essence insaisissable, pourrait-il faire partie d'une théorie à l'intérieur des mathématiques, par nature précises et rationnelles ?

D'autres l'admettent mais pensent que l'on ne peut pas enseigner « proprement » les probabilités au lycée (sous-entendu avant d'avoir vu la théorie de la mesure !). Ils ne se demandent pas si l'on peut faire proprement une démonstration de géométrie avant d'avoir étudié la logique formelle, s'il est loisible d'apprendre à ajouter les entiers naturels avant d'avoir vu les axiomes de Peano ou encore si l'on est autorisé à calculer le périmètre d'un cercle avant d'avoir démontré la transcendance de π ? On peut multiplier les exemples à l'infini.

De plus, on est obligé de trouver des exemples « concrets » et de se compromettre dans la pluridisciplinarité au risque bien connu d'y être moins à l'aise que dans les mathématiques éthérées.

Pour finir, certains vont jusqu'à penser que l'intérêt et l'utilité de cette partie de l'enseignement des mathématiques sont loin d'être prouvés ! Pourtant, la capacité au raisonnement probabiliste ou statistique est une des formes de l'intelligence. Elle fait cruellement défaut quand on n'y a pas été formé.

Une étape déterminante a été franchie avec les programmes de 1991 qui ont abandonné presque complètement ce morceau de bravoure que

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

constituait la combinatoire au point que pour les anciens étudiants, reproduisant peut-être les conceptions de leurs professeurs, probabilités et dénombrements étaient synonymes.

La question qui se pose maintenant à certains professeurs est donc : comment faire des probabilités sans les C_n^k ?

Un autre critique touche les difficultés de l'évaluation de la partie statistique du programme, tournée vers l'observation et l'expérimentation. Comment évaluer quand les calculatrices font tout ? On peut remarquer, cependant, que les derniers modèles font aussi le calcul formel et les dessins géométriques (en attendant les démonstrations !). C'est une évidence, il va falloir changer nos évaluations, vite et pas seulement en probabilités ou en statistique !

Un dernier argument, peut-être le plus fort, concerne le peu de sujets de bac traitant des probabilités (ou des statistiques) dans certaines séries (en C puis en S). Il permet, sans trop d'état d'âme, d'expédier rapidement ou même de renvoyer « à la maison » l'étude de ces chapitres.

F - Obstacles psychologiques

Une autre difficulté dans l'appréhension des probabilités tient à ce que l'on a tendance à donner inconsciemment une valeur plus grande à la probabilité d'un événement lorsque les conséquences de sa réalisation sont importantes (positives ou négatives), par exemple l'existence de Dieu dans le pari de Pascal ou le fait d'avoir 6 bons numéros au loto ou encore le risque d'avoir un accident d'avion alors que l'on sait par ailleurs, d'après les statistiques, que c'est un des moyens de transport parmi les plus sûrs.

G - Obstacles liés à la modélisation de la réalité (ou d'une réalité)

D'après David Ruelle[16], "*une théorie physique consiste à coller une théorie mathématique sur un morceau de réalité. Pour certains de ces morceaux de réalité, il existe des idéalisations qui font intervenir les probabilités. On s'intéresse à ces idéalisations parce qu'elles sont utiles*".

16 - David RUELLE, *Hasard et Chaos*, Editions Odile Jacob, Paris, 1991.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Il faut bien reconnaître que nous sommes dans une des rares parties des mathématiques où l'on s'intéresse à la réalité ! Il faut trouver le meilleur modèle à appliquer à la réalité ou à ce que nous percevons de la réalité avant de passer à l'application proprement dite. On n'est jamais sûr qu'un modèle soit juste. Une théorie ne s'applique que dans un cadre donné (d'où l'invention de différentes géométries, de la logique floue ou de l'analyse non standard) et une théorie n'est bonne que jusqu'à ce qu'on trouve une faille. On est alors amené à en trouver une meilleure ou une plus générale (par exemple la théorie de la relativité en renfort de la gravitation de Newton).

On est confronté à ce problème quand on veut faire comprendre à des élèves le modèle lié à l'expérience qui consiste à lancer deux dés et à faire la somme des points apparus. Certains pensent qu'il faut considérer les résultats 6 + 5 et 5 + 6 comme différents, d'autres comme identiques. Le trouble est si profond que des étudiants peuvent être tentés de penser qu'il y a plusieurs réalités (suivant que les dés sont de la même couleur ou de couleurs différentes, ce qui ne change pourtant pas la somme des points !).

La raison est que l'on croit travailler sur la réalité, alors que l'on est déjà dans un modèle ! Il y a plusieurs modèles possibles mais il n'y a qu'une réalité. Peut-être qu'une expérimentation, ou une simulation (à l'ordinateur ou avec une table de nombres au hasard), pourrait donner une idée du modèle qu'il faut choisir. On travaillerait alors, non seulement les probabilités, mais aussi le point si délicat et si général de la modélisation.

On passe souvent sous silence ces difficultés liées à la modélisation dans l'enseignement des probabilités. Les conditions de l'expérience devraient être définies clairement et sans ambiguïté mais, dans les faits, les énoncés contiennent toujours beaucoup d'implicite. C'est en partie pour cela que les enseignants peuvent trouver que tous les exercices de probabilités se ressemblent alors que les élèves ou les étudiants pensent qu'ils sont toujours différents.

Enfin, parle-t-on de l'expérience physique qui doit avoir lieu ou d'une épreuve aléatoire déjà idéalisée ou encore du modèle mathématique sous-jacent ? Comment explique-t-on alors la pertinence de ce modèle par rapport à l'expérience décrite ?

"Les sciences n'essayent pas d'expliquer ; c'est tout juste si elles tentent d'interpréter ; elles font essentiellement des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, à l'aide de certaines interprétations verbales, décrit les phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique réside uniquement et précisément dans le fait qu'elle est censée fonctionner." (John Von Neumann[17])

17 - Cité par James GLEICK, *La théorie du chaos*, Editions Albin Michel, Paris, 1989.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

En conclusion, si l'on rencontre tellement de difficultés dans l'enseignement des probabilités, n'est-ce pas parce que le hasard est difficile à appréhender, plus que la géométrie de l'univers qui nous entoure, par exemple ? Pourquoi privilégier une approche qui n'est pas sans difficultés de logique, alors que le concept de probabilité se construit (comme beaucoup d'autres) comme synthèse de ses différents aspects ? De plus, n'a-t-on pas tendance à sous-estimer les difficultés conceptuelles liées à la nature du hasard et des probabilités ? Beaucoup de philosophes et de mathématiciens, d'Aristote à René Thom, ont réfléchi sur ces notions et le débat entre hasard et déterminisme n'est pas éteint. Ce n'est sûrement pas un hasard (justement !) s'il a fallu attendre le XVII^e siècle pour voir apparaître les premiers balbutiements du calcul des probabilités et 1930 pour l'axiomatisation de la théorie. En comparaison, la géométrie était déjà largement étudiée bien avant notre ère et les éléments d'Euclide datent du IV^e siècle av. J.C.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

2 - Sur la durée de la vie et l'espérance de vie

Jean-François Pichard

Cet article présente la première utilisation de la théorie des chances en dehors des jeux de hasard. Elle a donné naissance à la démographie et à ce qui sera la statistique, avec une optique autre que descriptive. Un des problèmes qui était posé à cette époque, «le monde se dépeuple-t-il ?», est encore d'actualité : le taux français actuel de 1,7 enfants par foyer est-il suffisant pour assurer le renouvellement des générations ?

A - Environnement historique

Fixer de façon précise un début à la statistique est une entreprise hasardeuse. Dans les époques reculées, il y a eu des dénombrements partiels et ponctuels : recensements en Egypte, en Mésopotamie, en Chine (dès le 3ème millénaire avant J.C.). A l'origine, la « pré-statistique » désignait essentiellement des études concernant les domaines de la géographie humaine et économique : il s'agissait de faire l'état de la fortune d'un pays à travers le nombre de ses habitants, leurs richesses en terres, bâtiments, têtes de bétail, ..., ceci servant surtout à déterminer les capacités disponibles pour prélever des taxes ou lever une armée, d'où les réticences des habitants. Cette façon de voir continua jusqu'au XVIII^e siècle[1].

Le recueil et l'analyse des données concernant les sociétés humaines et les Etats ont d'abord été le fait d'administrateurs, d'économistes, de géographes : en Allemagne à la fin du XVII^e siècle, le mot « statisticae » est utilisé au sens d'affaires politiques ; « Statistik » est créé au XVIII^e siècle par

1 - Pour plus de précisions, voir l'article de J. HECHT, l'idée de dénombrement jusqu'à la Révolution, dans [19].

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Achenwald, un géographe, pour désigner l'art de faire connaître la force et les faiblesses d'un pays, d'un Etat.

Comme le note fort bien André M. Guerry [9] :

"Le mot Statistique, introduit à la fin du 18e siècle, signifiait d'abord la Science qui a pour objet de faire connaître un Etat sous le rapport de son organisation politique et administrative, de son territoire, de sa population, de ses forces productives de toute nature, ... Cette définition, aujourd'hui, manquerait d'exactitude... D'un côté, cette définition comprendrait dans la statistique ce qui depuis longtemps n'en fait plus partie : l'exposition de l'organisation politique des Etats ; de l'autre, au contraire, elle n'y renfermerai aucune des applications actuelles de cette science à la médecine, la physiologie comparée, ..."

Une question dont on peut dire qu'elle a donné naissance à la statistique mathématique et à la démographie (même si elle porte sur la mortalité) est celle de la durée de vie humaine.

Le début de l'analyse des statistiques démographiques date de la même époque que celui de la théorie des probabilités (milieu du XVIIe siècle), quoique en partie de façon indépendante.

On peut aussi se demander pourquoi ce genre d'étude à incidence socio-économique n'est pas intervenu plus tôt. La levée d'emprunts remboursables en rentes viagères pour se procurer des fonds au niveau national ou local (dont le coût pour l'emprunteur, et le bien-fondé pour le prêteur, font intervenir la durée de la vie humaine) est attestée depuis l'antiquité romaine[2] et cette méthode était employée de façon assez courante par les villes flamandes depuis la fin du Moyen-Age. Les enregistrements des versements, qui étaient soigneusement tenus, pouvaient fournir une large information sur la population (au moins celle concernées par les rentes). Il y avait aussi une bonne raison économique pour étudier ces données : déterminer si les rentes étaient avantageuses pour la collectivité, par rapport à un emprunt à durée fixe, et pour les souscripteurs, profitables ou non à posséder ; mais aucune analyse sérieuse d'un tel matériau n'a été faite avant de Witt et Hudde en 1671. L'établissement de la valeur était fait de manière empirique et fondé plutôt sur un pari que sur l'analyse d'observations. Il en sera de même pour les "assurances" sur les risques maritimes ou autres, condamnées par l'Eglise catholique qui considérait que c'est parier sur le malheur des gens et sur les intentions de Dieu (par exemple : Ordonnance de la Marine de 1681 en France), mais acceptées dans un pays protestant comme

2 - Tables du juriste romain Ulpien, IIIe siècle.

l'Angleterre dès la fin du XVI^e^ siècle. J'avancerai une explication possible d'une telle étude à cette époque-là : l'ambiance intellectuelle en Europe aux XVI^e^ et XVII^e^ siècles est stimulée par la redécouverte des savants de la Grèce antique que ce soit en mathématiques (e.g. Diophante par Bachet de Méziriac, puis Fermat), en physique (Aristote et Archimède avec Galilée), en astronomie, etc... ; les savants et philosophes veulent obtenir une explication du monde qui ne soit plus seulement qualitative, mais aussi quantitative, illustrée au XVII^e^ par cette idée : «mesurer, c'est comprendre».

Les initiateurs de l'*Arithmétique politique*[3], John Graunt et W. Petty, publient leurs travaux un peu après l'émergence publique de la théorie des probabilités (1654-57). A partir des registres des décès enregistrés à Londres régulièrement depuis 1603, John Graunt publie en 1662[4] la première table de mortalité et tire des conclusions de ces observations basées sur les différentes causes de mortalité, l'évaluation de la population de Londres et de l'Angleterre, et son évolution, etc...

Un historien des sciences du début du XIX^e^ siècle a écrit à ce propos :

"John Graunt, homme sans géométrie, mais qui ne manquait ni de sagacité ni de bon sens, avait, dans une sorte de traité d'arithmétique politique intitulé : 'Natural and political observations made upon the bills of mortality', *etc..., rassemblé ces différentes listes, et donné même un calcul, à la vérité fort grossier, mais du moins fort original, de la mortalité probable à chaque âge d'un certain nombre d'individus supposés nés viables tous au même instant. [...] Après Graunt, le chevalier W. Petty, dans différents essais d'économie politique, où il y avait, il est vrai, plus d'imagination que de jugement, s'était, de 1682 à 1687, occupé de semblables recherches."*

Cette table de mortalité (voir annexe 1) fut établie par Graunt à partir des maigres données qu'il avait à sa disposition : nombre de décès par sexe, avec la cause approximative de décès, mais pas l'âge. A défaut de cette donnée, il a supposé une loi simple de décroissance. En dépit du fait qu'elle ne soit pas une véritable observation de la mortalité aux différents âges, cette table a joué un rôle important pour la statistique : d'abord comme incitation

3 - D'après l'Encyclopédie Méthodique [6], "*c'est celle dont les opérations ont pour but des recherches utiles à l'art de gouverner les peuples, telles que celles du nombre des hommes qui habitent un pays; de la quantité de nourriture qu'ils doivent consommer; du travail qu'ils peuvent faire; du tems qu'ils ont à vivre ...*", c'est-à-dire, passer de descriptions qualitatives au quantitatif.

4 - John Graunt, *Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality* ..., London, 1662.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

à l'étude de la mortalité et son application aux rentes viagères, ensuite elle a montré la nécessité de données fiables. De là viennent des indications de plus en plus précises pour la tenue des registres de naissance (ou de baptême) et de décès, ainsi que le besoin de recensements.

Différents auteurs vont travailler sur ce sujet à la fin du 17e siècle : Christian et Ludwig Huygens, Van Hudden et Jean de Witt aux Pays-Bas, Wilhelm Leibniz, puis Edmund Halley en Angleterre, pour en tirer la valeur des rentes viagères.

