collection

DIDACTIQUES

MATHÉMATIQUES

LE CHANT DU CYGNE DES INDIVISIBLES

LE CALCUL INTÉGRAL DANS LA DERNIÈRE ŒUVRE SCIENTIFIQUE DE PASCAL

Claude MERKER

Presses universitaires de Franche-Comté

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Auteurs Claude MERKER
Claude Merker est professeure agrégée au Département de Mathématiques de l'Université de Franche-Comté. Elle assure la direction de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, où elle anime un groupe de travail sur l'histoire des mathématiques.

Titre *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*

Résumé Pascal construit dans le Traité de la roulette des techniques géométriques très élaborées pour résoudre dix-huit problèmes ayant trait à la cycloïde (roulette). Il n'y a pas encore, en 1658, d'algorithme pour calculer une "intégrale". Alors Pascal décompose la roulette en une multiplicité de cercles, crée des outils géométriques de calcul en subdivisant des lignes à l'infini, fait rentrer les « petites portions » ainsi obtenues dans un réseau d'échanges virtuoses, applique le tout au cercle et résout les problèmes.
Ce livre propose de rendre compte des méthodes pascaliennes, de les mettre en oeuvre pas à pas sur deux des problèmes, mais aussi de montrer les liens de ce Traité mathématique avec la réflexion critique de Pascal sur la définition, la raison, l'infini, Dieu. Pascal a fabriqué ses propres « abrégés du discours » littéraires, pour calculer sans utiliser ces autres abrégés du discours que sont les symboles mathématiques. De par son rapport à la raison (elle n'est pas tout, elle n'est pas rien) il accepte de calculer l'infini alors qu'une justification rigoureuse du calcul avec des infiniment petits ne peut pas être donnée à cette époque. Ainsi le lecteur (la lectrice) découvrira ce calcul de l'infini, dernier avatar d'une méthode des indivisibles transformée à en être méconnaissable, étrange chant du cygne annonçant le Nouveau Calcul à différentielles analytiques de Leibniz et Newton.

Public Enseignants et étudiants de mathématiques intéressés par l'histoire du calcul infinitésimal.
Toutes personnes pensant qu'il est bon de rencontrer des différentielles concrètes avant d'en dégager l'aspect linéaire.
Toute personne aimant Pascal

Soutien Ouvrage publié avec le soutien de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Franche-Comté.

Mots clé Roulette ; triligne ; ordonnées, sinus ; petites portions, divisions égales ; méthode des indivisibles ; somme, somme triangulaire, somme pyramidale ; méthode des centres de gravité, bras ; lemme général ; définition de nom ; infini.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France   Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Langue Français

Caractéristiques de l'édition papier

Réédition du fascicule *Le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, publié en 1995, mis à jour.

Éditeur	Presses Universitaires Franc-Comtoises Université de Franche-Comté 25030 BESANÇON Cedex - France
Année	2001
Collection	«*Didactiques*»,
Série	«*Mathématiques*»
Format	16 x 22 cm 228 pages recto verso support papier ISBN 2 -84627-038-4

Maquette et mise en pages Marie-Claire Rougeot

Couverture	nova mondo (03 80 68 25 02)
Imprimeur	Publi-Lux 70302 Luxeui-les-Bains
Dépôt légal	4e trimestre 2001
Copyright	© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2004

Note de l'éditeur

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

«Mathématiques»

LE CHANT DU CYGNE DES INDIVISIBLES

LE CALCUL INTÉGRAL DANS LA DERNIÈRE ŒUVRE SCIENTIFIQUE DE PASCAL

Claude MERKER

Presses universitaires de Franche-Comté 2001
Diffusé par C*i*D - 131 boulevard Saint-Michel - 75005 Paris

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

SOMMAIRE

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

PRÉFACE

Le *Traité de la Roulette* est la réunion de sept petits textes disparates, publiés à l'occasion d'un défi public en 1658-1659. L'ensemble constitue un magnifique édifice mathématique, où dix huit problèmes relatifs à la cycloïde sont résolus par une extension des méthodes des indivisibles.

Ces découvertes sur les indivisibles sont le dernier fruit de l'activité scientifique de Pascal, à une époque déjà où il avait choisi de renoncer aux vanités mondaines et aux gloires de l'esprit . La lettre de 1654 où il expose ses travaux à une Académie (probablement l'Académie Le Pailleur) énumère plusieurs sujets : des curiosités arithmétiques, des découvertes en géométrie des coniques grâce à une méthode générale et « absolument nouvelle », une nouvelle et étonnante « géométrie du hasard » (*aleae geometria*), la machine arithmétique et les expériences sur le vide. Pas un mot de la roulette ou des indivisibles.

C'est la géométrie des lieux plans et coniques qui domine dans le tableau que dresse Pascal lui-même. Pourtant, paradoxalement, bien peu de textes nous sont parvenus qui témoignent des géniales percées de Pascal en géométrie projective. Ce chantier restera en friche ou en sommeil jusqu'au début du XIXe siècle, lorsque Poncelet, Chasles, Gergonne et d'autres renoueront le fil. Un travail patient d'archéologue est nécessaire pour restituer, à partir de quelques documents, recopiés notamment par Leibniz, et à partir d'allusions éparses, une théorie cohérente et féconde des figures en perspective.

Pour la roulette et les indivisibles nous possédons les textes, mais Pascal les a laissés en désordre - du moins en apparence -. Le lecteur mathématicien le plus averti a bien du mal à se frayer un chemin dans la série des sept *traités*, succession d'écrits polémiques, d'exposés généraux de méthode et de présentations de résultats. La démonstration qui manque dans un passage est à chercher ailleurs, ou à suppléer en suivant les indications d'un *traité* précédent, l'intérêt des propositions mystérieuses sur les

« sommes de carrés-carrés des ordonnées » , ou sur les « sommes triangulaires », n'apparaît qu'au détour d'un traité ultérieur.

C'est ce qui fait le prix du commentaire méthodique de Claude Merker. Si l'on suit l'itinéraire qu'elle propose à travers le "labyrinthe", les textes sur la roulette apparaissent comme un tout cohérent, un superbe massif de mathématiques qui se dégage en toute clarté. On admire l'ingéniosité inépuisable du mathématicien qui ramène un problème à un autre, une somme de lignes ou de surfaces à une autre déjà connue. On apprend à expliciter les découpages sous-entendus, qui seuls rendent rigoureuses les preuves. On comprend comment utiliser le *traité des sinus* pour élucider les résultats du *traité général de roulette*. Les limites, les tensions internes deviennent également visibles, on perçoit ce que peut être une théorie en déséquilibre vers un avenir différent.

Les indivisibles qui fleurissent dans les mathématiques européennes entre 1620 et 1690 ne forment pas une théorie véritablement cohérente et rigoureuse. Les inventeurs, Kepler, Cavalieri, Roberval, proposent plutôt une série de procédés heuristiques, difficiles à fonder sur des assises bien assurées à la manière euclidienne. Mais les nouveaux outils sont remarquablement féconds, et peu à peu se développent de nouvelles formes de raisonnement, on publie des présentations simplifiées, on obtient des résultats étonnants. Cavalieri lui-même, conscient de la difficulté et des embarras de sa première exposition (la *Geometria indivisibilibus* de 1635) donne une version abrégée en 1647 (dans les *Exercitationes*). Après lui Torricelli, Stefano degli Angeli, James Gregory, Wallis, étendent et transforment les procédés de manière de plus en plus audacieuse. Le sens même de la notion d'indivisible évolue : les indivisibles de Cavalieri étaient hétérogènes (« toutes les lignes » d'une figure plane parallèles à une direction donnée, ou « tous les plans » d'un solide parallèles à un plan donné), désormais on traite plutôt d'indivisibles homogènes (des surfaces de largeur infiniment petites au sein d'une surface donnée, ou des tranches solides infiniment minces au sein d'un solide), on s'autorise même à manipuler des indivisibles sur une ligne, sous forme de points d'étendue infiniment petite mais variable.

Les travaux de Pascal font partie de ce bouillonnement créateur, ils manifestent à quel point la mathématique des indivisibles est riche, astucieuse, à quel point aussi la théorie est instable. Le commentaire de Claude Merker met admirablement en relief cette ambigüité essentielle : les indivisibles pascaliens sont un "chant du cygne", un stade de "généralité intermédiaire” entre Cavalieri et Leibniz. Le soubassement géométrique s'avère peu à peu superflu, les centres de gravité deviennent des objets purement formels, la précaution d'un découpage égal apparaît comme un vestige inutile de procédés antérieurs. Un algorithme général se laisse apercevoir comme en filigrane.