Montucla en dit (**[17]**, p. 407) :

"Le problême des rentes viagères fut traité par Van Hudden, qui quoique géomètre, ne laissa pas que d'être bourgmestre d'Amsterdam, et par le célèbre pensionnaire d'Hollande, Jean de Witt, un des premiers promoteurs de la géométrie de Descartes. J'ignore le titre de l'écrit de Hudden, mais celui de Jean de Witt étoit intitulé : 'la Valeur des rentes viagères en raison des ventes libres ou remboursables' *(La Haye, 1671). Ils étoient l'un et l'autre plus à portée que personne d'en sentir l'importance et de se procurer les dépouillements nécessaires de registres de mortalité [...] Le chevalier Petty, Anglois, qui s'occupa beaucoup de calculs politiques, entrevit le problême, mais il n'était pas assez géomètre pour le traiter fructueusement, en sorte que, jusqu'à Halley, l'Angleterre et la France qui empruntèrent tant et ont tant emprunté depuis, le firent comme des aveugles ou comme de jeunes débauchés".*

Christiaan Huygens, le premier à avoir publié un traité sur la théorie des chances, va travailler sur ce sujet, en 1669 à l'incitation de son frère Ludwig, qui invente à l'occasion ce qu'on appela ensuite «l'espérance de vie». Il a aussi correspondu à ce propos avec Hudden et de Witt, qui s'occupaient de la valeur des rentes viagères. Quoique cette correspondance n'ait eu aucune influence sur les travaux ultérieurs (elle sera publiée bien plus tard en 1920), elle est intéressante par les questions qu'elle pose.

Il est frappant de constater que les deux frères utilisent les outils, mis au point pour des jeux de hasard où les «chances» sont calculées sur des cas également possibles, pour une situation où on ne connaît que les effectifs observés de mortalité par tranche d'âge (ou présentés comme tels par Graunt) sur un échantillon. Prendre les fréquences correspondantes comme des chances de survie jusqu'à l'âge désigné, consiste à considérer soit que l'échantillon est représentatif de la population comme étant une réduction (un homothétique) de celle-ci, soit que cette fréquence est la valeur la plus vraisemblable à attribuer à cette chance inconnue. C'est alors une probabilité au sens subjectif, et on retrouve la problématique de Jacques Bernoulli. Cette

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

confusion entre fréquence et probabilité[5] ne sera éclaircie qu'à la fin du 18e siècle par Laplace et Condorcet avec l'utilisation de probabilités a posteriori suivant la méthode de la probabilité des causes par les événements (dit aussi théorème de Bayes).

Considérons quelques-uns des points abordés dans cette correspondance. Ludwig demande à son frère :

"la question est jusqu'à quel âge doit vivre naturellement un enfant aussitôt qu'il est conçu. Puis un enfant de 6 ans, puis un de 16 ans, etc...".

Il utilise l'espérance de vie, somme des produits du nombre de personnes dans une tranche d'âge par l'âge milieu de cette tranche, et divise par le nombre total de personnes (ici 100), ce qui donne 18 ans et 2 mois pour un enfant nouvellement conçu, d'après la table de Graunt ; puis détermine l'espérance de vie conditionnelle :

"pour... spécifier combien il reste de vie à chaque personne d'un tel ou tel âge, ... J'ôte premièrement les 108 ans (qui est l'âge des 36 enfants qui meurent au-dessous des 6 ans) de tout ce nombre de 1822 ans; reste 1714 ans, lesquels doivent être partagés entre les 64 personnes qui restent, ce qui fait pour chacun, c'est-à-dire pour chaque enfant de 6 ans, 26 ans et environ 10 mois de sorte qu'il leur reste encore à vivre au susdit âge de 6 ans, 20 ans et 10 mois..."

Christiaan oppose la vie probable (médiane) à l'espérance :

"quoique l'espérance d'un enfant conçu vaille ces 18 ans 2 $\frac{1}{2}$ mois, ce n'est pas beaucoup à dire qu'il soit apparent qu'il mourra devant ce terme. De sorte que si on voulait gager qu'il y parviendrait, la partie serait désavantageuse car on peut seulement gager avec égal avantage qu'il vivra jusqu'à 11 ans environ."

Christiaan Huygens, pour s'éviter des calculs, fait un graphique – le tracé d'une ligne courbe – qui donne le nombre de survivants en fonction de l'âge ; c'est un diagramme des effectifs cumulés décroissants, que l'on retrouvera ci-après avec Fourier. Il fait ensuite le tracé d'une courbe qui donne la durée moyenne de vie en fonction de l'âge, c'est-à-dire l'espérance de vie conditionnellement à l'âge[6]. Il cherche aussi la durée probable de vie conjointe de deux personnes en considérant implicitement qu'il y a indépendance des deux durées.

5 - Par exemple, par Antoine Deparcieux, *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, 1746, ainsi que Buffon, Tables de mortalité, 1749, in *Oeuvres complètes*, 1855, tome 2, pp.87 et sq., et *Des probabilités de la durée de la vie*, tome 12, pp.209 et sq.

6 - Christiaan Huygens, *Oeuvres complètes*, La Haye, Martinus Nijhoff, tome 6, 1920. Pour plus de détails, voir l'article de D. LANIER, L'espérance du hollandais, dans [21].

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Bien que non publiée, l'utilisation de graphiques pour représenter un phénomène, des données d'observation, sera faite épisodiquement et ne deviendra un peu courante en statistique qu'au début du XIX^{e} siècle[7].

De même que pour Huygens, les travaux de Leibniz seront publiés bien après (environ deux siècles). Connu comme mathématicien ou philosophe, Leibniz était aussi très versé en droit et jurisprudence, il s'occupa d'administrer des entreprises à plusieurs occasions. Il s'est intéressé à la théorie des probabilités dès 1676 et au sujet en discussion ici[8]. Il a écrit plusieurs textes sur les rentes viagères et la durée de la vie humaine et en particulier un *Essay de quelques raisonnements nouveaux sur la vie humaine et sur le nombre des hommes*, vers 1680, où il fait l'hypothèse que la mortalité est uniforme à tous les âges[9]. Avec cette hypothèse simplificatrice, il y a bien entendu égalité entre vie moyenne et vie probable (médiane). Il remarque de plus que ses calculs sont valables seulement si la population est stationnaire, i.e. s'il y a autant de naissances que de décès.

Le mémoire de Edmund Halley *An estimate of the Degrees of the Mortality... ; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon the Lives*, *Philosophical Transactions*, 1693[10], a posé les fondements d'une théorie correcte de la valeur des rentes viagères. Il établit ses conclusions sur la mortalité dans la ville de Breslau (Allemagne), car elle compte une population où les mouvements (immigration et émigration) sont négligeables c'est-à-dire une population fermée, à l'inverse de ce qui se passe à Londres. En effet, étudier la mortalité d'un même groupe de personnes est une condition fondamentale pour établir valablement une table de mortalité, afin de pouvoir répondre à une question du genre «combien de temps peut espérer vivre un enfant

7 - Voir par exemple [8] et mon article, Jean-François PICHARD : *Le début des représentations graphiques en statistique*, Actes de la 46ème rencontre de la CIEAEM, Toulouse, 1994, t.2, pp. 136-145.

8 - Voir en particulier *L'estime des apparences* [14], abondamment commenté et annoté par M. Parmentier.

9 - Cette hypothèse est complètement arbitraire et ne correspond même pas à la table de Graunt qu'il a étudié, qu'il explique ainsi :"... *mais ce surplus des baptêmes et des morts pourra être négligé, puisque s'il en naissait plus que je ne suppose, ils sont aussi moissonnés plutôt que je ne suppose, dans leur plus tendre enfance, et, par conséquent, il n'est pas nécessaire de les compter*".

10 - Une traduction a été faite en français par Jacques DUPAQUIER, *La table de mortalité d'E. Halley*, Annales de démographie historique, 1976, pp. 485-503.

nouveau-né ?». En ce cas, si la population est stationnaire (c'est-à-dire s'il y a autant de naissances que de décès), l'âge moyen des décédés et l'espérance de vie ont des mesures égales.

Pendant le XVIII[e] siècle, d'autres auteurs vont travailler sur ce sujet avec en vue la recherche d'une loi de mortalité donnant le nombre de survivants en fonction de l'âge qui s'ajuste bien aux observations. Une première étude est faite par Abraham de Moivre à partir de la table de Halley, puis complétée par d'autres tables **[15]** ; ce sujet sera aussi abordé par Buffon (**[3]** et Tables de mortalité dans *Oeuvres*, tome 2), Euler, d'Alembert, Daniel Bernoulli, entre autres.

De Moivre publie un livre *A Traitise of Annuities on Lives*, en 1724, qui sera inséré, revu et augmenté, dans les seconde et troisième éditions de son grand traité *The Doctrine of Chances* (1738, 1756). Moivre fait référence aux travaux de Graunt et de Halley et republie (p. 345) la table calculée par Halley. De Moivre prend comme hypothèse que les probabilités[11] de vie décroissent en progression arithmétique, et, selon ses termes

"en comparant cette hypothèse avec la Table du Dr. Halley, à partir des Observations faites à Breslau, on les trouvera très bien approchantes." (Voir annexe 2.)

En France, Antoine Deparcieux[12] construit une table de mortalité en corrigeant les données enregistrés (hormis les jeunes, les âges des décédés étaient souvent donnés en chiffres ronds) et en essayant d'obtenir des valeurs représentatives de la population française. Il en établit la théorie et fait explicitement la distinction entre durée de vie probable et durée de vie moyenne. Buffon s'est aussi intéressé à cette question : table de mortalité dans son *Histoire Naturelle* en 1749 (*Oeuvres*, tome 2) et dans l'*Essai d'arithmétique morale* (*Oeuvres*, tome 12).

Des lois de mortalité et des lois de croissance de la population sont étudiées pendant le XVIII[e] siècle ; cette recherche utilise le calcul des probabilités et en même temps le fait progresser, par exemple par Leonhard Euler[13]. Lors de la controverse sur les avantages ou inconvénients de l'inoculation contre la petite vérole, entre Daniel Bernoulli et D'Alembert, ce

11 - Prises ici dans un sens subjectiviste.

12 - Antoine Deparcieux, *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, 1746.

13 - Leonhard Euler, *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain*, Mémoires de l'Académie Royale de Berlin pour 1760, 1767.

dernier fait usage de représentations graphiques – des *courbes de mortalité*[14] – pour appuyer son argumentation ; cependant les données sont hypothétiques et non basées sur une table de mortalité.

Lacroix, dans son *Traité élémentaire de calcul des probabilités* **[12]**, donne un exposé sur les tables de mortalité et les résumés numériques que sont la durée de vie probable et la durée de vie moyenne, qu'il attribue à Nicolas Bernoulli. Dans une édition suivante, il montre (p. 333 et sq.) comment obtenir ces résumés à partir d'une courbe de mortalité.

Etudions un peu plus en détail ce qui concerne ces courbes de mortalité d'après ce qu'en dit Joseph Fourier, le premier à avoir publier une courbe de mortalité basée sur des données effectives dans **[7]**[15], ouvrage qui est moins accessible que **[12]**. Dans la partie I : *Notions générales sur la population*, il fait un exposé de la théorie des tables de mortalité et des indicateurs qu'on peut leur associer. Il termine cet exposé par :

> *"82. Nous indiquerons maintenant une partie de la question qui dépend de la théorie mathématique, mais que nous ne devions pas omettre entièrement, parce qu'elle est très propre à rendre sensibles les conséquences que nous avons exposées. La loi constante de la population peut être exprimée par une construction géométrique (Voyez fig. 1ère .)"*

Il place l'âge en abscisse et porte en ordonnée le nombre de survivants à cet âge.

> *"La première ordonnée* ov_a *exprime donc un certain nombre d'hommes nés ensemble, et les ordonnées suivantes expriment combien il en existe encore après un tems donné. Chaque perpendiculaire montre le nombre des survivans et cette perpendiculaire décroît insensiblement, à mesure que le tems s'écoule, jusqu'à ce qu'elle devienne nulle, lorsque l'abscisse représente la plus longue durée de vie."*

> *"84. 1°. La population totale, ou le nombre des vivans de tout âge est exprimé (fig. 1) par l'aire totale de la courbe* $v_a\ v\ v'\ v''$ *etc... ; c'est-à-dire par la surface comprise entre la courbe et les droites* ov_a *et* ov_∞. *Une partie quelconque de la population, par exemple, le nombre des vivans dont l'âge est compris entre oh et oh' est exprimée par l'aire partielle hvv'h' que la*

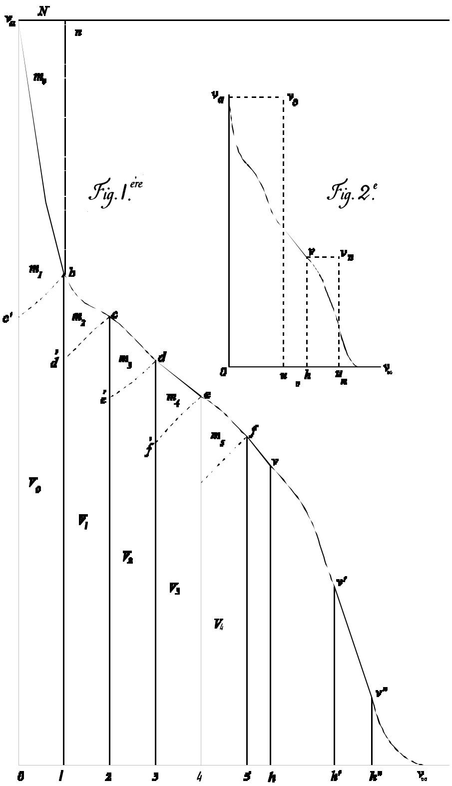
14 - D'Alembert introduit l'expression « courbe de mortalité » et des graphiques dans ses *Opuscules Mathématiques*, tome iv, 1761.

15 Cet ouvrage n'est pas signé, mais il est attribué à Fourier qui était alors le directeur du service statistique du département de la Seine.

courbe termine au-dessus de l'intervalle hh', et qui est comprise entre les ordonnées vh et v'h'. Ce n'est donc point l'ordonnée qui est la mesure proprement dite du nombre des habitans d'un âge marqué; c'est l'aire partielle qui a pour base l'intervalle fini ou infiniment petit des limites de cet âge."

"85. 2°. Le nombre total des naissances annuelles N est exprimé (fig. 1) par l'aire rectangulaire $ov_a\,n1$ qui a pour hauteur la première ordonnée ov_a et pour base l'intervalle 01, ou l'unité de temps.

Les nombres $V_0\ V_1\ V_2\ V_3\ V_4$ etc... inscrits dans la table (B)[16], article (8), sont représentés par les aires partielles qui reposent sur les intervalles successifs 01 12 23 égaux à l'unité, et qui sont terminés par les arcs de la courbe."