Cette étape est ingrate, difficile, parce qu'il faut encore un certain sens de la vision géométrique (on conseillera au novice de commencer par l'annexe 3, où l'on apprend à regarder une roue qui roule et engendre les différents éléments d'une cycloïde), et pourtant les calculs de sommes d'infiniment petits sont déjà ceux de Newton et Leibniz, mais sans l'algorithme général et sans aucun symbolisme. Il n'y a pas de dépendance fonctionnelle clairement explicitée, il faut à chaque fois trouver de quoi dépend la grandeur que l'on calcule. Cette mathématique, à mi-chemin des procédés mécaniques et aveugles du calcul infinitésimal, a son charme propre - s'il y a quelqu'un pour vous en faciliter l'accès -. Grâce au travail de Claude Merker les mathématiques de Pascal devraient gagner de nouveaux lecteurs .

François De Gandt

INTRODUCTION

En 1658, quelques années avant les travaux révolutionnaires de Leibniz et Newton, Pascal lance un concours sur la résolution des problèmes de roulette[1], considérés comme très difficiles. A la date de clôture, comme aucune solution nouvelle et juste n'est trouvée, Pascal se décide à faire paraître sept petits traités dont l'ensemble, qui sera désigné ici par *Traité de la roulette* (en abrégé, *Traité* ou *TR*) constitue la résolution de dix-huit problèmes posés, par une méthode très générale qui les traite en quelque sorte tous à la fois. Ce *Traité* n'est pas seulement bien écrit, il est une œuvre littéraire, composée par un très grand écrivain classique, dont le moindre souci n'était sans doute pas de montrer que l'on peut à la fois être janséniste et bon mathématicien…

L'intérêt mathématique va bien au delà du défi lancé ; l'enthousiasme d'Emile Picard est pleinement justifié :

> *On trouve dans l'ouvrage de Pascal sur la roulette, sous des formes géométriques extrêmement ingénieuses les résultats fondamentaux se rapportant à ce que les géomètres appellent aujourd'hui les intégrales curvilignes et les intégrales doubles (…). C'est le premier traité de calcul intégral.*

Toujours du point de vue des géomètres d'aujourdhui, ajoutons que Pascal a créé quinze formules d'intégration par parties – éventuellement mêlées d'intégrale double et curviligne – complètement générales car portant sur des courbes arbitraires : les *trilignes quelconques*, et qu'il manie une technique de changement de variable. Tout est entièrement géométrique.

Pascal n'effectue jamais les calculs des dix-huit problèmes. Il donne dans les six premiers traités les moyens de les faire, et explique dans le septième comment se servir des six autres. La rédaction est de type

1 - La roulette (ou cycloïde) est la courbe que décrit un clou fixé sur une roue qui roule sans glisser sur une droite. C'est une courbe qui n'a pas été considérée avant le XVIIe siècle.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

formaliste: les causes finales sont tues sauf dans le premier traité. Les indications du septième traité sont laconiques et précises. Chaque problème exige la visite de plusieurs traités, souvent même de tous. L'armature logique, la concision, l'articulation des propositions sont impressionnantes.

Pour comprendre le texte nous avons pris le parti d'effectuer complètement les calculs des dix-huit problèmes. En effet la dynamique propre des calculs révèle des éléments qui restent cachés lors d'une lecture, si attentive soit-elle, du *Traité de la roulette*. Les sommes triangulaires se voient prises dans un réseau d'"échanges algébriques" que seule une mise en œuvre des calculs peut révéler. Aussi cette étude propose-t-elle, à côté d'une étude du texte, une plongée dans les eaux profondes (de certains) des calculs à la manière de Pascal.

Comment Pascal a pu venir au bout de problèmes si difficiles: par une méthode des indivisibles complètement nouvelle.

Pascal ne disposait pas de l'algorithme fédérateur du calcul par primitive. S'il a pu écrire le *premier Traité de calcul intégral*, idée à laquelle il est raisonnable de souscrire, c'est qu'il a complètement renouvelé la méthode des indivisibles. Cette dernière avait d'ailleurs subi bien des remaniements en une trentaine d'années.

Pour le dire rapidement, et dans le cas plan, chez Cavalieri les objets du raisonnement sont des lignes, chez Roberval ce sont des rectangles évanouissants, chez Pascal ce sont les largeurs de ces rectangles ainsi que – même et surtout – les côtés obliques de trapèzes évanouissants[2]. Seuls les indivisibles de Cavalieri sont réellement indivisibles.

C'est alors une méthode des indivisibles, très pascalienne, sans indivisibles, qui est un des fils conducteurs du *Traité*. Des lignes droites ou courbes sont subdivisées à l'infini en ce que Pascal appelle des « petites portions », sortes de différentielles géométriques rentrant dans la construction de « sommes » variées, intégrales simples, doubles ou triples, pour le dire comme aujourd'hui. En effectuant pas à pas les calculs, il apparaît que ces différentielles sont constamment transformées en d'autres.

2 - La méthode de Cavalieri est la plus abstraite. Il y a deux sortes d'objets, les continus et les agrégats d'indivisibles. Les relations entre deux agrégats se reflètent dans les continus qui leur correspondent. Voir l'article de François De Gandt (dans APMEP), et la note humoristico-fonctorielle de la page 100.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Trois ingénieuses figures géométriques se chargent de cela, deux d'entre elles échangent différentielles droites et différentielles courbes. Les innombrables échanges se terminent généralement, pour un problème donné, en une somme où les différentielles naissent de l'arc de cercle. Car, pour Pascal, la roulette est un cercle (en un sens à préciser !), et l'intégrale curviligne dans le cercle est la plus naturelle – c'est la seule qu'il *effectue* ; toutes les autres se déduisent de celle-là par des transformations virtuoses.

La mobilité des « petites portions » est peut-être le caractère le plus frappant de tout le *Traité*. Par exemple, les sommes triangulaires qui semblaient, aux dires mêmes de Pascal, inventées pour calculer des centres de gravité interviennent le plus fréquemment pour changer d'élément différentiel. Schématiquement le *Traité de la roulette* est un traité de transformation d'intégrales. Les transformations d'intégrales se font toujours par transformation de leurs éléments différentiels. Il n'y a pas de "variable" géométrique privilégiée à laquelle on rapporterait tout, comme on le fait maintenant avec la variable x. Or ces techniques de transformations ont un terme. Pour un problème donné, le processus s'arrêtera lorsque l'on sera en présence d'une intégrale calculable. Les différentielles courbes – nées d'un arc de cercle – sont privilégiées dans l'acte final du calcul. Autrement dit, la plupart des calculs aboutissent dans le *Traité des sinus du quart de cercle*, spécialisé dans cette sorte de « petites portions » courbes.

Une seule fois le lien avec la primitive fait une percée, à travers un triangle caractéristique, dans le *Traité des Sinus du quart de cercle*. Ce lien n'est pas repéré comme tel, ne réapparaîtra plus, car Pascal n'a pas vu la généralité du triangle caractéristique, autrement dit la réciprocité du problème Quadrature-Tangente. Il reviendra à Newton et Leibniz[3] d'accorder à ce fait l'importance qui lui revient : révolutionner le calcul en donnant un procédé automatique qui transformera tous les résultats d'intégration obtenus depuis l'antiquité – autant de preuves du génie de leurs auteurs – en simples applications d'une procédure routinière.

Lire le *Traité de la roulette*, c'est faire un état des lieux avant cet événement :

* Le *Traité de la roulette* ignore le calcul par primitive, à une exception importante près.

* Mais il met des différentielles sur le devant de la scène. Ces différentielles ont une forme géométrique, elles ne s'appellent pas dx, dy ou ds, mais MM, II, ou

3 - Leibniz dit "avoir puisé la lumière" dans le *Traité de la roulette*.

DD (…) du nom des points de la subdivision « indéfinie » et géométrique qui leur a donné naissance. Ce sont elles qui font du *Traité de la roulette* un *Traité*.

Un ordre “infinitésimal” 1, 2 ou 3 est affecté à ces différentielles de manière littéraire, au cours du texte, car Pascal n'a pas de notation exponentielle, reste méfiant par rapport à l'algèbre, et refuse toute écriture mathématique autre que les lettres désignant des points. Son symbolisme est le même que celui d'Archimède ! En revanche il dispose de la langue des grands classiques et des profondes réflexions sur la liberté des définitions qu'il a faites ailleurs (dans l'Opuscule *De l'esprit géométrique*). Il utilise tout un système d'abréviations, purement littéraire, pour nommer les différentes sommes. A partir du deuxième traité, les petites portions ne seront plus jamais nommées explicitement alors qu'elles seront présentes dans l'abrégé du discours que constitue la définition de nom. Ce fait est très paradoxal, car c'est justement d'avoir été nommées qui donne leur force aux petites portions pascaliennes. Mais elles n'ont été nommées que pour être aussitôt sous-entendues, cependant que leur essence demeure et qu'elles travaillent souterrainement.