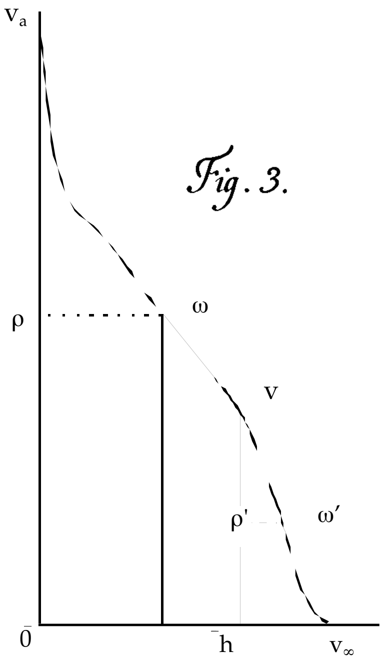


A partir de cette courbe de mortalité, Fourier donne des constructions géométriques qui permettent d'obtenir les valeurs des résumés numériques : moyenne ou espérance de vie et médiane ou durée probable.

"86. 3°. Pour connaître par ces constructions la durée moyenne de la vie entière, il faut (fig. 2) former un rectangle $v_a o u_0 v_0$ dont la première ordonnée soit v_a, et en augmenter la base ou jusqu'à ce que l'aire du rectangle soit précisément égale à l'aire totale comprise entre la courbe $v_a v v_\infty$. et les droites ov_a ov_∞.. Cette longueur ou est la mesure exacte de la durée moyenne de la vie.

16 - Voir l'annexe 3 ; les V_i représentent le nombre de vivants à la fin de la i^e année.

Si l'on veut connaître la durée moyenne de la vie, à partir d'un âge donné oh, il faut former un rectangle vhu$_0$*v*$_0$ *dont la hauteur soit l'ordonnée vh, et augmenter la base hu*$_0$*, jusqu'à ce que l'aire vhu*$_0$*v*$_0$ *du rectangle soit égale à l'aire restante comprise entre la courbe vv*$_\infty$ *et les droites hv hv*$_\infty$"



"*87. 4°. Pour connaître la* durée probable *de la vie ou cette durée* intermédiaire, *telle qu'il y a autant d'hommes qui parviennent au de-là qu'il y en a qui meurent avant de l'atteindre, il faut marquer (fig. 3) le milieu p de la première ordonnée, et par ce point p mener une parallèle aux abscisses jusqu'à la rencontre de la courbe au point ω, la longueur pω mesure la durée probable de la vie entière.*

Si l'on veut connaître cette durée probable à partir d'un âge donné oh, il faut marquer le milieu p' de l'ordonnée vh, et par le point p' mener une parallèle à l'axe hv$_\infty$ *jusqu'à la rencontre de la courbe au point ω'. La longueur p'ω' est la mesure de la durée probable de la vie à partir d'un âge donné."*

Fourier fait la distinction entre l'espérance de vie et l'âge moyen.

"*89. 6°. Pour connaître l'*âge moyen*, c'est-à-dire l'âge que l'on trouverait si l'on ajoutait ensemble les âges actuels de ceux qui composent la population, et si l'on divisait la somme de ces âges par le nombre des vivans; il faut concevoir (fig. 5) une axe Aa servant d'appui au-dessous de l'aire totale v*$_a$*ov*$_\infty$*, et tel que cette aire demeure en équilibre, le poids de l'aire partielle située à la gauche de l'axe faisant équilibre au poids de l'aire restante située à la droite. La distance comprise entre l'axe Aa et la première ordonnée ov*$_a$*, mesure l'âge moyen ou cet âge qu'aurait chacun des vivans, si tous mettaient en commun leur âge actuel."*

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

On peut se rappeler que Fourier était aussi physicien, ce qui l'a peut-être amené à cette analogie entre une distribution statistique et une distribution de masses en mécanique pour obtenir la valeur moyenne comme centre de gravité. Il s'intéresse ensuite à la loi de mortalité. Il rappelle la loi implicite de la table de Graunt et l'approximation faite par de Moivre.

> *"92. ... Il existe toujours une certaine ligne courbe qui représente, dans des circonstances données, le décroissement graduel d'un grand nombre d'hommes nés ensemble ; mais il n'y a aucune loi analytique régulière qui réponde à la figure de cette ligne. On ne peut douter d'ailleurs qu'elle ne subisse des changemens considérables en vertu d'une multitude de causes naturelles ou physiques, dont l'action serait long-tems prolongée. Cette figure serait celle d'une courbe logarithmique si la stabilité de la vie était la même à tous les âges : mais cette supposition est inadmissible. On se rapproche un peu plus des faits observés en comparant la partie moyenne de la ligne au cours d'une droite inclinée vers l'axe. Il faut se rappeler que les parties de cette courbe très-voisines des deux extrémités et surtout de la première, sont peu connues et sujettes à de grandes variations."*

Pour la première remarque faite dans ce paragraphe, J.H. Lambert[17] avait proposé

$$y = 10\,000 \left(\frac{96 - x}{96}\right)^2 - 6\,176\,(e^{-\frac{x}{13,682}} - e^{-\frac{x}{2,43114}})$$

comme équation de la loi de mortalité sur les registres de Londres, et on peut vérifier que cette fonction n'est pas simple. Karl Pearson a montré à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle que la loi de mortalité est une somme de plusieurs lois normales[18]; il ne peut donc y avoir de loi simple et non probabiliste pour la mortalité.

Fourier termine en mettant en garde contre l'utilisation des tables de mortalité pour un individu particulier.

> *"95. On n'a point expliqué dans cet écrit tous les usages des tables de mortalité : mais on en a démontré tous les principes. Ces tables qui étaient entièrement inconnues des anciens, et dont l'origine ne remonte qu'au milieu du XVII^{e} siècle, intéressent plusieurs sciences, et servent de*

17 - Johann L. Lambert, *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik ...*, 1765.

18 - Karl Pearson, *The Chances of Death*, Londres, 1897.

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

fondement à des établissemens utiles. En les supposant déduites avec beaucoup de soin des registres publics, elles représentent la loi moyenne qui convient à la masse de la nation : mais il est évident que l'application qu'on en ferait à une personne désignée ne peut être qu'incertaine. Les résultats généraux sont vrais en eux-mêmes; et ils ont le plus haut degré de certitude si l'on considère un très-grand nombre d'hommes : mais ils sont seulement probables, si on les rapporte à une seule personne."

B - Questions

1. A partir de l'extrait de Graunt (annexe 1), déterminer les nombres moyens proportionnels correspondants aux nombres de survivants pour chaque tranche d'âge.

2. A partir de la table de Graunt, retrouver les calculs des frères Huygens sur la durée moyenne de vie (l'espérance de vie à la naissance) et la vie probable (âge médian). Ces deux valeurs sont-elles égales ? Construire la courbe de mortalité.

3. En prenant l'hypothèse simplificatrice de Leibniz de mortalité uniforme, calculer la durée moyenne de vie et la vie probable. Ces deux valeurs sont-elles égales ? Pourquoi ? Construire la courbe de mortalité.

4. Construire la courbe de mortalité à partir de la table de Halley ou de Kesserboom (données en annexe 2). Utiliser la construction proposée par Fourier pour déterminer la durée moyenne de vie.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Bibliographie

[1] Jean le Rond D'ALEMBERT : *Opuscules Mathématiques*, vol.2, 1761, vol.4, 1768.

[2] Jacques BERNOULLI : *Ars conjectandi*, 1713, Traduction de Norbert MEUSNIER, réédité par l'IREM de Rouen, 1987.

[3] Georges Louis LECLERC de BUFFON : *Essai d'arithmétique morale*, 1777, *Oeuvres complètes*, tome 12, pp. 154-208, Editions Garnier frères, Paris, 1855.

- - - et aussi in *Un autre Buffon* par J.L. BINET et J. Roger, Editions Hermann, Paris, 1977.

[4] Marie Jean Antoine CARITAT de CONDORCET : *Arithmétique politique, Textes rares ou inédits* 1767-1798, édité par B. Bru et P. Crépel, INED-PUF, Paris, 1994.

- - - *Mathématique et société*, commentaire de R. Rashed, Hermann, Paris, 1974.

[5] Jacques et Michel DUPAQUIER : *Histoire de la démographie*, Perrin, Paris, 1985.

[6] *Encyclopédie Méthodique*, Mathématiques, 1785, réédition. ACL, 1987.

[7] Joseph FOURIER : *Recherches statistiques sur la ville de Paris et le département de la Seine*, Paris, 1821.

[8] H.G. FUNKHOUSER : Historical development of the graphical representation of statistical data, *Osiris*, p. 269-404, 1937.

[9] André GUERRY : *Statistique morale de l'Angleterre comparée avec celle de la France*, Baillière, Paris, 1864.

[10] Christian HUYGENS : *Ratiociniis in aleae ludo*, 1657, traduction française “Du calcul dans les jeux de hasard” in tome 14, *Oeuvres complètes*, 22 vol. 1888-1950, La Haye.

[11] M.G. KENDALL and R.L. PLACKET, eds : *Studies in the history of statistics and probability*, vol. 2, C. Griffin & Co, Londres, 1977.

[12] Sylvestre François LACROIX : *Traité élémentaire de calcul des probabilités*, Paris, 1816 ; reproduit par IREM de Paris 7, 1994.

[13] Pierre Simon LAPLACE : *Essai philosophique sur les probabilités*, 1814, 5e édition, 1825, préface de René Thom, postface de B. Bru, Editions Bourgois, 1986.

[14] Gottfried Wilhelm LEIBNIZ : *L'estime des apparences*, traduction et notes de M. Parmentier, Vrin, 1995.

[15] Abraham DE MOIVRE : *A Traitise of Annuities on Lives*, 1724, in *The Doctrine of Chance*, 2e édition, 1738, 3e édition, 1756.

[16] Pierre Rémond DE MONTMORT : *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, 1708, 2e éd., 1713.

[17] Jean-François MONTUCLA : *Histoire des mathématiques*, 4 tomes (tome 3, p. 380-426 sur les probabilités), 1799-1802, réédition Blanchard, Paris, 1968.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

[18] E.S. PEARSON and M.G. KENDALL, eds : *Studies in the history of statistics and probability*, vol. 1, C. Griffin & Co, Londres, 1970.

[19] *Pour une histoire de la statistique*, Economica/INSEE, 1987.

[20] R. RASHED éd. : *Sciences à l'époque de la révolution française, Recherches historiques*, Librairie Blanchard, Paris, 1988.

[21] *Scholies* n°16, Actes du séminaire interdisciplinaire d'histoire des sciences du lycée Malherbe de Caen, IREM de Caen, juin 1995.

[22] I. TODHUNTER : *A history of the mathematical theory of probability*, from the time of Pascal to that of Laplace, 1865, réédition Chelsea, New York, 1965.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Annexe 1

Extrait de John Graunt : *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality*, 1662.

Sur 100 individus conçus et animés, 36 environ meurent avant l'âge de 6 ans, et un seul peut-être est survivant à 76 ans. Comme il y a 7 décennies entre 6 et 76, nous avons recherché six nombres moyens proportionnels entre 64, nombre de survivants à 6 ans, et 1, celui qui survit à 76 ans; et nous trouvons que les nombres suivants sont pratiquement assez proches de la vérité, car les Hommes ne meurent pas selon des proportions exactes ni en fractions :

Sur 100 individus, il meurt pendant :

les six premières années	36
les dix années suivantes ou 1ère décennie	24
la 2ème décennie	15
la 3ème décennie	9
la 4ème décennie	6
la suivante	4
la suivante	3
la suivante	2
la suivante	1

Il s'ensuit que, sur ces 100 individus conçus, il en survit :

au bout de 6 ans	64
au bout de 16 ans	40
— 26 ans	25
— 36 ans	16
— 46 ans	10
— 56 ans	6
— 66 ans	3
— 76 ans	1
— 86 ans	0

L'âge des décédés n'étant pas indiqués dans les registres, mais seulement les causes approximatives de décès, il semble que Graunt ait noté la proportion de ceux qui meurent de maladies infantiles et qu'il ait ajouté la moitié de ceux mourant de maladies touchant beaucoup les enfants comme

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

la rougole. La proportion ainsi obtenue est attribuée à la tranche d'âge de 0 à 6 ans (la mortalité ainsi attribuée aux enfants est considérable). Ensuite il considère que peu de personnes vivent au-delà de 76 ans et il suppose que la mortalité est uniforme.

Selon Hacking, les nombres obtenus résultent de la résolution de l'équation $64(1 - p)^7 = 1$, où p est la « chance » de mourir dans une décennie donnée, puis en arrondissant à l'entier le plus proche.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Annexe 2

Appendice de *A Treatise of Annuities on Lives*, par Abraham de Moivre, 2e édition, 1756

N°. VII

Les probabilités de la vie humaine, selon différents auteurs.

Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants
1	1000	16	622	31	523	46	387	61	232	76	78
2	855	17	616	32	515	47	377	62	222	77	68
3	798	18	610	33	507	48	367	63	212	78	58
4	760	19	604	34	499	49	357	64	202	79	49
5	732	20	598	35	*490	50	346	65	192	80	41
6	710	21	592	36	481	51	335	66	182	81	34
7	692	22	586	37	472	52	324	67	172	82	28
8	680	23	580	38	463	53	313	68	162	83	23
9	670	24	574	39	454	54	302	69	152	84	19
10	663	25	*567	40	445	55	*292	70	142	*	*
11	653	26	560	41	436	56	282	71	*131		
12	646	27	553	42	427	57	272	72	120		
13	*640	28	546	43	*417	58	262	73	109		
14	632	29	539	44	407	59	252	74	98		
15	628	30	*531	45	397	60	242	75	*88		

Table I, par Dr. *Halley*.

Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants
0	1400	16	849	31	699	46	550	61	369	76	160	91	7
1	1125	17	842	32	687	47	540	62	356	77	145	92	5
2	1075	18	835	33	675	48	530	63	343	78	130	93	3
3	1030	19	826	34	665	49	518	64	329	79	115	94	2
4	993	20	817	35	655	50	507	65	315	80	100	95	1
5	964	21	808	36	645	51	495	66	301	81	87	96	0.6
6	947	22	800	37	635	52	482	67	287	82	75	97	0.5
7	930	23	792	38	625	53	470	68	273	83	64	98	0.4
8	913	24	783	39	615	54	458	69	259	84	55	99	0.2
9	904	25	772	40	605	55	446	70	245	85	45	100	0.0
10	895	26	760	41	596	56	434	71	231	86	36	*	
11	886	27	747	42	587	57	421	72	217	87	28		
12	878	28	735	43	578	58	408	73	203	88	21		
13	870	29	723	44	569	59	395	74	189	89	15		
14	863	30	711	45	560	60	382	75	175	90	10		
15	856												

Table II, par Dr. *Kersseboom*.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Annexe 3

Table de mortalité de *Deparcieux*, utilisée par Fourier, [7], p. 15

ans			ans			ans			ans		
0	V_0	1 359	24	V_{24}	782	48	V_{48}	599	72	V_{72}	271
1	V_1	1 092	25	V_{25}	774	49	V_{49}	590	73	V_{73}	251
2	V_2	1 043	26	V_{26}	766	50	V_{50}	581	74	V_{74}	231
3	V_3	1 000	27	V_{27}	758	51	V_{51}	571	75	V_{75}	211
4	V_4	970	28	V_{28}	750	52	V_{52}	560	76	V_{76}	192
5	V_5	948	29	V_{29}	742	53	V_{53}	549	77	V_{77}	173
6	V_6	930	30	V_{30}	734	54	V_{54}	538	78	V_{78}	154
7	V_7	915	31	V_{31}	726	55	V_{55}	526	79	V_{79}	136
8	V_8	902	32	V_{32}	718	56	V_{56}	514	80	V_{80}	118
9	V_9	890	33	V_{33}	710	57	V_{57}	502	81	V_{81}	101
10	V_{10}	880	34	V_{34}	702	58	V_{58}	489	82	V_{82}	85
11	V_{11}	872	35	V_{35}	694	59	V_{59}	476	83	V_{83}	71
12	V_{12}	866	36	V_{36}	686	60	V_{60}	463	84	V_{84}	59
13	V_{13}	860	37	V_{37}	678	61	V_{61}	450	85	V_{85}	48
14	V_{14}	854	38	V_{38}	671	62	V_{62}	437	86	V_{86}	38
15	V_{15}	848	39	V_{39}	664	63	V_{63}	423	87	V_{87}	29
16	V_{16}	842	40	V_{40}	657	64	V_{64}	409	88	V_{88}	22
17	V_{17}	835	41	V_{41}	650	65	V_{65}	395	89	V_{89}	16
18	V_{18}	828	42	V_{42}	643	66	V_{66}	380	90	V_{90}	11
19	V_{19}	821	43	V_{43}	636	67	V_{67}	364	91	V_{91}	7
20	V_{20}	814	44	V_{44}	629	68	V_{68}	347	92	V_{92}	4
21	V_{21}	806	45	V_{45}	622	69	V_{69}	329	93	V_{93}	2
22	V_{22}	798	46	V_{46}	615	70	V_{70}	310	94	V_{94}	1
23	V_{23}	790	47	V_{47}	607	71	V_{71}	291	95	V_{95}	0

Les V_i désignent le nombre de vivants à la fin de l'année i.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

3 - Le problème *croix ou pile* de d'Alembert, réalité observable et modélisation

Michel Henry

A - Issues observables et choix d'un univers

Pour illustrer l'importance de séparer modèle et réalité, analysons les confusions présentes dans le raisonnement de d'Alembert[1] exposé dans l'article *croix ou pile* de La Grande Encyclopédie[2].

D'Alembert propose l'exercice suivant :

"On demande combien il y a à parier qu'on amènera « croix » en jouant deux coups consécutifs".

Il répond : *"... dès qu'une fois « croix » est venu, le jeu est fini, ... Ainsi il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles : « croix », premier coup ; « pile », « croix », premier et second coup ; « pile », « pile », premier et second coup. Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier".*

D'Alembert soulève là un problème de fond, à l'origine de conceptions erronées très répandues chez les élèves. Déjà, en 1654, Fermat s'était attiré les critiques de Roberval à propos de sa solution au problème des partis : pour dénombrer les combinaisons favorables, il prolongeait en une partie "*feinte*" un jeu de pile ou face en trois manches gagnantes, déjà emporté par l'un des joueurs, *"pour rendre tous les hasards égaux"* selon ses termes.

---

1 - Jean Le Rond d'Alembert, mathématicien prestigieux du 18ème siècle, mieux connu pour d'autres travaux, Secrétaire de l'Académie des Sciences, auteur avec Diderot de la *Grande Encyclopédie Universelle*, publiée entre 1751 et 1772.

2 - Ce texte de l'Encyclopédie est donnée en entier en annexe 1 de l'article 3 de la première partie : *A propos de la définition de la probabilité*. On pourra le lire attentivement, ainsi que les commentaires épistémologiques de Jean-Claude THIENARD, avant de poursuivre cette analyse.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

D'Alembert envisage bien les quatre combinaisons possibles : (« croix », « croix ») ; (« pile », « croix ») ; (« croix », « pile ») ; (« pile », « pile »), mais prétend *"réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup"*, puisqu'alors l'événement dont on cherche la probabilité : « avoir au moins un ***croix*** en deux coups » est réalisé.

Nous avons ici deux modèles possibles, avec deux univers Ω à trois ou à quatre éléments. Ils sont aussi valables l'un que l'autre, exprimant un choix de modélisation : quelles issues retenir pour décrire les résultats possibles de cette expérience aléatoire ? D'Alembert penche pour les issues réellement observables dans les strictes conditions du jeu. Mais, confondant réalité et modèle, il ne voit pas que d'autres hypothèses de modèle sont nécessaires pour pouvoir donner une valeur (et un sens) à la probabilité de son événement. Quelle est la répartition de la probabilité sur Ω ? Quelle indication le protocole expérimental donne-t-il à cet égard ?

Il semblerait que d'Alembert fut victime de cette conception erronée selon laquelle il y a équiprobabilité d'office pour les issues observables ? Cette conception s'exprime souvent chez les élèves quand, devant une urne contenant des boules blanches et des boules noires, sans indication sur leurs proportions, ils déclarent : *"j'ai une chance sur deux d'avoir une blanche"*.

Avant de donner la probabilité demandée, il convient ici de préciser sur quel univers Ω on fait l'hypothèse d'équiprobabilité et de le justifier. Laplace, dans son essai philosophique[3], reprend cet exercice et tranche immédiatement : *"il est clair qu'il peut arriver quatre cas **également** possibles..."*. Est-ce bien aussi clair que cela ? Que peut-on dire à un élève qui ne serait pas convaincu par ce *"il est clair que"* ?

B - Hypothèses de modèle

Dans le modèle probabiliste d'aujourd'hui, à partir de l'univers de d'Alembert que nous désignerons par $\Omega = \{c_1 ; (p_1, c_2) ; (p_1, p_2)\}$, nous dirions : « amener ***croix*** au premier coup » est un événement de probabilité $P(c_1) = 1/2$. « Amener ***pile*** au premier coup » est aussi un événement de probabilité 1/2. Cet événement se décompose en deux événements élémentaires, (p_1, c_1) et (p_1, p_2), chacun de probabilité 1/4. L'événement

3 - On trouvera également ce cexte de Laplace dans le document T2 présenté au début du troisième article de la première partie : *A propos de la définition de la probabilité*.

« amener au mois un ***croix*** en deux coups » est représenté par la réunion disjointe de $\{c_1\}$ et $\{(p_1, c_2)\}$, sa probabilité est la somme de celles de ces derniers : 1/2 + 1/4 = 3/4.

Autrement dit, l'équiprobabilité sur « **croix** » et « **pile** » entraîne logiquement l'équiprobabilité sur les couples possibles, obtenus en deux parties, **que celles-ci soient effectivement jouées ou non.**

Mais cela suppose, outre l'hypothèse d'équiprobabilité sur « **croix** » et « **pile** », que l'axiome d'additivité de la probabilité est «naturel». Cette question de l'adéquation du modèle probabiliste à l'idée que l'on se fait de la réalité ne peut être tranchée par l'argumentation mathématique. Une interprétation fréquentiste permettra de convaincre certains : si on recommence ce jeu un très grand nombre de fois, la fréquence des jeux où l'on obtient un « **croix** » se stabilisera vers une valeur proche de 0,75 (il faudra en faire plus de 1 000 pour confirmer cette valeur contre le 0,66 de d'Alembert, avec une fiabilité acceptable : c'est un test d'hypothèse). Mais alors, pourquoi pas 0,73 ?

L'équiprobabilité supposée sur « **croix** » et « **pile** » est encore une hypothèse de modèle traduisant **conventionnellement** l'idée : "la pièce n'est pas truquée, elle est bien équilibrée," etc...

En réalité, seul les succès des applications du modèle probabiliste nous confirment son adéquation (dans des conditions d'emploi déterminées) et cette pertinence ne peut-être qu'admise au départ par les élèves, c'est une question de confiance dans l'enseignement et de contrat didactique.

C - Pour faire mieux comprendre l'erreur de raisonnement de D'Alembert

Changeons de modèle, avec un jeu analogue. L'équiprobabilité entre « **croix** » et « **pile** », loin de simplifier la question, l'embrouille. Alors, lançons une pièce truquée, par exemple une punaise, qui tombe sur la pointe avec une fréquence d'environ 0,7 et sur la tête avec une fréquence de 0,3. (Pour obtenir ces valeurs, on a fait un très, très grand nombre d'expériences). On s'intéresse à l'événement T = « obtenir au moins une fois ***tête*** en deux lancers ». Il y a trois issues observables selon d'Alembert, qui conduisent à l'univers $\Omega = \{t_1 ; (p_1, t_2) ; (p_1, p_2)\}$.

Y a-t-il encore 2 contre 1 à parier pour l'événement T ? On peut faire un calcul dans le modèle enseigné en Terminale, enrichi par la notion d'indépendance : le résultat du deuxième lancer ne dépend pas de celui du premier, on a «donc», d'après la définition probabiliste de l'indépendance : $P[(p_1, t_2)] = P(p_1) \times P(t_2) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$ ce qui nous conduit au résultat : $P(T) = 0{,}3 + 0{,}21 = 0{,}51$. Vérification fréquentiste si on veut.

Mais nous avons, ici, à nouveau deux hypothèses de modèle : l'une sur l'estimation des probabilités des événements « tête » et « pointe » à partir de leurs fréquences observées, l'autre sur l'adéquation de la définition probabiliste de l'indépendance pour modéliser une notion plutôt vague de non-dépendance réelle.

On peut penser qu'avec ces deux issues élémentaires, « tête » et « pointe », supposées non équiprobables pour cette punaise, d'Alembert ne conclurait pas de même pour la probabilité de l'événement T. Cependant, dans son raisonnement :"*réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup*", d'Alembert n'invoque pas l'équiprobabilité de « croix » et « pile ». Ce raisonnement s'appliquerait mutatis mutandis à la punaise.

Pour convaincre définitivement les sceptiques (que le raisonnement de D'Alembert est érroné), il suffit de remplacer la punaise par un clou, ayant très peu de chance de garder la position « tête » après un lancer, et de demander si réellement on pense encore avoir deux chances sur trois d'avoir « tête » en deux lancers ?

D - Au delà des apparences : le rève de d'Alembert et la réalité

Il conviendrait d'approfondir notre réflexion à propos des « hésitations » de d'Alembert qui, Secrétaire de l'Académie Royale des Sciences, autorité mathématique incontestée, n'avait pas une pensée aussi naïve que ne le laisse croire son article "*croix ou pile*". Il y pose une vraie et bonne question : « dans cet exemple simple du jeu de ***croix*** ou ***pile***, qu'est-ce qui peut justifier le choix de tel ou tel modèle » ? A l'époque de d'Alembert, le modèle inspiré de la ***géométrie du hasard*** (équiprobabilité sur les issues possibles) devait-il s'imposer, face à un autre modèle qu'il propose : celui de l'équiprobabilité sur les issues observables ? Sans doute, à cette époque, l'idée de modélisation était étrangère aux probabilités. A cette étape de la construction du savoir scientifique, les probabilités relevaient encore de la simple observation du monde réel. Ainsi, dans leur correspondance de 1654 sur le problème des partis, Pascal calcule l'espérance du gain pour chacune des suites de parties possibles et Fermat explicite la combinatoire de ces parties.

D'Alembert présente deux manières de compter et pose la question : quelle méthode de dénombrement donne-t-elle les « chances » de gagner dans les « bonnes » proportions ? Pourquoi pas 2 sur 3 au lieu de 3 sur 4 ? Qui pourra « démontrer » le contraire ? Personne en réalité, car il s'agit d'une question posée dans le monde réel et non dans le domaine mathématique, seul susceptible de démonstration. La preuve ne peut être qu'expérimentale et donner la préférence à un modèle provisoire, tant qu'il « colle » de manière acceptable aux observables de cette expérimentation. Ainsi, dans son article, D'Alembert pose la question du statut de la probabilité : simple observation du réel ou connaissance de nature théorique ? Par ricochet, il montre qu'en refusant à la probabilité d'accéder à un statut mathématique, on se place dans des situations paradoxales. Laplace, quarante ans après, reprendra la balle au bond et construira sa *théorie analytique des probabilités* sur la base de 10 principes fondateurs.

4 - Construction d'un modèle de Poisson[1]

Michel Henry

Voici un problème de vacances :

> «Par une belle nuit d'été, on observe en moyenne douze étoiles filantes par heure. Quelle est la probabilité d'en voir trois dans le prochain quart d'heure ?»

Supposons qu'il fasse une belle nuit et que les conditions d'observation soient bien décrites, ainsi que le dispositif enregistreur d'étoiles filantes. Le protocole expérimental se limite à cet enregistrement.

Un esprit déterministe comme Laplace,

"Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux.",[2]

dirait qu'il n'y a pas d'expérience aléatoire, puisque les mouvements des météorites en voie de pénétrer dans l'atmosphère sont déterminés depuis longtemps par les lois de la mécanique céleste. Cependant, nous décrivons ce phénomène en disant que l'arrivée d'un tel météorite est aléatoire et l'expérience consiste à enregistrer l'instant où il laisse une superbe traînée dans le ciel nocturne.

1 - Il s'agit du mathématicien Denis POISSON (1781-1840) !

2 - Pierre-Simon LAPLACE, *Essai philosophique sur les probabilités*, (1824). Ed. Christian Bourgois, 1986, p. 33.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Cette situation est aussi celle de l'étude des rayons cosmiques. Mais dans un domaine plus économique, les pannes successives d'un appareillage complexe relèvent aussi de ce type de schéma appelé **processus de Poisson**. Le comportement des files d'attente est aussi de type poissonnien, moyennant une adaptation lorsque l'événement observé ne peut être supposé instantané.

Comment allons-nous modéliser ce phénomène, de telle sorte qu'on puisse donner un sens mathématique à la probabilité demandée ?

A - Modélisation

1 - L'univers

L'expérience aléatoire étant précédemment décrite, nous devons en préciser les issues. Nous enregistrons des instants, à partir de l'instant initial de l'observation. Ils peuvent être quelconques de 0 à $+\infty$. Bien qu'elles soient entachées d'une approximation décimale due à la précision de la mesure, nous considérerons, dans le modèle, les issues comme des nombres réels positifs.