Pascal emploie l'expression « méthode des indivisibles » pour qualifier son propre travail.

Calcul intégral et rapport à la raison

L'auteur des *Pensées* n'éprouve aucune gêne à utiliser ces êtres paradoxaux que sont les « petites portions », existantes (pour faire les calculs) et non existantes à la fois (pour que le résultat soit exact). Pas plus que, dans la forme, il ne se soucie de travailler sur des objets qu'il ne nomme plus jamais après la fin du premier traité. Paradoxe, présence-absence sont des éléments de ce que Lucien Goldmann appelle la vision tragique du Pascal des *Pensées*. L'esprit des *Pensées* n'est plus du tout celui, rationaliste, des *Provinciales*. Faut-il voir dans le *Traité de la roulette* un effet de cette troisième conversion de 1657 – laissée de côté par la critique – dont parle Lucien Goldmann ? Pour oser faire du calcul infinitésimal au XVII^e siècle ne faut-il pas prendre certaines distances avec le rationalisme ? Pascal affiche ce que Descartes ne mettrait que dans sa correspondance. Le “Traité” de Descartes, c'est *La Géométrie* et *La Géométrie* est rationaliste ; la cycloïde en est exclue car sa définition contient de l'infini.

Une chose est sûre : Pascal a fait entrer les lignes trigonométriques dans le calcul infinitésimal, avec le *Traité de la roulette* qui est en réalité un

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

profond Traité du cercle. Un vrai calcul de l'infini est à l'œuvre, qui ne se soucie pas d'inopportune rigueur. Des techniques de calcul aux accents futuristes sont mises en place par la géométrie. La géométrie va bientôt laisser place aux méthodes analytiques. D'où cet aspect étrange, unique dans l'histoire du calcul intégral, que revêt le *Traité de la roulette*, de chant du cygne tourné vers l'avenir.

De quoi s'agit-il exactement ?

Par *Traité de la Roulette*, on entend l'ensemble des sept petits traités que Pascal écrivit en 1658 et dont voici les noms :

1 – *Lettre de Monsieur Dettonville à Monsieur de Carcavi*

2 – *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets*

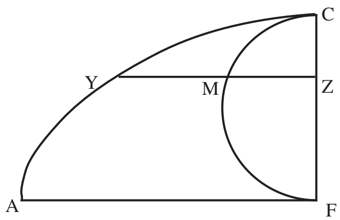
3 – *Propriétés des sommes simples*

4 – *Traité des sinus du quart de cercle*

5 – *Traité des arcs de cercle*

6 – *Petit traité des solides circulaires*

7 – *Traité général de la roulette.*



La roulette (appelée aussi cycloïde, ou trochoïde) est la courbe engendrée par le point C lorsque le cercle de diamètre FC roule sans glisser sur la droite AF.

L'ensemble de ces traités donne au lecteur tout ce qui est nécessaire pour résoudre les dix-huit problèmes sur la roulette que voilà, regroupés trois par trois :

I – L'aire de l'espace CZY ; la position de son centre de gravité. (3 problèmes en tout, car celui du centre de gravité est double).

II – Le volume du solide engendré par la rotation d'un demi-tour autour de ZY ; la position de son centre de gravité.

III – Le volume du solide engendré par la rotation d'un demi-tour autour de CZ ; la position de son centre de gravité.

IV – La longueur de l'arc CY ; la position de son centre de gravité.

V – L'aire de la surface courbe engendrée par la rotation d'un demi-tour de l'arc CY autour de ZY ; la position de son centre de gravité.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

VI – L'aire de la même surface courbe… autour de CZ ; la position de son centre de gravité.

Le centre de gravité est repéré par ses deux distances, à la *base* YZ, à l'*axe* CF, dites *bras sur la base, bras sur l'axe* respectivement.

L'ensemble des énoncés I, II, et III, constitue les *Problèmes de Juin*, tandis que l'ensemble des énoncés IV, V, et VI, constitue les *Problèmes d'Octobre.* Il y a des raisons à ce partage, nous le verrons dans la deuxième annexe.

Les résultats ne sont pas donnés, Pascal ne donne que les méthodes. La lecture du *Traité de la Roulette* est une lecture active, le lecteur est transporté dans un labyrinthe. Les connexions entre les sept traités sont étroites, la résolution de chaque problème exige la plupart du temps de se reporter aux sept.

Les plus importants, car novateurs, sont les traités 1, 2, 4.

Les traités 3 et 6 sont de pure technique ou reprennent des résultats d'Archimède et de Guldin en les réécrivant dans le langage des sommes triangulaires et pyramidales.

Le traité 5 est une traduction du traité 4 par une des méthodes de métamorphose des différentielles que le traité 2 à mises en place.

Le traité 7 donne essentiellement la manière de se repérer dans le dédale extrêmement articulé des six autres.

Le traité 2 est particulièrement extraordinaire, c'est un traité d'intégration, général. Une œuvre d'art, intemporelle.

Résumé du livre

Nous présentons au chapitre I, les différentes « sommes » que Pascal expose dans la *Lettre à Carcavi*, avec leurs abréviations. Ce sont les outils du *Traité*. Leurs abréviations constituent un système fort articulé et étroitement lié à la pensée de l'auteur.

Au chapitre II, nous montrons comment ces sommes – de par la nature géométrique et l'ordre des éléments différentiels qu'elles mettent en jeu – permettent de développer des techniques comme l'"intégrale curviligne", le "changements de variable", l'"intégrale double et triple" dans le cercle, et l'"intégration par parties" éventuellement mêlée d'"intégration double".

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Il s'agira essentiellement dans ce chapitre, des deux traités suivants : le *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets* et le *Traité des sinus du quart de cercle*. Le célèbre avertissement du *Traité des sinus* fera l'objet d'une attention particulière. Il résume la manière dont Pascal calcule l'infini.

Le chapitre III est consacré à la mise à plat d'un calcul, celui du volume du solide de la roulette autour de la base AF, pour voir les méthodes pascaliennes à l'œuvre : changements d'éléments différentiels, abstraction géométrique.

Le chapitre IV est basé sur l'idée que la roulette est une multiplicité de cercles : c'est l'idée que Pascal développe au début de son dernier traité, à savoir que tous les problèmes de roulette peuvent et doivent être préalablement traduits en problèmes de cercle. On voit alors comment le *Traité de la roulette* marque l'entrée des lignes trigonométriques dans le champ du calcul intégral.

Le chapitre V propose une interprétation du fait que les « petites portions » naissent toujours d'une infinité de divisions *égales* sur une ligne donnée, puis une interprétation du fait que, si deux lignes sont divisées en « petites portions », les « petites portions » sont égales d'une ligne à l'autre. La conclusion sera que Pascal reste prisonnier d'exigences dont il a donné lui-même, dans la *Lettre à Carcavi*, les moyens de se passer. Pour la première fois, à notre connaissance, la loi de subdivision n'intervient en rien dans le calcul.

Le chapitre VI propose de voir en détail la résolution de deux des *Problèmes d'Octobre*. On y remarquera, plus encore que dans le chapitre III, à quel point la géométrie devient un outil formel.

Le chapitre VII tente de faire un lien entre ces deux textes que Pascal écrit à la fin de sa vie, le *Traité de la roulette*, et les *Pensées*, où l'infini tient une si grande place.

La première annexe, qui propose un résumé de chacun des sept traités, pourra être utilisée à mesure de la lecture, comme un dictionnaire, de même que le glossaire qui figure à la fin.

La deuxième annexe, basée sur l'*Essai sur les secrets des Traités de la roulette* par Pierre Costabel, situe le *TR* dans le contexte général du XVII^{e} siècle.

La troisième passe en revue quelques résultats connus à l'époque, même si Pascal les ignorait au moment où il a écrit son *Traité*.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Pour distinguer les dessins de Pascal des dessins explicatifs propres à cette étude, les lecteurs pourront se reporter au T. IV de l'édition de Jean Mesnard, p. 559 à 563, où figurent tous les dessins du *Traité de la roulette*.

Vocabulaire utilisé pour expliquer Pascal

Pour parler du *TR* nous utiliserons des termes et des notations volontairement anachroniques, dans la mesure où cela se justifie partiellement

– différentielles géométriques

– intégrale, et symbole ∫ car il s'agit d'empilement d'éléments homogènes à la grandeur cherchée.

– intégrale double (ou triple) car il s'agit de sommes de sommes (de sommes de sommes de sommes).

– intégration par parties. Les quinze propositions du *Traité des Trilignes* se traduisent mot à mot en formules d'intégration par parties, il ne peut s'agir là d'un hasard.

– symbole Σ pour désigner les sommes

– etc.

Les guillemets classiques, comme dans « petites portions », encadreront toujours des expressions de Pascal lui-même, tandis que les guillemets en position haute, comme dans "différentielle" encadreront le métalangage explicatif, anachronique ou non (et rempliront les fonctions habituellement dévolues aux guillemets).

Expliquer ainsi l'ancien avec le nouveau n'est pas sans problème. Pour justifier le parti qui a été pris, usons d'une comparaison. Dans un beau livre sur le vitrail du bon samaritain, étude comparée des représentations dans les trois cathédrales de Chartres, Sens et Bourges, Colette Manhes et Jean-Paul Deremble écrivent

> *Il ne manque pas d'ouvrages sur les cathédrales et leurs vitraux. Mais on n'y voit que des représentations isolées de tel ou tel médaillon particulièrement beau. C'est comme si l'on ne connaissait la* Chanson de Roland *que par quelques morceaux choisis ne tenant aucun compte du récit dans son ensemble. Or les vitraux, nous l'avons dit, racontent des histoires. Il faut les lire, non comme de belles suites d'images, mais comme des récits organisés, avec un début, une fin, un "suspense", une progression, des effets de style…*

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Pour rendre compte de la façon dont les plus belles pages de Pascal, souvent citées, s'insèrent dans le tout, nous n'avons pas trouvé d'autre moyen que d'utiliser les concepts modernes comme moyens explicatifs. Cela rompt un peu le charme, certes, mais il était nécessaire de prendre quelques raccourcis pour expliquer le texte !

Quant à ceux qui voudraient retrouver le charme intégral de Pascal en le lisant dans le texte, nous espérons que notre travail de décryptage leur facilitera le voyage.

Remerciements

Ce livre est une réédition revue et corrigée d'une brochure parue à l'IREM de Besançon (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) en 1995.

Je remercie Gaston Fraysse, Jean-Pierre Friedelmeyer, François Jacquin, Frédéric Métin, pour la relecture précise qu'ils ont faite lors de l'édition IREM, les critiques détaillées et les conseils avisés qui s'en sont suivis.

Je remercie François De Gandt et Jean-Luc Verley pour les remarques historiques à propos de la deuxième édition, et François De Gandt d'avoir écrit la préface.

Enfin ce travail n'aurait pas été possible sans l'impulsion donnée, il y a bien des années, par le groupe Inter-IREM Épistémologie pour l'étude des textes originaux.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

CHAPITRE I

LES SOMMES CHEZ PASCAL

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Résumé du Chapitre I

Le premier des sept traités - *la Lettre de Monsieur Dettonville à Monsieur de Carcavi* - constituant le *Traité de la roulette* définit une grande diversité de sommes d'éléments géométriques. Les éléments rentrant dans les sommes simples sont multipliés par des infinitésimaux géométriques «égaux» naissant d'une droite (sommes d'ordonnées, sommes d'arcs) ou d'une courbe (sommes de sinus). La quadrature de la roulette se fait immédiatement en utilisant les sommes simples d'arcs d'un cercle. Les sommes triangulaires sont le produit d'une réécriture de la loi du levier, elles permettent de *trouver* la position d'un centre de gravité. Les sommes pyramidales sont des sommes deux fois triangulaires, plus abstraites que les précédentes de par leur définition même. Le rôle des sommes triangulaires dépasse largement le cadre qui leur a donné naissance, le calcul de centres de gravité. La relation qui lie les trois sommes se simplifie lorsqu'elles ont été passées au continu.

Les sommes simples, triangulaires, pyramidales recèlent des éléments infinitésimaux d'ordre 1, 2 et 3 respectivement, toujours résidus ultimes de divisions égales. Pascal donne un code précis pour les sous-entendre dans les quatrième et huitième avertissements de la *Lettre*. Ce qu'il appelle méthode des indivisibles est plutôt une méthode de calcul avec des différentielles géométriques variées d'ordre 1 à 3, et le mot "indivisible" ne saurait y avoir de sens isolé. Pascal récuse la notion même d'indivisible, en même temps qu'il théorise la liberté des définitions. Ces deux aspects de sa pensée, que l'on trouve exprimés dans un texte plus littéraire *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, se retrouvent dans les avertissements.

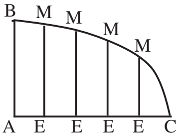
Pour terminer on donnera le calcul de la somme des cordes d'un cercle afin de voir comment des différentielles sous-entendues se transforment en d'autres tout aussi sous-entendues, sans jamais transgresser l'implacable codification que Pascal a mise en place dans ses définitions, laquelle permet de savoir sans ambiguïté à chaque moment de quoi l'on parle.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

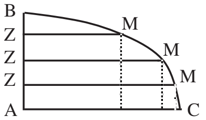
Chapitre I - Les sommes chez Pascal

Pour résoudre les problèmes de roulette, ensemble, Pascal clarifie les sommes déjà existantes et crée d'autres sommes, adaptées. Sur les 18 problèmes à résoudre, 12 sont des problèmes de position de centre de gravité. Le concept utilisé par Pascal à cet effet est celui de « somme triangulaire ».

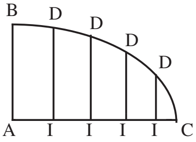
La figure de base est un triligne rectangle, sorte de triangle rectangle à hypoténuse courbe dont les trois côtés seront tour à tour « divisés en un nombre indéfini de parties égales » :



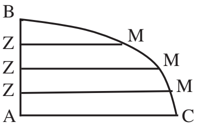
Les ordonnées à la base, ME « naissent de divisions égales sur la base » (les EE).



Les ordonnées à l'axe, MZ « naissent de divisions égales sur l'axe » (les ZZ).



Les sinus sur la base, DI « naissent de divisions égales sur l'arc » (les DD).



Les arcs BM « naissent de divisions égales sur l'axe » (les ZZ).

Les « ordonnées à l'axe » sont nos actuelles abscisses, les « ordonnées à la base », nos ordonnées ; pas tout à fait cependant… Telles les marguerites structuralistes, les ordonnées et les sinus pascaliens n'existent que dans leur relation avec les autres, parler d'*une* ordonnée n'a pas de sens.

Pascal définit de la même façon des sinus sur l'axe.

Pour un triligne non triangle, les sinus ne sont jamais des ordonnées.

Bien qu'il ne s'explique jamais à ce propos, Pascal tient beaucoup aux « divisions égales ». Cela l'oblige à introduire de nouvelles lignes : les « contre-ordonnées » qui naissent du rappel des ordonnées sur l'autre axe ; sur le deuxième dessin sont dessinées en pointillé les contre-ordonnées à la base.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Si le triligne est un quart de cercle et dans ce cas seulement, les DI sont nos actuels sinus.

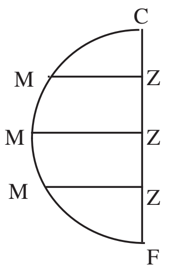
La différence entre sinus et ordonnées est clairement exprimée par Pascal dans le premier traité (Lettre à Carcavi)

> *Il faut aussi remarquer que les sinus diffèrent des ordonnées en ce que les sinus naissent des divisions égales de la courbe, et les ordonnées des divisions égales de l'axe ou de la base.*

1 - Sommes simples. Quadrature de la roulette

Dans l'avertissement du premier Traité, Pascal nous annonce qu'il usera du langage des indivisibles

> *J'ai voulu faire cet avertissement pour montrer que tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles se démontrera aussi à la rigueur et à la manière des anciens; et qu'ainsi l'une de ces méthodes ne diffère de l'autre qu'en la manière de parler : ce qui ne peut blesser les personnes raisonnables quand on les a une fois averties de ce qu'on entend par là.*



> *Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté dans la suite d'user de ce langage des indivisibles, la somme des lignes ou la somme des plans; et ainsi quand je considérerai par exemple le diamètre d'un demi-cercle divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points Z, d'où soient menées les ordonnées ZM, je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, la somme des ordonnées, qui semble n'être pas géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée. (...)*