L'univers Ω représentant cette expérience sera donc l'ensemble des suites de réels positifs.

2 - Hypothèses de modèle

Décrivons maintenant un modèle pseudo-concret qui semble interpréter et généraliser cette situation. A partir d'un instant initial $t_o = 0$, on peut observer à tout instant la manifestation d'un événement E. On suppose que cet événement est instantané. L'ensemble de ces observations constitue une suite croissante d'instants successifs. On s'intéresse au nombre d'événements E produits dans une durée d'observation $[0 ; T]$.

Introduisons alors quelques premières hypothèses de modèle, pour interpréter trois idées «naturelles» :

a) pour notre observation, tous les intervalles de temps de même durée sont équivalents (on suppose donc que la fréquence d'arrivée des étoiles filantes ne dépend pas de l'instant du début de l'observation),

b) les étoiles filantes ne sont pas très fréquentes et

c) l'instant où l'on observe l'une d'entre elles ne dépend pas des arrivées précédentes : nous sommes en présence d'un phénomène **homogène dans le temps, rare et sans mémoire**.

3 - Hypothèses probabilistes

Traduisons mathématiquement ces hypothèses :

a) On pose en hypothèse que la probabilité d'observer E dans l'intervalle $[t_1 ; t_2]$ ne dépend que de la durée $t_2 - t_1$ (phénomène homogène dans le temps).

b) On va considérer que la probabilité qu'il se produise deux (ou plus) événements E à la fois (i.e. dans un petit intervalle de temps Δt) est négligeable devant la probabilité d'en observer un seul dans ce même intervalle de temps (E est un événement rare). De plus, cette dernière probabilité tend vers 0 avec Δt. Ainsi, la probabilité que E se produise à un instant déterminé a priori est considérée comme nulle.

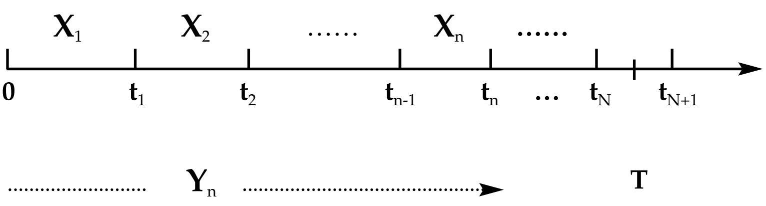
c) On va supposer que les événements «E se produit entre les instants t_1 et t_2» et «E se produit entre les instants t_3 et t_4» sont indépendants si les intervalles de temps $[t_1 ; t_2]$ et $[t_3 ; t_4]$ sont disjoints (phénomène sans mémoire).

4 - Schéma poisonnien

Pour numériser l'ensemble des observations effectuées, on introduit des variables aléatoires, applications de Ω dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$, que nous représentons sur un axe.

Désignons par $t_1, t_2, ..., t_n$, ... les instants aléatoires où l'on observe les étoiles filantes. Soient $X_1, X_2, ..., X_n$, ... les durées aléatoires égales à t_1, $t_2 - t_1$, $t_n - t_{n-1}$, ... ; les X_i désignent les temps séparant deux observations successives de E. Soient $Y_1, Y_2, ..., Y_n$,... les temps d'attente pour voir la première, la deuxième, ..., la n$^{\text{ième}}$ étoile filante depuis l'instant initial.

Enfin, on appelle N le nombre d'étoiles filantes observées entre les instants 0 et T.



Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

5 - Hypothèses sur les variables aléatoires en jeu

Dans ce modèle, avec nos hypothèses, les variables $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ sont de même loi (i.e. si t est un réel positif quelconque, les probabilités $F_X(t) = P[X_i \leq t]$ sont égales, quel que soit i. F_X est appelée «fonction de répartition» de la loi des X_i). En effet, X_i représente la durée qui sépare l'instant initial t_i de l'observation de la prochaine étoile filante. Comme on a supposé que le phénomène est homogène dans le temps, les X_i sont de même loi.

De plus les X_i concernent des intervalles de temps disjoints au cours desquels les arrivées éventuelles de E sont supposées indépendantes. On suppose donc que les X_i sont des variables indépendantes. Cela signifie par exemple que :

$$P[X_i \leq t \text{ et } X_j \leq s] = P[X_i \leq t].P[X_j \leq s].$$

B - Détermination de la loi des variables X

1 - Choix de la probabilité inconnue

On pose $g(t) = 1 - F_X(t)$. La probabilité g(t) est celle qu'aucune étoile filante n'arrive entre les instants 0 et t. C'est en effet la probabilité de l'événement contraire de «$X_1 \leq t$ », qui signifie : la première étoile observée est arrivée avant l'instant t.

2 - Relation fonctionnelle pour g

Appliquons les hypothèses précédentes : g(s + t) est la probabilité de ne pas observer d'étoile filante entre 0 et s + t.

Cet événement est la conjonction des deux événements : «ne pas en observer entre 0 et t » et «ne pas en observer entre t et s + t », de probabilités respectives g(t) et g(s).

Ces deux événements sont supposés indépendants, on a donc par définition probabiliste de l'indépendance : $g(s + t) = g(t) \times g(s)$. De plus, $g(0) = 1$, car g(0) est la probabilité qu'il n'y ait pas d'étoile filante à l'instant 0. Par hypothèse b), c'est un événement certain.

3 - Équation différentielle

La nature du phénomène permet de supposer g dérivable (cette hypothèse n'est pas mathématiquement tout à fait nécessaire, mais elle simplifie grandement le calcul!).

On va montrer que g vérifie l'équation différentielle $g'(t) = -\lambda g(t)$ où λ est un réel positif dont on précisera la signification en fin de parcours (cf. C 4).

En dérivant par rapport à s la relation fonctionnelle ci-dessus, on obtient :

$$g'(s+t) = g'(s)\times g(t), \text{ et avec } s = 0, \text{ on a } g'(t) = g'(0)\times g(t).$$

On peut remarquer que g est une fonction positive décroissante puisque F_X est croissante (la probabilité de «$X \leq t$ » augmente avec t).

On peut donc poser: $g'(0) = -\lambda$, où $\lambda > 0$ (si $\lambda = 0$, g est constante égale à 1, c'est le cas où E ne se produit jamais, ce qui est exclu d'après l'observation statistique).

Remarquons que $\lambda = F'_X(0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{F_X(\Delta t)}{\Delta t}$.

C'est la densité de probabilité d'avoir une étoile filante dans un intervalle de temps Δt. On l'appelle la «cadence» du phénomène E.

4 - Loi des X

L'intégration de l'équation différentielle est immédiate, avec $g(0) = 1$, on obtient :

$g(t) = e^{-\lambda t}$, et $P[X_1 \leq t] = F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. La fonction de répartition F_X est celle de la loi dite « exponentielle », sa dérivée $f_X(t) = F'_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est la « densité » de la loi exponentielle de paramètre λ.

5 - Loi des Y

On admettra que la loi de Y_n est une loi gamma de densité :

$$f_{Y_n}(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

pour $t \geq 0$. (C'est un calcul un peu compliqué, dont on ne se sert pas ensuite).

C - Détermination de la loi de N (loi de Poisson)

Dans la suite, on désignera par $N_{t_1}^{t_2}$ le nombre des événements E se produisant entre les instants t_1 et t_2. Dans cette symbolique, $N = N_0^T$.

1 - Probabilité de n'observer aucune étoile filante avant l'instant T.

La probabilité de n'observer aucune étoile filante avant l'instant T (événement « $N_0^T = 0$») s'exprime en fonction de λ et de T : cette probabilité est celle de l'événement «$X_1 > T$». Elle vaut donc : $P[X_1 > T] = 1 - P[X_1 \leq T] = 1 - F_X(T) = g(T) = e^{-\lambda T}$.

De même, entre les instants t et t + Δt , on peut donner un développement de la probabilité de l'événement « $N_t^{t+\Delta t} = 0$», au premier ordre au voisinage de $\Delta t = 0$:

$P[\ N_t^{t+\Delta t} = 0] = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + \Delta t\ \varepsilon(\Delta t)$

2 - Probabilité d'observer une étoile filante entre t et t + Δt

On peut alors déterminer en fonction de λ et de Δt un équivalent de la probabilité d'observer une seule étoile filante entre les instants t et t + Δt, quand Δt tend vers 0.

Cette probabilité est celle de l'événement « $N_t^{t+\Delta t} = 1$» égale à celle de « $N_0^{\Delta t} = 1$».

On a : $P[\ N_0^{\Delta t} = 1] = P[\ N_0^{\Delta t} \geq 1] - P[\ N_0^{\Delta t} \geq 2]$.

Par hypothèse b), $P[\ N_0^{\Delta t} \geq 2]$ est négligeable devant $P[\ N_0^{\Delta t} = 1]$.

Mais $P[\ N_0^{\Delta t} \geq 1] = 1 - P[\ N_0^{\Delta t} < 1] = 1 - P[\ N_0^{\Delta t} = 0] = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t$

D'où $P[\ N_t^{t+\Delta t} = 1] \approx \lambda \Delta t$ quand Δt tend vers 0.

3 - Probabilité d'observer n événements E entre les instants 0 et t.

Il reste à montrer par récurrence sur n que la probabilité d'observer n événements E entre les instants 0 et t est donnée par :

$$P[\ N_0^t = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n\,!}\, e^{-\lambda t}\ .$$

Pour cela, on détermine la fonction p_n définie par $p_n(t) = P[\ N_0^t = n]$ à l'aide d'une équation différentielle obtenue pour $n \geq 1$ à partir de la décomposition de l'événement « $N_0^{t+\Delta t} = n$ » de la manière suivante :

« $N_0^{t+\Delta t} = n$ » = {« $N_0^t = n$ » et « $N_t^{t+\Delta t} = 0$ »} ou {« $N_0^t = n - 1$ » et «$N_t^{t+\Delta t} = 1$ »} ou {« $N_0^t = n - 2$ » et « $N_t^{t+\Delta t} = 2$ »} ou ... ou {« $N_0^t = 0$ » et « $N_t^{t+\Delta t} = n$ »}.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Les accolades représentent des événements disjoints. Les événements situés dans une même accolade sont indépendants. De plus,

$P[\{« N_0^t = n - 2» \text{ et } «N_t^{t+\Delta t} = 2»\} \text{ ou... } \{« N_0^t = 0» \text{ et } « N_t^{t+\Delta t} = n»\}] \leq P[N_t^{t+\Delta t} \geq 2]$.

Cette probabilité est donc négligeable par rapport aux autres probabilités (c'est un infiniment petit d'ordre supérieur à Δt, notons-le $\Delta t.\varepsilon(\Delta t)$). On a donc :

$p_n(t + \Delta t) = P[N_0^{t+\Delta t} = n] =$

$$P[N_0^t = n]\times P[N_t^{t+\Delta t} = 0] + P[N_0^t = n-1]\times P[N_t^{t+\Delta t} = 1] + \Delta t\ \varepsilon(\Delta t).$$

D'où : $p_n(t + \Delta t) = p_n(t)\times(1 - \lambda\Delta t) + p_{n-1}(t)\times\lambda\Delta t + \Delta t\ \varepsilon(\Delta t)$, et la limite :

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} - \lambda\ p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad \text{avec } p_n(0) = 0.$$

On obtient donc l'équation différentielle : $p'_n(t) = - \lambda\ p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$, et, en remplaçant $p_{n-1}(t)$ par la valeur donnée dans l'hypothèse de récurrence, on obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants :

$p'_n(t) = - \lambda\ p_n(t) + \dfrac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)\ !}\ e^{-\lambda t}$, qui s'intègre simplement.

Il suffit d'ailleurs de vérifier que la fonction p_n donnée par récurrence est bien une solution particulière de cette équation, vérifiant la condition en 0.

L'hypothèse de récurrence étant vérifiée pour n = 0, on obtient ainsi pour tout $t \geq 0$:

$p_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n\ !}\ e^{-\lambda t}$. La probabilité de Poisson d'observer exactement n étoiles filantes entre les instants 0 et T est donc : $p_n(T) = \dfrac{(\lambda T)^n}{n\ !}\ e^{-\lambda T}$.

4 - Contrôle du résultat

Pour vérifier qu'on a bien une loi de probabilité, il faut vérifier que la somme des probabilités $p_n(T)$ pour tous les n entiers naturels vaut 1. On a en effet :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n}{n\ !}\ e^{-\lambda T} = e^{-\lambda T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n}{n\ !} = e^{-\lambda T} e^{\lambda T} = 1$$

Le nombre moyen d'étoiles filantes observées sur [0, T] est la moyenne de la variable de Poisson N_0^T . L'espérance mathématique de cette loi est :

$$E[N_0^T] = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(\lambda T)^n}{n\,!} e^{-\lambda T} = \lambda T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda T)^{n-1}}{(n-1)\,!} e^{-\lambda T} = \lambda T$$

λ est donc le nombre moyen d'apparitions d'étoiles filantes par unité de temps, c'est la «cadence» de ce phénomène.

5 - Réponse à la question posée

On peut maintenant calculer la probabilité d'observer 3 étoiles filantes en un quart d'heure.

Prenons pour unité de temps le quart d'heure. Les données statistiques indiquent une moyenne de 12 étoiles filantes à l'heure.

$\lambda T = 12$ et $T = 4$, d'où $\lambda = 3$.

On a donc $P[N_0^1 = 3] = \frac{(3)^3}{3\,!} e^{-3} \approx 0{,}224$.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

5 - A propos d'un exercice de bac : de la difficulté de bien habiller les énoncés. Un problème d'estimation par capture et re-capture

Michel Henry

Voici l'énoncé d'un problème proposé dans un manuel scolaire en vue de la préparation du baccalauréat sous le titre : *Loi binomiale. Étude de fonctions puissances.*

Un étang contient un nombre N, inconnu mais défini de poissons.

L'objet du problème est de proposer une évaluation de N, basée sur des hypothèses bien définies.

> *1 - On pêche dans différents endroits de l'étang ; on en sort 20 poissons que l'on marque et que l'on remet vivants dans l'étang après les avoir marqués. Quelques jours plus tard, on effectue une nouvelle pêche dans des endroits variés du même étang en rejetant à l'eau les poissons pêchés, après avoir noté s'ils sont marqués ou non. On prend ainsi 50 poissons dont 4 sont marqués.*

On suppose qu'entre les deux pêches, la population de l'étang n'a pas varié et que lors de la seconde pêche, à chaque coup il y a équiprobabilité de sortie pour chacun des N poissons de l'étang.