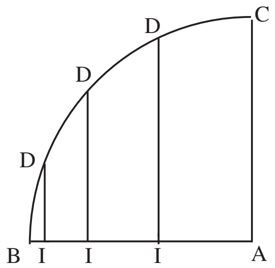
Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Il y a deux problèmes distincts. L'un est d'approximation, il est levé quand le nombre des rectangles égal à celui des divisions devient indéfini. L'autre est de langage, car « la somme des lignes » est une expression lourde de sous-entendus, puisque chaque ligne doit être multipliée par un infinitésimal géométrique non dépourvu d'ambiguïté a priori ; par exemple dans la figure ci dessus « la somme des MZ » désigne-t-elle Σ MZ ZZ ou Σ MZ MM ? Pour Pascal les infinitésimaux par lesquels il faut multiplier les lignes dont on fait la somme doivent naître de divisions *égales*, impérativement. L'*égalité des divisions* est une manière de lever l'ambiguïté, très clairement énoncée quelques lignes plus loin

> *(...) quand on parle de la somme d'une multitude indéfinie de lignes, on a toujours égard à une certaine droite, par les portions égales et indéfinies de laquelle elles soient multipliées. Mais quand on n'exprime point cette droite (par les portions égales de laquelle on entend qu'elles soient multipliées) il faut sous-entendre que c'est celle des divisions de laquelle elles sont nées, comme en l'exemple de la figure 2 où les ordonnées ZM du demi-cercle étant nées des divisions égales du diamètre, lorsqu'on dit simplement la somme des lignes ZM, sans exprimer quelle est la droite par les portions de laquelle on les veut multiplier on doit entendre que c'est le diamètre même (…)*

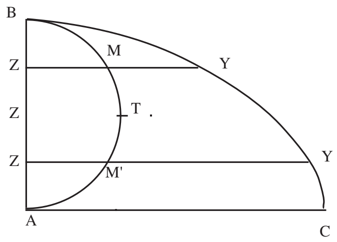
Bien qu'il vienne de dire que l'on avait **toujours** égard à une certaine **droite**, (par les portions etc.), Pascal donne tout de suite la définition d'une somme dans laquelle les portions infinitésimales sont celles d'une **courbe**… montrant par là la supériorité de l'esprit sur la lettre.

> *Ainsi en la figure où l'arc de 90 degrés est divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points D, d'où sont menés les sinus droits DI, si on dit simplement ainsi, la somme des sinus DI, on entendra par là la somme des rectangles compris de chaque sinus DI et de chacun des petits arcs égaux DD (considérés comme étendus en ligne droite) parce que ces sinus sont nés de divisions égales de l'arc.*



Cet avertissement nous signale d'une part le caractère nominaliste des indivisibles[1], et d'autre part nous indique le code : *somme des ordonnées à l'axe* veut dire Σ MZ ZZ, *somme des sinus sur la base* signifie Σ DI DD etc… MZ est une *ordonnée*, et DI qui ne s'en distingue en rien est un *sinus* ! Les mots ordonnées et sinus se rapportent aux divisions égales qui leur ont donné naissance ; tout se passe comme si l'égalité des divisions desquelles « naissent les sinus et les ordonnées » n'étaient là que pour indiquer par rapport à quoi il faut "intégrer", on intègre par rapport à des *divisions égales*, c'est à dire que l'on multiplie toujours les lignes dont on fait la somme par des infiniment petits géométriques *nés de divisions égales*. Et là on peut se poser la question : Pascal pensait-il qu'il est nécessaire que les divisions soient égales pour que l'aire soit Σ ME EE ? Nous verrons plus loin que son attitude est ambiguë sur ce point.

Quadrature de la roulette



Si maintenant le triligne est la demi-roulette, la somme des arcs BM permet la quadrature de manière immédiate[2].

En effet, le roulement sans glissement dit, BM désignant l'arc :

$$BM = MY$$

et donc l'aire A = Σ ZY ZZ est

$$\Sigma\ BM\ ZZ + \Sigma\ MZ\ ZZ$$

Mais pour deux points M et M' symétriques par rapport à T, il vient :

$\Sigma\ BM\ ZZ = \Sigma\ (BM + BM')\ ZZ = 2\ \Sigma\ BT\ ZZ = 2\ BT\ \Sigma\ ZZ = \pi\ R \times R = \pi\ R^2$.

(Pour le premier Σ, Z varie sur le diamètre ; pour les suivants Z ne varie que sur le rayon).

En ajoutant Σ MZ ZZ, (qui est l'aire du demi-cercle) à πR^2, on trouve que l'aire de la demi-roulette est trois fois celle de son demi-cercle.

1 - Le mot « indivisible » n'apparaît ici qu'à l'intérieur d'une expression, « doctrine des indivisibles », « règle des indivisibles », « méthode des indivisibles » ; il n'est qu'une manière de parler de rectangles dont la largeur est appelée à tendre vers zéro. On ne peut faire aux indivisibles de Pascal le reproche d'hétérogénéité.

2 - Pascal ne fait jamais les calculs, il donne les méthodes générales, et laisse le lecteur faire le reste ; le calcul qui suit est suggéré par l'esprit des Traités, où les sommes d'arcs tiennent une grande place.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Aucune quadrature de la roulette n'est plus courte[3] ; écrire Σ BM ZZ est très audacieux ; les prédécesseurs de Pascal ramènent le "courbe" au "droit" par division de l'arc, tandis qu'ici BM n'est pas subdivisé en arcs infinitésimaux, il est gardé en tant qu'arc fini et rentre comme tel dans les sommes.

2 - Sommes triangulaires

Une réécriture de la loi du levier d'Archimède permet à Pascal de poser les problèmes de la roulette sous une forme unifiée. Il s'agit d'une articulation très importante dans la genèse des écrits sur la roulette. Pascal explique longuement dans la Lettre à Carcavi (le premier Traité) ce que sont ces sommes sur lesquelles reposent ses calculs.

> *Je ne me contenterai donc pas de vous donner les calculs (...) Mais je vous découvrirai ma méthode générale pour les centres de gravité, qui vous plaira d'autant plus qu'elle est plus universelle ; car elle sert également à trouver les centres de gravité des plans, des solides, des surfaces courbes et des lignes courbes. J'ai besoin pour vous l'expliquer de cette définition :*
>
> *S'il y a tant de quantités que l'on voudra A, B, C, D, lesquelles on prenne en cette sorte : premièrement la somme de toutes A, B, C, D ; puis la somme des mêmes, excepté la première, savoir B, C, D ; puis la somme des mêmes excepté les deux premières, savoir C, D ; et ainsi toujours, comme on les voit ici marquées :*
>
> *J'appelle la somme de ces quantités, prises de cette sorte, la somme triangulaire de ces mêmes quantités, à commencer par A ; car on pourrait prendre la somme de ces mêmes quantités à commencer par D, et qui ne serait pas la même.*
>
> A B C D
> B C D
> C D
> D
>
> *Cela posé, je vous dirai les pensées qui m'ont mené à cette connaissance. J'ai considéré une balance B, A, C,*

3 - La première quadrature de la roulette a été donnée par Roberval en 1638 par une méthode indivisibles-à-la-manière-de-Cavalieri ; plusieurs autres ont suivi, par Fermat, Descartes, Torricelli. Même la méthode moderne par primitive est moins rapide que celle à la manière de Pascal.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

suspendue au point A, et ses bras de telle longueur qu'on voudra AB, AC, divisés en parties égales de part et d'autre, avec des poids pendus à chaque point de division, savoir au bras AB, les poids 3, 5, 4, et au bras AC, les poids 9, 8 ; et supposant la balance être en équilibre dans cet état, j'ai tâché de comprendre quel rapport il y avait entre les poids d'un bras et ceux de l'autre, pour faire cet équilibre. Car il est visible que ce n'est pas que la somme des uns soit égale à la somme des autres. Mais voici le rapport nécessaire pour cet effet.

Pour faire que les poids d'un bras soient en équilibre avec ceux de l'autre, il faut que la somme triangulaire des uns soit égale à la somme triangulaire des autres, à commencer toujours du côté du point A. Et la démonstration en sera assez facile par le moyen de ce petit lemme, dont vous verrez un assez grand usage dans la suite.

Si les quatre quantités A, B, C, D, sont prises en cette sorte ; la première une fois, la seconde deux fois, la troisième trois fois, etc., je dis que la somme de ces quantités prises de cette sorte est égale à leur somme triangulaire en commençant du côté de A.

D	C	B	A	A B C D
4	3	2	1	B C D
				C D
				D

Car en prenant leur somme triangulaire, on ne fait autre chose que les combiner en telle sorte, qu'on prenne A une fois, B deux fois, C trois fois, etc.