Avant la seconde pêche, on pouvait se poser le problème : quelle est la probabilité de sortir les poissons marqués sur les 50 pêchés ?

Répondez à cette question en donnant l'expression générale de P (X = k) où X désigne la variable aléatoire " nombre de poissons marqués que l'on peut sortir sur 50 pêchés ".

2 - f est la fonction qui, à un réel x supérieur à 20, associe :

$$f(x) = \left(\frac{20}{x}\right)^4 . \left(1 - \frac{20}{x}\right)^{46}$$

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Montrez que f a un maximum. Pour quelle valeur a de x ce maximum est-il atteint ?

3a - Si l'on admet que l'événement (X = 4) qui est réalisé correspond à l'événement de probabilité maximale parmi tous les événements possibles (X = k), k = 0, …, 50, quelle valeur doit-on attribuer à la population N de l'étang ?

3b - Cette hypothèse conduit à la même conclusion qu'une autre hypothèse très simple que l'on aurait pu faire pour évaluer N. Laquelle ?

Premières remarques et critiques sur l'habillage artificiel de problèmes de bac :

Dans cet exercice, la loi hypergéométrique et la loi binomiale interviennent. Mais il se pose une question : dans 3a il est question de maximum dans un ensemble qui n'est pas le même que l'ensemble évoqué au 2 et auquel l'énoncé semble faire référence.

P(X = 4) est maximale dans l'ensemble des P(X = k) pour un N donné. Cela ne signifie pas pour autant que P(X = 4) correspond au N qui rend P(X = 4) maximum lorsque cette fois l'on fait varier N. A première vue la question 3a semble incohérente avec ce qui précède (et la remarque est parfaitement justifiée), elle procède en fait d'une démarche correcte, comme nous allons le voir.

Voici un énoncé maladroitement habillé d'un modèle déjà là (le schéma de Bernoulli) pour " faire plus vrai ", alors que personne n'est dupe ! Il a alors l'inconvénient didactique de confondre modèle et réalité, ou plutôt de chercher à évacuer dans les implicites le rôle et le statut du modèle. Cela conduit à des contorsions de formulations qui feraient dresser les cheveux sur la tête d'enseignants de Français : *"poissons que l'on marque et que l'on remet vivants dans l'étang après les avoir marqués"*...

Comme l'auteur veut éviter certaines critiques de non adéquation du modèle binomial, il introduit des paraphrases comme : *"on effectue une nouvelle pêche dans des endroits variés du même étang"* sans que l'on discerne bien quelle hypothèse de modèle elle est censée induire chez les élèves.

Enfin le schéma binomial est mal séparé du modèle hypergéométrique : *"en rejetant à l'eau les poissons pêchés…"* sans que l'on sache si ce rejet se fait un à un ou après avoir pêché les 50. Remarquons qu'avec les données numériques ($^{50}/_{250}$) les deux modèles, binomial et hypergéométrique, sont proches, mais ils sont aussi proches d'un modèle de Poisson (P majuscule) avec P = 8%, plus pratique. Heureusement, les élèves n'ont que le schéma binomial à leur programme, ils n'ont donc pas à avoir d'états d'âme sur le choix du meilleur modèle et cette phrase doit être interprétée comme une hypothèse de remise des poissons un par un après chaque tirage. Mais peut-on trouver satisfaisante une résolution qui doit plus aux effets de contrat qu'à une véritable maîtrise de la modélisation ?

Le caractère pseudo concret de l'énoncé conduit ensuite à des pseudo hypothèses de plus en plus artificielles : *"entre les deux pêches, la population n'a pas varié"*, pas de naissances donc, et pas de prédateurs, autres poissons, oiseaux ou pêcheurs braconniers …

De plus, *"lors de la seconde pêche, il y a équiprobabilité de sortie…"*, au moins, c'est dit, cela évite de se demander si cette hypothèse va de soi (et complètement irréalisable dans la pratique), mais alors pourquoi préciser que l'on pêche *"dans des endroits variés"* ?…

Ces incohérences d'énoncé du point de vue des formulations vont jusqu'à l'apothéose : *"quelle est la probabilité de sortir* ***les*** *poissons marqués sur les 50 pêchés"*. Les 20 différents poissons marqués, alors qu' il y a remise ? comment le vérifier, si le protocole expérimental ne le stipule pas ? On est de plus dans un problème (pas simple) totalement différent, où l'on chercherait la probabilité de trouver **exactement** les 20 poissons marqués, parmi les k poissons marqués figurant dans cet échantillon (avec remises) de 50 poissons.

Notre connaissance des problèmes de Terminale nous fait comprendre que ce n'est pas ce qu'a voulu dire le rédacteur de l'énoncé : il voulait sans doute demander la probabilité que « parmi les 50 poissons pêchés et remis un par un, on en trouve k marqués ». Mais les candidats au bac peuvent-ils le décrypter ainsi ? Heureusement, dans l'énoncé, la question est mathématisée à leur place : *"donner l'expression générale de P(X = k)…"* et, comme dans le formulaire (ou leur mémoire de la classe) il n'y a qu'une formule qui ressemble à cela, la seule réponse possible est formelle :

$$P(X = k) = C_{50}^{k} \left(\frac{20}{N}\right)^{k} \left(1 - \frac{20}{N}\right)^{50-k} .$$

On peut douter qu'il y ait un seul élève pour chercher à justifier l'emploi de la loi binomiale à partir des données aussi alambiquées de l'énoncé.

Alors, à quoi sert tout l'habillage, si c'est pour faire copier une formule ? Ne valait-il pas mieux la demander clairement ? Ou mieux, demander les hypothèses nécessaires pour qu'un modèle d'urne par exemple conduise à l'étude d'une variable binomiale, dont on donnerait les probabilités élémentaires.

La question 2 tombe ensuite comme un cheveu sur la soupe. Pourquoi a-t-on fait k = 4 et pourquoi cette recherche de maximum ? Quels sont les élèves, habiles en analyse, qui seront passés par l'étude de ln f(x) ?

Considérons maintenant à la question 3a dont la critique est nettement plus intéressante. Celle-ci repose sur une propriété de maximum des probabilités binomiales dans un schéma de Bernoulli, que l'on trouve dans *"Ars Conjectandi"* de J. Bernoulli (cette propriété lui sert à sa démonstration sophistiquée de son *théorème d'or* : la loi des grands nombres), ainsi que sur la compréhension de la méthode du maximum de vraisemblance en statistique inférentielle. Mais auparavant, traduisons en termes de modèle d'urne le schéma des poissons pour préciser clairement les hypothèses.

Soit donc une urne de Bernoulli contenant N boules dont r blanches et s = N – r noires. On pose $p = \frac{r}{N}$, la proportion des boules blanches dans l'urne. L'hypothèse de modèle d'urne est l'équiprobabilité des boules (poissons) dans un tirage « au hasard » de l'une d'entre elles (pêche dans des lieux divers ...). L'obtention d'une boule blanche est alors un événement de probabilité p. (Définition de la probabilité dans le modèle d'urne, définition de Laplace, ou interprétation fréquentiste via le phénomène de stabilisation de la fréquence induisant la notion de probabilité).

Soit le schéma de Bernoulli : n tirages successifs « avec remises » de boules de l'urne avec observation des couleurs obtenues. L'hypothèse de modèle dans ce schéma de Bernoulli est que la « remise » fournit la même urne de Bernoulli au tirage suivant (i.e. dotée des mêmes hypothèses), ce qui se traduit d'un point de vue probabiliste (axiomes) par le fait que les événements respectivement associés à deux tirages différents sont indépendants : la probabilité de leur conjonction est donc le produit des probabilités de chacun d'eux.

On s'intéresse au nombre X des boules blanches obtenues au cours de n tirages (n = 50 pour nous). On sait (le cours) que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Le fait d'obtenir k boules blanches pour un k fixé de 0 à n est donc un événement associé au schéma de Bernoulli dont la probabilité est donnée par :

$$P(X = k) = C_{50}^{k}\, p^{k} (1 - p)^{n-k}.$$

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Dans la suite, il sera plus simple d'utiliser les notations introduites sous la forme :

$$P(X = k) = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \frac{r^k s^{n-k}}{N^n} .$$

Concernant les probabilités P(X = k), on a la propriété de maximum (que l'on peut qualifier « de Bernoulli ») suivante, qui sera démontrée ensuite :

Propriété de Bernoulli

> Dans les hypothèses précédentes, la valeur m de k qui rend maximale la probabilité binomiale P(X = k) vérifie :
> $\frac{r}{N}(n+1) - 1 \leq m \leq \frac{r}{N}(n+1)$.

Remarques

- Si $\frac{r}{N}(n+1)$ n'est pas entier, m est alors unique :

$$m = \mathrm{Ent}\left[\frac{r}{N}(n+1)\right] \qquad \text{et} \quad P(X = m) = C_n^m \frac{r^m s^{n-m}}{N^n}$$

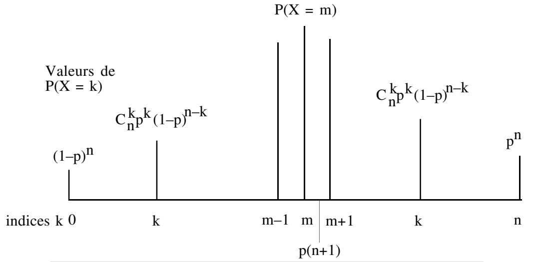
- Si $\frac{r}{N}(n+1)$ est entier, deux indices consécutifs donnent à cette probabilité une même valeur maximale égale à :

$$P\left[X = \frac{r}{N}(n+1) - 1\right] = P\left[X = \frac{r}{N}(n+1)\right].$$

Propriété de Bernoulli (suite)

> Si l'on ordonne les probabilités binomiales selon les n+1 valeurs de k, de 0 à n, ces probabilités vont d'abord en croissant jusqu'à l'indice m tel que $\frac{m}{n+1}$ soit la valeur inférieure la plus voisine de $p = \frac{r}{N}$, puis décroissent.

On peut visualiser ce phénomène sur le schéma suivant :



Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

La démonstration est inspirée de celle de J. Bernoulli (prop. 2 et 3 de *Ars Conjectandi*). Elle repose sur l'étude du rapport $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}$ et de sa position par rapport à 1.

On a, pour $k > 0$: $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{n-k+1}{k} . \frac{r}{s}$, d'où $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} \geq 1$,

ce qui équivaut à : $\frac{r}{N}$ $(n + 1) \geq k$ (rappelons que $r + s = n$).

Cela montre que si $0 < k \leq \frac{r}{N}(n + 1)$, la probabilité binomiale $P(X = k)$ va en croissant.

On a aussi : $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{k+1}{n-k} . \frac{s}{r} \geq 1 \Leftrightarrow k \geq \frac{r}{N}(n+1)-1$, ce qui montre que si

$\frac{r}{N}$ $(n + 1) - 1 \leq k < n$, cette probabilité va en décroissant.

$P(X = k)$ passe donc par un maximum pour la ou les valeurs entières de k comprises entre $\frac{r}{N}(n + 1) - 1$ et $\frac{r}{N}(n + 1)$. Valeur unique notée m, si $\frac{r}{N}$ $(n + 1)$ n'est pas entier : on a alors

$m = \text{Ent}\,[\frac{r}{N}(n + 1)]$ et le maximum vaut $P(X = m) = C_n^m\, p^m\, (1-p)^{n-m}$.

Si $m = \frac{r}{N}(n + 1)$ est entier, la valeur commune $P(X = m-1) = P(X = m)$ est le maximum de la probabilité $P(X = k)$, ce que l'on vérifie en écrivant le rapport $\frac{P(X=m-1)}{P(X=m)} = \frac{C_n^{m-1} r^{m-1} s^{n-m+1}}{C_n^m r^m s^{n-m}} = \frac{m}{n-m+1} . \frac{s}{r}$, ce qui donne :

$$\frac{P(X=m-1)}{P(X=m)} = \frac{\frac{r}{N}(n+1)}{(n+1)(1-\frac{r}{N})} . \frac{s}{r} = \frac{r}{N-r} . \frac{s}{r} = 1$$

Revenons à l'exercice de « bac ».

On part du principe du maximum de vraisemblance :

> un événement observé à l'issue d'une expérience aléatoire est celui qui, parmi tous les événements comparables, avait la plus grande probabilité d'arriver.

On sait qu'en pratique cela n'est pas vrai, car à partir de la répétition de la même expérience, on observe différents résultats aléatoires qui ne sont donc pas tous de probabilité maximale. Mais, d'après la loi des grands

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

nombres, en moyenne, dans un (très) grand nombre de telles expériences, l'événement à probabilité maximale s'observe le plus souvent.

A partir de ce principe, à la base des méthodes bayésiennes, on infère que les paramètres inconnus qui contrôlent l'expérience aléatoire ont les valeurs qui rendent maximale la probabilité de l'événement observé. C'est la « méthode du maximum de vraisemblance ».

En fait, ces valeurs hypothétiques minimisent (il faut le montrer) le risque de se tromper en les retenant à la place d'autres éventuelles : c'est une inférence statistique, c'est à dire une hypothèse faite sur la valeur du ou des paramètres inconnus, avec une certaine précision (ou imprécision) qui peut être déterminée, et un risque de se tromper en donnant cette valeur, risque qui peut être aussi calculé ou contrôlé. Une telle inférence, sans ces deux contrôles - précision et fiabilité - n'a pas beaucoup de sens (surtout si on ne sait pas évaluer le coût d'une erreur), car elle conduit à une affirmation qui ne peut être appréciée, voire contestée.

Le raisonnement par maximum de vraisemblance, appliqué malgré cela au problème des poissons, nous dit : pour N fixé (inconnu), la valeur k = 4 est celle qui rend maximale la probabilité P(X = k) dans les conditions du schéma de Bernoulli. C'est à dire qu'avec les données numériques du problème, on pose

$m = 4$, i.e. Ent $[\frac{20}{N} - 51] = 4$, où N est un entier tel que :

$\frac{20}{N} - 51 - 1 < 4 < \frac{20}{N} - 51$, ce qui donne $204 < N < 255$.

Mais en appliquant à nouveau le même principe du maximum de vraisemblance, la valeur de N est celle qui rend maximale la probabilité

$$P(X = m) = C_{50}^{4}\left(\frac{20}{N}\right)^{4}\left(1 - \frac{20}{N}\right)^{46}$$

où m = 4, c'est à dire N = 250, selon l'étude des variations de cette fonction faite en 2ème question.

Ainsi, la question 3a est fondée. L'hypothèse de travail posée dans l'énoncé peut sembler surprenante a priori. Mais elle est pertinente du point de vue de l'application du principe du maximum de vraisemblance.