Venons maintenant à ce que je propose de la balance. On sait assez en géométrie que les forces des poids sont en raison composée des poids et des bras, et qu'ainsi le poids 4 en la troisième distance a une force triple ; que le poids 5 en la seconde distance a une force double, etc. Donc la force des poids des bras se doit considérer en prenant celui qui est à la première distance une fois, celui qui est à la seconde deux fois, etc. Ainsi, pour faire qu'il soient en équilibre de part et d'autre, (...) Il faut que la somme triangulaire des uns soit égale à la somme triangulaire des autres. C.Q.F.D.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Une somme triangulaire est une *somme double*, une *somme de sommes* qui peut être calculée de deux manières différentes :

1 - en faisant la somme des sommes obtenues pour chaque ligne :

$$(A + B + C + D) + (B + C + D) + (C + D) + (D)$$

2 - en faisant la somme des sommes obtenues pour chaque colonne :

$$A + (B + B) + (C + C + C) + (D + D + D + D)$$

Nous verrons que Pascal calcule des "intégrales doubles".

Connaissant le centre de gravité, on en déduit l'égalité de deux sommes triangulaires, mais à ce stade rien de nouveau n'est donné pour chercher le centre de gravité. La proposition I qui suit, elle, est une réécriture complètement nouvelle et majeure, car elle permet de *chercher* le centre de gravité : l'inconnue figure toute seule dans un membre de l'équation.

PROPOSITION I

Soit CAB une balance, divisée en tant de parties égales qu'on voudra, aux points C, D, A, E, F, B, auxquelles soient pendus les poids 8, 9, 5, 4, 0, 7 ; de tous lesquels ensemble le centre de gravité soit au point A (l'un des points).

Je dis que la somme triangulaire de tous ces poids, à commencer du côté qu'on voudra, par exemple du côté de C, c'est-à-dire, la somme triangulaire des poids 8, 9, 5, 4, 0, 7, est égale à la simple somme de ces poids, 8, 9, 5, 4, 0, 7, (c'est-à-dire à la somme de ces poids pris chacun une fois), multipliée autant de fois qu'il y a de points dans le bras CA (puisqu'on a commencé par le côté C), c'est à dire trois fois en cette figure.

7. 0. 4. 5. 9. 8.
7. 0. 4. 5. 9.
7. 0. 4. 5.

7. 0. 4.
7. 0.
7.

99.

7. 0. 4. 5. 9. 8.
7. 0. 4. 5. 9. 8.
7. 0. 4. 5. 9. 8.

.

99.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Car la somme triangulaire des poids 4, 0, 7, pendus au bras AB (qui est distingué du reste par une barre dans la première partie de la figure), est égale à la petite somme triangulaire des poids 9, 8, pendus à l'autre bras AC (qui est aussi distinguée du reste dans l'autre partie de la figure). Et les restes sont les mêmes de part et d'autre.

AVERTISSEMENT

Je sais bien que cette manière de démontrer n'est pas commune; mais comme elle est courte nette et suffisante à ceux qui ont l'air de la démonstration, je la préfère à d'autres plus longues que j'ai en main.

Cette « méthode générale », nous la connaissons bien aujourd'hui, en effet nous ne disons rien d'autre lorsque nous écrivons:

$$\Sigma\, \alpha_i\, OA_i = \Sigma\, \alpha_i\, OG$$

le schéma

B	______	F	------	E	------	A	------	D	------	C
7		0		4		5		9		8

devenant tout simplement

A_6	______	A_5	______	A_4	------	A_3	------	A_2	------	A_1	------	O
α_6		α_5		α_4		α_3		α_2		α_1		

Le poids α_i est affecté d'un « poids » égal au nombre i de points A_k du segment $[O\, A_i]$. Pour une subdivision en longueurs unité le nombre de points du segment $[O\, A_i]$ se confond avec la longueur OA_i; α_i pèse d'autant plus qu'il est plus loin, et nous reconnaissons dans $\Sigma\, \alpha_i\, OA_i$ la *somme triangulaire des α_i à commencer par A_1* [4].

Mais Pascal n'est pas en train d'écrire un traité d'arithmétique! Il a en vue l'étude du continu, du continu courbe que seul un calcul du type calcul intégral permet d'appréhender; il va réécrire un résultat obtenu par l'arithmétique

$$\Sigma\, \alpha_i\, OA_i = \Sigma\, \alpha_i\, OG$$

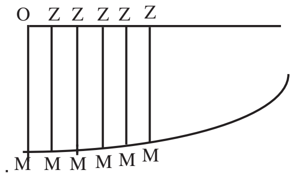
4 - En toute rigueur les domaines de validité des deux formules, celle de Pascal exprimée en termes de somme triangulaire et la nôtre, ne sont pas les mêmes; Pascal a besoin des divisions égales ce qui est plus restrictif que de peser proportionnellement à l'éloignement. Voir le chapitre V, *Divisions égales.*

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

dans un langage adapté à la géométrie. Le passage à des figures continues soulève de multiples problèmes ayant trait à l'infini, tant pour la balance dont les divisions égales vont devenir infiniment petites que pour les poids qui cessent d'être ponctuels.

L'esprit est le suivant: un triligne-plaque-pesante dont chaque élément pèse sa propre surface est pendu par sa base métamorphosée en balance; où faut-il pendre la balance pour qu'il y ait équilibre? La base est divisée en parties ZZ égales, et cette condition d'égalité est indispensable si l'on tient au formalisme des sommes triangulaires. Ces parties sont en nombre indéfini, et cette condition d'infinitude est nécessaire pour que les erreurs faites en confondant le droit et le courbe disparaissent.

Pour des ZZ assez rapprochés tout se passe comme si en chaque point Z de la balance pendait le poids ZZ ZM. [5]



La formule du bras, traduite, prend la forme

$$\Sigma \text{ ZZ ZM i ZZ} = \text{Surface de la plaque x OG}$$

en effet les ZZ ZM ne sont autres que les poids α_i, et les i ZZ sont les OA_i. [6]

On reconnaît dans la somme simple Σ ZZ ZM i ZZ, égale à Σ i ZZ ZZ ZM, une somme triangulaire « à partir de O »

$$\sum_{\text{triang} \quad O} \text{ZM ZZ}^2 \ldots$$

Ainsi le bras sur l'axe, OG est donné, à un facteur près, par une somme triangulaire que Pascal appelle tout au long du Traité *somme triangulaire des ordonnées à la base ZM* entendant par cette expression en réalité celle-ci *somme triangulaire des ordonnées à la base ZM multipliées par* ZZ^2, *pour un nombre indéfini de divisions égales ZZ.*

5 - Deux approximations ont donc lieu, que Pascal justifie remarquablement pour son époque. On pourra consulter l'analyse de J. P. Cléro dans *Cahiers pédagogiques de Philosophie et d'Histoire des Mathématiques* CRDP Rouen.

6 - Pascal n'utilise bien sûr jamais d'indices. Z_i correspondrait au i[ème] point Z rencontré en partant de O.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Pascal est beaucoup moins clair à propos de ce carré d'élément infinitésimal qu'il ne l'était lorsque cet élément infinitésimal figurait dans les sommes simples. C'est dans le 8ème avertissement de la Lettre qu'il est le plus explicite. Nous en reparlerons un peu plus bas, à la fin du § 3.

Le rôle de l'exposant 2 (ZZ figure au carré dans la somme triangulaire) est remarquable, il rend la somme finie : la somme triangulaire des ZM ZZ serait infinie, et celle des ZM ZZ^3 nulle, sans intérêt… L'exposant 2 est le seul possible lorsqu'on parle le langage des sommes triangulaires "continues" : tout se tient dans ce mode de calcul basé sur les *ordres*.

D'autres balances fictives permettent de façon analogue de calculer des bras (des positions de centres de gravité) pour des lignes courbes, des surfaces courbes ou des volumes, en utilisant ce mode d'expression qu'est la somme triangulaire "continue".

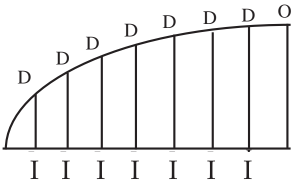
Récapitulons et concluons

– Pour situer ***relativement à O*** les centres de gravité de tout ce que l'on peut imaginer, voilà la méthode merveilleuse : il suffit de faire au départ la somme de tous les éléments qui jouent le rôle de poids (arcs, surfaces ou volumes infinitésimaux), puis la somme de tous sauf le premier ***en partant de O***, puis la somme de tous sauf les deux premiers, etc. jusqu'à épuisement ; et enfin d'additionner toutes ces sommes entre elles. Dans ce cas on calcule la somme triangulaire en faisant les sommes des éléments sur une même ligne du triangle.

– Quand il le faudra, on jouera sur l'autre tableau et on dira que la somme triangulaire, c'est une fois le premier élément plus deux fois le second plus trois fois le troisième etc..

– Chaque fois que l'on fait une somme triangulaire "en continu", chaque élément de courbe, de surface, etc. est multiplié par le carré du ZZ de la division régulière qui est faite sur la balance.

– Si l'on divise un arc en un nombre indéfini de parties égales DD, la somme triangulaire des sinus DI multipliés par DD^2 reste calculable et finie, bien que l'arc puisse difficilement être vu comme une balance. Cette somme triangulaire et d'autres analogues sont constamment utilisées par Pascal à titre d'instrument de calcul. C'est une des caractéristiques du Traité de faire d'éléments



Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

a priori très chargés de sens physique ou géométrique des atomes de calcul formel rentrant dans des architectures compliquées où ils perdent tout sens concret.[7] Pascal a une grande aptitude à faire jouer à la géométrie le rôle du symbolisme algébrique qu'il n'a pas et qu'il refuse !

– Pascal est émerveillé par sa propre découverte ; de nouvelle portes s'ouvrent, il va être possible désormais, non plus seulement d'utiliser un centre de gravité connu pour faire d'autres calculs, mais de le chercher puisqu'il devient une inconnue du premier degré dans une équation. Tel est l'acte de naissance du beau théorème d'interversion que nous connaissons sous sa forme débarrassée des contraintes de divisions égales :

L'ABSCISSE DU CENTRE DE GRAVITÉ EST LE CENTRE DE GRAVITÉ DES ABSCISSES

3 - Sommes pyramidales

Autre création pascalienne, les sommes pyramidales sont des sommes "deux fois triangulaires". Pour faire la somme pyramidale de A, B, C, D *à partir de A*, il faut faire la somme triangulaire de A, B, C, D, *à partir de A* puis la somme triangulaire de B, C, D, *à partir de B* puis la somme triangulaire de C, D, *à partir de C*… jusqu'à épuisement. La somme pyramidale ***à partir de A*** est alors la somme de toutes ces sommes.

A	B	C	D	B	C	D	C	D	D
	B	C	D		C	D		D	
		C	D			D			
			D						

Elle est une somme triple.

Il est aisé de montrer ce que dit Pascal

> *s'il y a tant de quantités que l'on voudra A, B, C, dont la première soit multipliée par le carré de 1, la seconde par le carré de 2, la troisième par le carré de 3 etc., leur somme prise de cette sorte sera égale à deux fois leur somme pyramidale moins leur somme triangulaire.*

7 - Comme nous avons essayé de le démontrer dans le chapitre III *Un calcul à la manière de Pascal*.

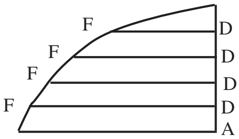
Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

En effet, combien de fois figure le n$^{\text{ème}}$ terme ? (B est le deuxième, C est le troisième) Il figure n fois + (n–1) fois + ... + 1 fois, puisqu'il subit un décalage d'un cran à chaque pas ; soit en tout n (n + 1)/2 fois. Donc, dans 2 fois la somme pyramidale moins la somme triangulaire, ce n$^{\text{ème}}$ terme figure (n (n + 1) – n), soit n^2 fois. Résumé en formule le résultat est

$$2 \sum_{\text{pyr A}} A\,B\,C\,D... - \sum_{\text{triang A}} A\,B\,C\,D... = 1^2 A + 2^2 B + 3^2 C + 4^2 D + ...$$

formule qui lie la somme pyramidale des quantités A B C D, leur somme triangulaire et une somme simple de quantités obtenues à partir des A B C D.

Qu'en est-il maintenant du passage au continu ? Restons pour le moment hors du texte de Pascal, tout en conservant la "manière". Si nous calculons a priori la somme pyramidale des FD DD^3



il vient

$$2 \sum_{\text{pyr A}} FD\,DD^3 - \sum_{\text{triang A}} FD\,DD^3 = \sum n^2\, FD\,DD^3.$$

Formule valable, remarquons le, pour des divisions quelconques DD, ni égales ni infinitésimales. Mais cela ne va pas durer…

Soient donc les DD égales et en nombre indéfini, alors le deuxième terme (la somme triangulaire) est nul, puisqu'il est égal à DD multiplié par une quantité finie (formule du bras). Comme les divisions sont égales, n DD est AD et le troisième terme est $\sum AD^2\, FD\, DD$.

Ainsi la somme triangulaire disparaît sans laisser de trace et la somme pyramidale s'égale à une somme simple.

$$2 \sum_{\text{pyr A}} FD\,DD^3 = \sum AD^2\, FD\,DD$$

Le cas continu est plus simple que le cas discret !

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Voyons maintenant ce que dit Pascal – à propos de la disparition de la somme triangulaire – dans cette mise en place théorique que constitue la Lettre à Carcavi[8]

> *Car ces carrés étant 1, 4, 9, etc., il s'ensuit que la somme des ordonnées multipliées chacune par chacun de ces carrés, est la même chose que leur somme pyramidale prise deux fois, moins leur somme triangulaire prise une fois.*

C'est un rappel de la formule générale établie plus haut. Il est à remarquer que tous les éléments infinitésimaux sont sous-entendus, aussi bien DD dans *somme des ordonnées multipliées chacune par chacun de ces carrés* que DD^3 dans *somme pyramidale* et dans *somme triangulaire* .

Et Pascal exprime par une succession d'images le fait que la somme triangulaire de tels éléments ne compte pas

> *Or cette somme triangulaire n'est qu'un indivisible à l'égard des sommes pyramidales, puisqu'il y a une dimension de moins, et que c'est la même chose qu'un point à l'égard d'une ligne, ou qu'une ligne à l'égard d'un plan, ou qu'un plan à l'égard d'un solide, ou enfin qu'un fini à l'égard de l'infini; ce qui ne change point l'égalité.*

Les métaphores remplacent ici la démonstration; ces comparaisons sont issues d'une pensée plus générale, une pensée *d'ordres*, où les ordres s'effacent hiérarchiquement les uns derrière les autres. N'est-ce pas celle qui présidera quelques années plus tard au calcul formel sur les infinitésimaux

$$dx + A = A$$

$$dx + dx^2 = dx$$

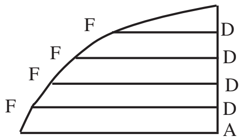
$$dx^2 + dx^3 = dx^2$$

pensée qui se situe elle aussi en dehors de la démonstration. Pascal est d'ailleurs sur la première ligne: la somme triangulaire d'éléments d'ordre 3 est d'ordre 1, leur somme pyramidale est d'ordre 0 (constante) de même que la somme simple d'éléments d'ordre 1 qui figure au deuxième membre.

L'égalité d'une somme pyramidale et d'une somme simple est utilisée par la suite; par exemple dans la démonstration du Corollaire de la proposition III du *Traité des trilignes*, on trouve ceci, où les éléments infinitésimaux DD et DD^3 sont toujours sous-entendus

8 - 8[ème] Avertissement. P. 238 Pascal *Œuvres complètes* J. Chevalier Pléiade.

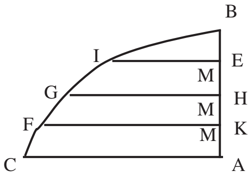
la somme des FD en DA carré est double de la somme pyramidale des ordonnées FD à commencer du côté de A, comme il a été dit dans la lettre



Ce sont les DD qui sont des divisions égales et non pas les FF.

Revenons maintenant au texte de Pascal pour voir où et comment apparaît ce DD^3 qui n'est certainement pas écrit en notation exponentielle. C'est dans ce même 8ème avertissement de la Lettre que Pascal dit explicitement comment il entend construire une somme pyramidale en continu.

Il l'explique pour des ordonnées. Soient l'axe BA du triligne BAC divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points K, H, E… d'où soient menées les ordonnées (ajoutons leur le nom générique de M)



On est assez averti par les choses précédentes que la simple somme des ordonnées est égale à l'espace du triligne

Pascal l'a maintes fois répété : chaque ordonnée doit être multipliée par MM. Il considère que c'est acquis et ne le redit plus.

En revanche il est encore explicite pour la somme triangulaire, pas pour longtemps… Plus bas

Car la somme triangulaire des ordonnées se prend ainsi : premièrement en les prenant toutes ensemble CA, IK, GH, FE ce qui fait un plan égal au triligne ; ensuite en les prenant toutes exceptée la première, c.-à-d. IK, GH, FE ce qui fait un autre plan égal au triligne BIK ; et ensuite GH, FE, ce qui fait un autre plan égal au triligne BGH etc. De sorte qu'il y a autant de plans que de divisions, ***chacun desquels plans étant multipliés par les petites portions de l'axe*** *forme autant de petits solides prismatiques d'égale hauteur tous lesquels ensemble font un solide (…)*

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Avec le MM non redit de tout à l'heure, chaque ligne se voit, à ce stade, multipliée par MM^2.