Cependant, elle aura sans doute eu un effet distracteur pour les bons candidats, celui de les lancer sur l'étude des variations de

$$P(X = k) = C_n^k\, p^k\, (1 - p)^{n-k}$$

quand k varie de 0 à n, pour vérifier à quelles conditions (sur N), P(X = m) est bien la valeur maximale de cette probabilité (objectif inaccessible sans indications à ce niveau), car on ne voit pas a priori pourquoi cela serait vrai pour m = 4 particulièrement. Par contre pour ceux qui ne se posent pas de question (est-ce le comportement attendu le jour du bac ?) il devenait « automathique » (pour reprendre le calembour de Stella Baruck) de renvoyer au maximum obtenu à la question précédente sans comprendre en quoi il concernait cette question 3a.

On peut enfin se demander comment l'attente exprimée par l'énoncé (formuler une hypothèse) peut être comprise par un candidat au bac ?

Le qualificatif de *"très simple"* n'apporte rien de plus et est au contraire un facteur déstabilisant et aggravant (tel le joueur de bridge qui interpelle son partenaire au moment où celui-ci va choisir sa carte par l'injonction : "joue bien !"). En effet, après une hypothèse complexe que l'élève de Terminale ne peut comprendre (celle du principe du maximum de vraisemblance) faute d'avoir déjà réfléchi à sa signification, on lui demande d'en fournir une autre pour obtenir le même résultat (forcément pas évident, puisque issu de 3a épaulé par l'étude des variations de f en 2). Comment peut-il s'attendre à ce que le simple « bon sens » suffise pour répondre à la question ?

Ce « bon sens » serait de faire l'hypothèse (qui relève aussi d'une certaine manière du principe du maximum de vraisemblance) que l'échantillon prélevé dans l'étang, dans les conditions d'un schéma de Bernoulli (ce qui dans l'habillage pseudo-concret de l'énoncé est moins que vraisemblable), est « représentatif » de la population du lac, c'est à dire composé proportionnellement à celle-ci :

$$\frac{4}{50} = \frac{20}{N} \text{ d'où } N = 250.$$

Résultat nécessaire (oui, car relevant de la même application du principe du maximum de vraisemblance !) ou magie des données numériques ? On retrouve miraculeusement la même valeur par ce raisonnement de proportionnalité (qui n'est en rien probabiliste) que dans l'étude des variations de la fonction f, qui n'a rien à voir, a priori, avec cette proportionnalité.

ANNEXES

1 - Oeuvres marquantes dans l'Histoire des probabilités, du XVIII^{e} siècle à 1950
Michel HENRY, Jean-François PICHARD

2 - Présentation des IREM et de la commission *Statistique et Probabilités*
Brigitte CHAPUT

3 - Publication inter-IREM sur l'enseignement des Probabilités et de la Statistique et autres données bibliographiques
Michel HENRY

4 - Liste des auteurs et adresses professionnelles

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France   Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

1 - Jalons et oeuvres marquantes dans l'Histoire des probabilités, du XVIIIe siècle à 1950

Michel Henry, Jean-François Pichard

CARDANO Gerolamo (1501-1576) : *Liber de ludo aleae*, entre 1526 et 1560, publié à Lyon en 1663.

GALILEI Galileo (1564-1642) : *Sopra le scoperte dei dadis*, solution du Problème du Grand Duc de Toscane (1620), publié en 1718. Extrait de *Le Opere de Galileo Galilei*, Firenze, 1855, vol. XIV, p. 293-316.

FERMAT Pierre de (1601-1665) et **PASCAL** Blaise (1623-1662) : *Correspondance* (1654), publié en 1655 (Pascal) et 1679 (Fermat).

HUYGENS Christiaan (1620-1699) : *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (1657).

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) : *De incerti aestimatione* (1676) et *Sur le calcul des partis* (1676).

BERNOULLI Jakob (1654-1705) : *Ars conjectandi* (vers 1692), publié en 1713.

MONTMORT Pierre Rémond de (1678-1719) : *Essay d'analyse des jeux de hazard* (1708, 2e édition 1713).

MOIVRE Abraham de (1667-1754) : *De Mensura Sortis*, Philosophical Transactions, 1711. *The Doctrine of Chances : or, a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play*, (1718 et 3e éd. 1754).

BUFFON Georges Louis LECLERC, Comte de (1707-1788) : *Essai d'Arithmétique Morale* (1777).

BAYES Thomas (1702-1761) : *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*, in *Philosophical Transactions* (1764).

D'ALEMBERT Jean le Rond (1717-1783) : *Opuscules mathématiques*, vol 2 (1761) et 4 (1768) et, avec Denis **DIDEROT :** *Encyclopédie Méthodique* (1785) *:* article *Croix ou Pile* et article *Probabilités.*

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

CONDORCET Antoine Caritas Marquis de (1743-1794) : *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* (1785) - *Elémens du calcul des probabilités et son application aux jeux de hasard…*, (vers 1790).

LAGRANGE Joseph Louis (1736-1813) : *Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations* (1776).

LAPLACE Pierre-Simon (1749-1827) : *Théorie analytique des probabilités* (1812) avec l'*Essai philosophique sur les probabilités* (5e éd. 1825). *Oeuvres complètes*, Tome 7, 1889.

GAUSS Carl Friedrich (1777-1855) : *Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis solem ambientium* (1809) et *Compte rendu du mémoire de Laplace* (1815).

POISSON Siméon -Denis (1781-1840) : *Recherches sur la probabilité des jugements* (1837).

BIENAYMÉ Irénée Jules (1796-1878) **:** *Mémoire sur la probabilité des résultats moyens des observations* (1838).

COURNOT Antoine Augustin (1801-1877) : *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (1843).

BOOLE George (1815-1864) : *On the theory of probabilities* (1851) et *The laws of thought* (1854).

TCHEBYCHEV Pafnoutii Lvovitch (1821-1894) : *Теориå веромНосмеѝ* – *Démonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités* (1846).

BERTRAND Joseph (1822-1900) : *Calcul des probabilités* (1889).

MARKOV Andreï Andreïevitch (1856-1922) : *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1912).

POINCARE Henri (1854-1912) : *La science et l'hypothèse* (1902) et *Calcul des probabilités, cours à la Faculté des Sciences de Paris* (1912) .

LEBESGUE Henri (1875-1949) : *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904).

BOREL Emile (1871-1956): *Leçons sur la théorie des fonctions* (1898), *Eléments de la théorie des probabilités* (1909), *Le hasard* (1914) et *Valeur pratique et philosophie des probabilités* (1939).

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Ouvrage collectif publié sous la direction d'Emile BOREL : *Traité de Calcul des Probabilités et de ses Applications* (1939).

KOLMOGOROV Andréi Nikolaïevitch (1903-1987): *Grundbegriffe der Wahrscheinlich-keitsrechnung* (1933) in Ergebnisse Der Mathematik.

KINTCHINE Alexandre Iakoblevitch : *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1933).

LEVY Paul (1886-1971) : *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (1937).

FRECHET Maurice (1878-1973) : *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*, Livre I : *Généralités sur les probabilités, variables aléatoires* (1937), Livre II : *Méthode des fonctions arbitraires* (1938), in *Traité de Calcul des Probabilités et de ses applications*, fascicule 3, tome I.

CRAMÉR Harald (1893-1985) : *Random Variables and probability distribution* (1937). *Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités* (1938).

GNEDENKO Boris et **KOLMOGOROV** Andréï Nikolaïevitch **:** *Distributions limites de sommes de variables aléatoires indépendantes* (1949), en russe.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

2 - Présentation des IREM et de la Commission *Statistique et Probabilités*

Brigitte Chaput

Créés au sein des Universités dans la foulée des événements de mai 1968, les vingt-six IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) sont des lieux de rencontre et de formation d'équipes permettant la collaboration d'enseignants de tous niveaux : Ecoles, Collèges, Lycées Professionnels, Lycées et Universités. Ces instituts ont inauguré un nouvel espace pour la formation des enseignants de mathématiques qui appelle une réflexion en profondeur et le développement de recherches sur l'enseignement des mathématiques à un niveau intégrant et dépassant l'innovation pédagogique.

Partie prenante du dispositif global des formations initiale, continue et diplômante des enseignants des premier et second degrés, les IREM sont en relation avec les départements de mathématiques de leurs Universités, les IUFM et les services rectoraux chargés de la formation des enseignants et plus particulièrement avec les Inspections Régionales et Générale de Mathématiques.

Les activités des IREM se développent dans différentes directions : travaux pour la classe, réflexion sur les contenus enseignés, recherches théoriques, études d'épistémologie apportant la perspective historique nécessaire à l'enseignement des mathématiques. Elles débouchent sur la production massive de documents : bulletins périodiques de liaison à diffusion académique ou nationale, brochures de synthèse, documents constitutifs des contenus des stages de formation continue, actes d'universités d'été, ouvrages traitant de thèmes particuliers sur l'enseignement et l'histoire des mathématiques.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Les différents IREM sont organisés en un réseau national qui permet une circulation constante de l'information, piloté par l'ADIREM (Assemblée des Directeurs d'IREM) au sein de laquelle un Comité Scientifique supervise les productions du réseau.

Quatorze commissions Inter-IREM coordonnent au niveau national les travaux réalisés dans les IREM dans différents domaines de l'enseignement des mathématiques.

Dans ce cadre, la commission Inter-IREM *Statistique et Probabilités* a été créée en 1990 pour travailler à un renouvellement de l'enseignement des probabilités et de la statistique en France. Elle a pu accompagner de sa réflexion et de ses publications l'approche fréquentiste de la notion de probabilité, introduite dans la nouvelle orientation des programmes de lycée de 1991. Dans ce contexte, elle a publié en 1997 le livre *Enseigner les probabilités au lycée* (édition IREM de Reims), maintenant épuisé, dont la première partie plutôt épistémologique et didactique est rééditée dans le présent ouvrage, et dont la deuxième partie, traitant des aspects pédagogiques, fait aussi l'objet d'une réédition par l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) sous le titre *Probabilités au lycée*.

La commission a aussi largement contribué à la mise en œuvre de l'enseignement de la statistique inférentielle dans les sections de techniciens supérieurs, en consacrant à ce domaine deux universités d'été dont on peut se procurer les actes auprès de l'IREM de Rouen.

La commission est composée d'une quinzaine de membres enseignant à différents niveaux et qui, au-delà de leurs échanges épistolaires, se réunissent trois ou quatre fois par an.

Ainsi, après une synthèse des informations provenant des différents IREM, la commission choisit ses thèmes de travail, correspondant aux besoins et aux attentes exprimés ou supposés des enseignants. Ces thèmes s'articulent autour de quatre pôles :

- Les commandes ministérielles : elles concernent éventuellement des changements de programmes ou de méthodes. Dans ce contexte, le travail de la Commission peut répondre à des demandes des enseignants ou de l'institution, notamment en mettant l'accent sur

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

les continuités et les évolutions dans les objectifs des programmes des classes des collèges et des lycées.

- Les problèmes rencontrés aux différents niveaux de l'enseignement secondaire et post-bac : organisation et gestion des données en collège, outils de l'observation et de la description statistique et initiation aux probabilités dans les différentes sections des lycées, statistique inférentielle et calcul des probabilités en sections de techniciens supérieurs, IUT ou universités.
- Les travaux à long terme sur l'enseignement de la statistique et des probabilités : ils sont l'occasion d'approfondir certaines questions d'histoire, d'épistémologie et de didactique de ce domaine des mathématiques.
- Les questions relatives à l'interdisciplinarité, notamment concernant les démarches de modélisation.

La commission Inter-IREM *Statistique et Probabilités* assure la diffusion de ces travaux, d'abord par des publications qui vont du document de travail destiné à alimenter le débat au sein des IREM, jusqu'à des ouvrages édités par des CRDP, des presses universitaires ou par des maisons d'édition, en passant par la rédaction d'articles destinés à la revue trimestrielle “Repères-IREM” - revue nationale des IREM - qui fait le point sur les travaux en cours, propose aux lecteurs une réflexion didactique et épistémologique et rend compte d'expériences pédagogiques. On trouvera en annexe 3 une bibliographie assez complète des ces différents travaux et articles. Les documents ainsi produits sont beaucoup utilisés par les enseignants pour leur travail personnel et leur réflexion pédagogique, ainsi que pour l'animation de stages de formation continue, organisés par les IREM.

Cette activité est complétée par l'organisation de colloques et d'universités d'été et la participation à des manifestations nationales et internationales, notamment les congrès ICME sur l'enseignement des mathématiques qui ont lieu tous les 4 ans. Cela permet à la commission d'élargir son public, et la pousse à donner plus d'ampleur à son travail en confrontant ses productions aux interventions d'autres chercheurs venus présenter leurs propres travaux par des exposés ou l'animation d'ateliers.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

3 - Publications inter-IREM sur l'enseignement des probabilités et autres données bibliographiques

Michel Henry

1 - Publications des commissions inter-IREM sur l'enseignement de la statistique et des probabilités

On peut trouver dans les IREM un très grand nombre de brochures dédiées à l'enseignement de la statistique et des probabilités dans le secondaire. Il n'est pas le lieu d'en donner ici une liste exhaustive. Les travaux les plus significatifs d'envergure nationale sont cités ci-dessous.

Travaux de la Commission Inter-IREM " Statistique et Probabilités "

Édités par l'IREM de Rouen :

- *Actes des Universités d'été de Statistiques Inférentielles*, deux volumes : La Rochelle 1 - 5 Septembre 1992 et Rouen 29 Août - 2 Septembre 1994.

Édités par l'IREM de Lorraine :

- *Actes de l'Université d'été de Probabilités*, Metz 26 - 31 Août 1996.
- *Modélisation en probabilités*, octobre 1997, 60 p.
- *Aide pour l'enseignement des statistiques*, octobre 1997, 50 p.

Édité par l'IREM de Reims :

- *Enseigner les probabilités au lycée*, octobre 1997, 464 p.

Édité par l'APMEP :

- *Probabilités au Lycée*, 2001.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Publications de la Commission Inter-IREM " Histoire et Épistemologie des Mathématiques "

Mathématiques au fil des âges, ed. Gauthiers-Villars 1987 :

- Collectif : *Calcul des probabilités*- Chapitre 5, p. 211-234.

La Démonstration Mathématique dans l'Histoire, Actes du 7ème colloque de la Commission, ed. IREM de Besançon, 1989 :

- Norbert Meusnier : *Argumentation et démonstration : à quoi sert la démonstration de "la loi des grands nombres" de Jacques Bernoulli* - p. 81-97.

Histoire d'Infini, Actes du 9ème colloque de la Commission, ed. IREM de Brest, 1992 :

- Denis Lanier : *Huygens : l'espérance et l'infini* - p. 555-577.

La Mémoire des Nombres, Actes du 10ème colloque de la Commission, ed. IREM de Caen, 1994 :

- Frédéric Métin : *Buffon et le problème de l'aiguille* – p. 343-360.

Actes de la 6ème Université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques, thème II : Histoire des probabilités et des statistiques, ed. IREM de Besançon, 1995 :

- Anne Boyé et Xavier Lefort : *De Cassini à Gauss : du calcul d'erreurs aux probabilités*- p. 239-258.
- Denis Lanier et Didier Trotoux : *La Loi des grands nombres*- p. 259-294.
- Michèle Lacombe et Henry Plane : *Quelques anciens problèmes de probabilités* - p. 295-304.
- Thierry Martin : *Formes et significations des probabilités chez Cournot : la fortuité des décimales de* π - p. 305-318.

Articles sur l'enseignement des probabilités et de la statistique parus dans la revue Repères-IREM

- *L'enseignement des probabilités dans le programme de première* - Annie et Michel Henry, Repères-IREM n° 6, Janvier 1992.
- *Des statistiques aux probabilités : exploitons les arbres* - Bernard Parzysz, Repères-IREM n° 10, Janvier 1993.

- *Paradoxes et lois de probabilités* - Michel Henry et Henri Lombardi, Repères-IREM n° 13, Octobre 1993.

- *L'enseignement du calcul des probabilités dans le second degré : perspectives historiques, épistémologiques et didactiques* - Michel Henry, Repères-IREM n° 14, Janvier 1994.

- *L'introduction du concept de probabilité conditionnelle : avantages et inconvénients de l'arborescence* - André Totohasina, Repères-IREM n° 15, Avril 1994.

- *L'apprenti fréquentiste* - Jean-Claude Duperret, Repères-IREM n° 21, Octobre 1995.

- *Arbres et tableaux de probabilité : analyse en termes de registres de représentation* - Suzette Rousset-Bert, Claire Dupuis, Repères-IREM n° 22, Janvier 1996.

- *Pourquoi il ne faut pas laisser de côté les chapitres de statistiques au collège*- Jean-Claude Girard, Repères-IREM n° 23, Avril 1996.

- *Approche épistémologique et diverses conceptions de la probabilité* - Jean-François Pichard, Repères-IREM n° 32, Juillet 1998.

- *Expérimenter et simuler en classe* - Michèle Gandit, Claire Helmstetter, Repères-IREM n° 32, Juillet 1998.

- *Attention ! Un modèle peut en cacher un autre* - Hubert Raymondaud, Michel Henry, Repères-IREM n° 32, Juillet 1998.

- *Chronique d'une correspondance probablement apocryphe* - Gilberte Pascal, Michel Henry, Jacques Verdier, Pol Le Gal, André Viricel, Bernard Parzysz, Repères-IREM n° 32, juillet 98.

- *Qu'est-ce que le hasard ? comment le mathématiser ?* - Claude Chrétien, Dominique Gaud, Repères-IREM n° 32, Juillet 1998.

- *Un problème de dés en Terminale* - Martine Bühler, Repères-IREM n° 32, Juillet 1998.

- *A bas la moyenne !* - Jean-Claude Girard, Repères-IREM n° 33, Octobre 1998.

- *La moyenne : un concept inexploité, d'une richesse exceptionnelle* - Linda Gattuso, Repères-IREM n° 34, Janvier 1999.

- *Heurs et malheurs du su et du perçu en statistique. Des données à leurs représentations graphiques* - Bernard Parzysz, Repères-IREM n° 35, Avril 1999.

- *Le professeur de mathématiques doit-il enseigner le modélisation ?* - Jean-Claude Girard, Repères-IREM n° 36, Juillet 1999.

- *L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie* - Michel Henry, Repères-IREM n° 36, Juillet 1999.
- *La fonction de répartition. Pourquoi faire ?* - Pascale Pombourcq, Repères-IREM n° 38, Janvier 2000.
- *Probabilités, suites numériques et programmation*- Michel Bourguet, Repères-IREM n° 41, Octobre 2000
- *Quelle place pour l'aléatoire au collège ?* – Jean-Claude Girard, Michel Henry, Bernard Parzysz, Jean-François Pichard, Repères-IREM n° 42, janvier 2001

2 - Travaux en didactique des probabilités

Thèses et ouvrages

BROUSSEAU Guy : *Généralités sur l'enseignement des probabilités au niveau élémentaire*- actes de la 26ème rencontre de la CIEAEM, IREM de Bordeaux, Août 1974, p. 66-123.

MAURY Sylvette : *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes* - Thèse d'Etat, Montpellier I-1986.

ZAKI Moncef **:** *Traitements de problèmes de probabilités en situation de simulation* - Thèse de doctorat , IRMA-ULP Strasbourg -1990.

BORDIER Jacques : *un modèle didactique utilisant la simulation sur ordinateur, pour l'enseignement de la probabilité* -Thèse de doctorat, Paris VII- 1991.

TOTOHASINA André : *Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*, Thèse de doctorat, IRMAR Rennes I -1992.

KAPADIA Ramesh et **BOROVCNIK** Manfred : *Chance Encounters: Probability in Education* - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht - Pays Bas, 1991.

BOROVCNIK Manfred et R. **PEARD** : Chapter 7 : *Probability* in A.J. Bishop et al. (eds), *International Handbook of Mathematics Education*, 239 - 287, Kluwer Academic Publishers, 1996.

LAHANIER-REUTER Dominique : *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques*, PUF, col Éducation et Formation, 1999, 236 p.

Articles de didactique des probabilités parus dans *Recherches en Didactique des Mathématiques*

- *Effet d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur les jugements probabilistes* - Marie-Paule Lecoutre, RDM n° 6/2.3, 1985.
- *L'indépendance stochastique* - Heinz Steinbring, RDM n° 7.3, 1986.
- *L'analyse des données : une méthodologie de traitement de questions de didactique* - Régis Gras, RDM n° 12/1, 1992.
- *Conceptions probabilistes d'élèves marocains du secondaire* - Omar Rouan et Richard Pallascio, RDM n° 14/3, 1994.
- *Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle* - André Totohasina, RDM n° 15/1, 1995.
- *Évolution avec l'âge de misconceptions dans les intuitions probabilistes en France et en Israel* - Marie-Paule Lecoutre et Efraïm Fischbein, RDM 18/3, 1998.

3 - Quelques manuels de référence en probabilités et statistique

Ouvrages ressources

FELLER William : *An introduction to probability theory and its applications* - Wiley-Chapman New York-London, 1950.

DE FINETTI Bruno : *Theory of Probability* - John Wiley & Sons, London, 1975 (2 vol.)

RENYI Alfred : *Calcul des probabilités* - Dunod, 1966. Rééd. Jacques Gabay 1992.

SAPORTA Gilbert : *Probabilités, analyse des données et statistiques* - Technip, 1992

VENTSEL Hélène : *Théorie des probabilités* - ed. Mir, Moscou, 1973.

WONNACOTT T. R. : *Statistique. Economie-Gestion-Sciences-Médecine*, ed . Economica.

Manuels pour l'enseignement universitaire de base en probabilités et statistique

BOULEAU N. : *Probabilités de l'ingénieur, Variables aléatoires et simulation-* Hermann, 1986.

CALOT G. : *Cours de calcul des probabilités* - Dunod décision, 1967.

CHAUVAT G. et **REAU** J.P. : *Statistique descriptive*, Hachette supérieur.

DRESS F. : *Probabilités Statistique rappels de cours, questions de réflexion exercices d'entraînement* – Dunod, 1997.

DROESBEKE J.J. : *Eléments de statistique*, ed. Ellipses.

ENGEL A. : *Les certitudes du hasard* -Aleas, Lyon, 1990.

HARTONG J. : *Probabilités et statistisques, de l'intuition aux applications-* Diderot, bibliothèque des sciences, 1996.

ISAAC R. : *The Pleasures of Probability* - Springer-verlag, 1995.

JANVIER M. : *Statistique descriptive avec ou sans tableur, cours et exercices corrigés* – Dunod, 1999.

JAFFARD P. : *Initiation aux méthodes de la statistique et du calcul des probabilités* – Masson, 1996.

LAVAULT D. et **Grégoire** J. *Introduction aux théories des tests en sciences humaines*, ed. De Boeck Université.

ROBERT C. : *L'empereur et la girafe, leçons élémentaires de statistiques* - Diderot 1995.

ROSE J. : *Initiation au hasard, probabilités, estimations, tests, sondages*, presses universitaires de Nancy.

SCHWARTZ D. : *Le jeu de la science et du hasard. La statistique et le vivant*, Flammarion.

4 - Rééditions françaises d'œuvres anciennes

FERMAT Pierre : *Précis des œuvres mathématiques,* Emile Brassine, ed. Jacques Gabay.

HUYGENS Christiaan : *De la manière de raisonner dans les jeux de hasard*, ed. Jacques Gabay.

BERNOULLI Jacques : *L'art de conjecturer (Ars conjectandi, première partie)*, ed. Jacques Gabay.

BERNOULLI Jacques : *Ars Conjectandi- 4ème partie.* - Norbert Meusnier, ed. IREM de Rouen 1987.

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm : *L'estime des apparences* - 21 manuscrits sur les probabilités, la théorie des jeux, l'espérance de vie par Marc Parmentier, ed. Vrin 1995.

MONTMORT Pierre Rémond de : *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*, ed. Jacques Gabay.

MOIVRE Abraham de : *The doctrine of chances* (en anglais), ed. Jacques Gabay.

CONDORCET Antoine - Nicolas de : *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* , ed. Jacques Gabay.

LAPLACE Pierre-Simon : *Théorie analytique des probabilités (2 tomes)*, ed. Jacques Gabay.

LAPLACE Pierre-Simon : *Essai philosophique sur les probabilités* - postface de Bernard Bru, ed. Christian Bourgois 1986.

POISSON Siméon – Denis : *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, ed. Jacques Gabay.

BERTRAND Joseph : *Calcul des probabilités*, ed. Jacques Gabay.

POINCARE Henri : *Calcul des probabilités*, ed. Jacques Gabay.

BOREL Émile : *Théorie mathématique du bridge - Applications de la théorie des probabilités aux jeux de hasard* et *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, ed. Jacques Gabay.

LÉVY Paul : *Calcul des probabilités – Processus stochastiques et mouvement brownien – Théorie de l'addition des variables aléatoires*, ed. Jacques Gabay.

BACHELIER Louis : *Calcul des probabilités – Les lois des grands nombres du calcul des probabilités - Le Jeu, la Chance et le Hasard – Collection de Mémoires sur les probabilités*, ed. Jacques Gabay.

5 - Travaux sur l'Histoire et l'Épistémologie des Probabilités

Ouvrages anciens

MONTUCLA, J.F. *Histoire des mathématiques*, 4 tomes 1799-1802, réédition Blanchard, Paris, 1968.

TODHUNTER I. *A History of the mathematical theory of probability , from the time of Pascal to that of Laplace*, 1865, rééd. New York, Chelsea 1965.

Ouvrages contemporains en anglais

DALE Andrew I. : *A History of Inverse Probability, from Thomas Bayes to Karl Pearson.-* Springer -verlag, New York, 1991.

HACKING Ian : *The Emergence of Probability, a philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference* - Cambridge University Press, 1975.

HALD, A. : *A History of probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New York : John Wiley & Sons , 1990.

KENDALL M.G. and **PLACKET** R.L. : *Studies in the history of statistics and probability,* Griffin & Co, Londres, 1977.

STEPHEN M. STIGLER : *The History of Statistics, the Mesurement of Uncertainty before 1900,* Harvard University Press, 1986.

Ouvrages contemporains en français

BRU Bernard : *Petite histoire du calcul des probabilités* - Article paru dans *Fragments d'histoire des mathématiques-* Brochure APMEP n°41-1981.

BRU Bernard et **CRÉPEL** Pierre : *Condorcet, arithmétique politique, textes rares ou inédits* - Institut National d'Études Démographiques - 1994.

CHEVALLEY Catherine : *Pascal, Contingences et probabilités* - P.U.F. Philosophies, 1995.

DACUNHA-CASTELLE Didier : *Chemins de l'aléatoire. Le hasard et le risque dans la sociéré moderne*, Flammarion.

M.A.F.P.E.N. et IREM de Rouen : *Pascal et les probabilités* - Cahiers pédagogiques de philosophie et d'histoire des mathématiques n° 4, ed. C.R.D.P. de Rouen, 1993.

DEHEUVELS Paul : *La probabilité, le hasard et la certitude* - P.U.F. Que sais-je ? n°3 - 1990

DROESBEKE Jean-Jacques et **TASSI** Philippe : *Histoire de la statistique* - P.U.F. Que sais-je ? n° 2527- 1990.

JACQUARD Albert : *Les Probabilités* - P.U.F. Que sais-je ? n° 1571- 1974.

MEUSNIER Norbert : *Jacques Bernoulli et l'ars conjectandi* - texte bilingue annoté de la quatrième partie d'Ars Conjectandi et *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume* - IREM de Rouen, 1987.

MARTIN Thierry : *Probabilités et critique philosophique selon Cournot,* Vrin-Mathesis, 1996.

ROSE José : *Le hasard au quotidien (coïncidences, jeux de hasard, sondages)*, ed. du Seuil.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

4 - Les auteurs de l'ouvrage et leurs adresses professionnelles

Brigitte CHAPUT
IREM de PICARDIE

Université d'Amiens, IUP MIAGE,
Pôle Universitaire Scientifique
33 rue Saint Leu, bat. F
80039 AMIENS cedex 1

Bernard COURTEBRAS
IAE Université de LYON 3

Professeur au Collège de Saint Roch,
120 rue Charles Demia
01000 BOURG en BRESSE

Bernard DANTAL
IREM de CLERMONT-FERRAND

Lycée Jeanne d'Arc
40 avenue de la Grande Bretagne
63000 CLERMONT-FERRAND

Jean-Claude GIRARD
IREM de LYON

IUFM, centre local de Saint-Étienne
90, rue Richelandière
42100 SAINT-ETIENNE

Michel HENRY
IREM de FRANCHE-COMTÉ

Université de Franche-Comté, IREM
Faculté des Sciences et des Techniques
16, route de Gray
25030 BESANÇON Cedex

Jean-François PICHARD
IREM de ROUEN

Université de Rouen, IREM
Faculté des Sciences et des Techniques
Boulevard de Broglie
76821 MONT SAINT AIGNAN Cedex

Jean-Claude THIENARD
IREM de POITIERS

Lycée Victor Hugo
10 rue Victor Hugo
86000 POITIERS

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X