> *De la même sorte, la somme pyramidale des mêmes ordonnées fait un plan-plan, composé d'autant de solides qu'il y a de portions dans l'axe, lesquels solides sont formés chacun par les sommes triangulaires particulières dont la somme totale fait la somme pyramidale. Car leur somme pyramidale se prend ainsi : premièrement en prenant la somme triangulaire de toutes, qui fait un solide, excepté la première, qui fait un autre solide, etc. Et ainsi, autant qu'il y aura de divisions, il y aura aussi* ***de solides, lesquels étant multipliés chacun par une des petites divisions de l'axe****, formeront autant de petits plans-plans de même hauteur, qui tous ensemble feront le plan-plan dont il s'agit.*

En définitive, chaque ligne en tant qu'elle figurait dans un plan a été multiplié par MM, puis en tant que ce plan était élément d'un volume, elle s'est vue remultipliée par MM, puis en tant que ce volume était lui-même un élément du plan-plan final, elle a été multipliée une troisième fois par MM. Les deux derniers MM sont explicités ici (parties soulignées par nous). Ils ne le seront plus jamais et dorénavant seront aussi sous-entendus que le premier MM l'était ici.

Lorsque nous parlerons de “différentielles” d'ordre 2, ou 3 chez Pascal, il s'agira naturellement de carrés, ou de cubes d'éléments infinitésimaux, et non pas de différentielles secondes, ou troisièmes. Aucune trace de vision de la différentielle comme opérateur n'apparaît chez Pascal. Mais il élève constamment les « petites portions » au carré, ou au cube, pour les besoin de son calcul. Ses “différentielles” sont inféodées à la géométrie, tout en recélant une certaine abstraction, puisque, les sommes pyramidales d'*ordonnées* (êtres de dimension 1) sont de dimensions 4, comme il le souligne lui-même en les appelant plan-plan.

4 - Sommes et indivisibles

On a dit que les traités de Pascal constituaient le stade ultime des indivisibles, qu'après on ne pouvait pas aller plus loin etc. Mais ce mot d'indivisible recouvre des idées très différentes, d'une part d'un mathématicien à l'autre, et d'autre part à l'intérieur de l'Œuvre de Pascal.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

– Les indivisibles de Cavalieri sont *une notion première*. En effet lorsque Cavalieri nous dit que si deux figures balayées par une même règle sont telles que les lignes découpées sont toujours dans le même rapport, alors les surfaces sont aussi dans le même rapport, il énonce une évidence *première*, quelque chose qui n'a donc pas à être justifié, pas plus que de dire que par deux points passe une droite et une seule. Cela permet à Cavalieri de ne pas se poser la question de la composition du continu, Cavalieri ne dit pas qu'une surface est composée de lignes, il dit que deux rapports sont *évidemment* égaux. Les indivisibles de Descartes sont en général de ce genre-là. Il n'y a pas à leur chercher de *nature*, et ils ne doivent rien à la méthode d'exhaustion ; sauf, peut-être, dans le fond, leur seule possibilité d'être justifiés…

– Les indivisibles de Toricelli ont une épaisseur ; du point de vue du futur, ils sont meilleurs, puisqu'ils permettent de penser Σ f(x) dx. Mais comment un indivisible fait-il pour à la fois avoir une épaisseur et être insécable ? La surface est bien composée d'indivisibles, mais l'indivisible a une nature contradictoire, puisqu'il est divisible ! La résolution d'un problème (une surface est bien composée de surfaces, et non pas de ces zéros de surface que sont les lignes) en crée un autre.

– Dans l'opuscule *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*[9] Pascal développe une argumentation très serrée contre l'existence d'indivisibles, à des fins apologétiques : c'est parce que l'esprit humain est incapable de concevoir une division indéfinie d'espace qu'il en arrive à croire à l'existence d'un atome de grandeur, l'indivisible. Et pourtant

> *Qu'y a-t-il de plus absurde que de prétendre qu'en divisant toujours un espace, on arrive enfin à une division telle qu'en la divisant en deux, chacune des moitiés reste indivisible et sans aucune étendue, et qu'ainsi ces deux néants d'étendue fissent ensemble une étendue ?*

Pascal conclut qu'il n'y a pas d'indivisibles. Pourquoi alors certains esprits s'obstinent-t-ils à défendre leur existence ? Parce qu'ils confondent « inconcevable » et « faux », alors que l'esprit humain, limité, peut fort bien ne pas concevoir la vérité. Le propos principal de Pascal est apologétique (rabaisser la raison), mais l'argumentation logique contre la possibilité d'indivisibles est irréprochable.

9 - Impossible à dater avec précision, voir Jean Mesnard, T. III.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

– Chose surprenante, le même auteur, Pascal, qui dénie toute existence aux indivisibles dans *De l'esprit géométrique*, affirme dans le célèbre avertissement de la *Lettre a Carcavi*[10]

> *(...) C'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté dans la suite d'user de ce langage des indivisibles (...)*

Le mot « indivisibles » y apparaît trois fois, toujours comme complément de nom, donc à l'intérieur d'une expression: « règle des indivisibles », « langage des indivisibles », « doctrine des indivisibles » et Pascal indique lui-même qu'en parlant de somme des lignes d'un demi-cercle (par exemple)

> *on n'entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée*

La méthode des indivisibles de Pascal serait plus justement nommée méthodedesindivisibles car elle ne parle pas d'indivisibles. En réalité elle parle de limite. Dans le même opuscule Pascal a bien pris soin de séparer les définitions de nom des définitions de choses. Cela s'applique parfaitement ici: « indivisible » n'est pas une chose c'est (mêlé à « méthode ») un nom pour désigner quelque chose comme "méthode d'exhaustion simplifiée". Le "courbe" est approché par le "droit" et ce d'autant mieux que la subdivision est plus fine. Pascal est ici nominaliste au sens originel de ce terme. Quand quelque chose est privé d'ontologie, à défaut de posséder cette dernière il reste une manière de parler, le flatus vocis des philosophes du moyen-âge.

5 - Caractère abstrait des sommes pascaliennes: elles sont les instruments d'un calcul algébrique. Originalité de Pascal par rapport à ses prédécesseurs: Le *Traité de la roulette* est un traité qui calcule avec des différentielles d'ordre 1 à 3

Dans ces hiérarchies de sommes, Pascal met en place un calcul sur les ordres. L'essentiel devient de savoir ce que l'on peut négliger: par deux fois ce qui ne compte pas est dénommé en tant que tel

10 - Dont de larges extraits sont cités au début de ce chapitre.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

– La différence entre la somme des rectangles et l'espace du demi-cercle

– La somme triangulaire d'éléments infinitésimaux d'ordre 3.

C'est une distance par rapport à la méthode d'exhaustion comme à celle des indivisibles de Cavalieri qui est en train d'être prise.

D'autre part les sommes triangulaires et pyramidales ne sont pas seulement faites pour le calcul des centres de gravité : nous allons les voir entrer, mêlées aux sommes simples, dans des formules les liant les unes aux autres . Et devenir par là de purs instruments de calcul, suppléant à l'absence totale de formalisme algébrique dont Pascal fait preuve un demi-siècle après Viète.

Plus précisément, les sommes triangulaires "continues" remplissent deux fonctions, l'une dite, et l'autre non :

– Une fonction de détermination des centres de gravité, par la *méthode générale.* C'est la seule que leur assigne explicitement Pascal.

– Une fonction plus abstraite, de pur calcul, dans l'"intégration par parties" où elles sont désinvesties de leur signification statico-géométrique pour devenir de purs outils de calcul ; elles servent alors à *renvoyer sur l'axe les ordonnées à la base.*

Chose curieuse, et souvent méconnue, c'est surtout par cette fonction d'outil de calcul qu'elles permirent à Pascal de résoudre les difficiles questions de roulette. De nombreux problèmes qui ne sont pas la recherche d'un centre de gravité se résolvent grâce à des sommes triangulaires devenues formelles.[11] Les problèmes de centre de gravité eux-mêmes utilisent les deux aspects – concret, abstrait – d'une somme triangulaire.

Les sommes de sinus, d'ordonnées, les sommes triangulaires et pyramidales, véritables outils théoriques pour un calcul avec des différentielles, sont des créations de Pascal. Ces sommes permettent d'échanger des éléments différentiels (c'est l'objet du deuxième traité, le plus

11 - Par ex. Chapitre III, *Un calcul à la manière de Pascal*. Les grandeurs géométriques (volumes; surfaces) obtenues par rotation autour de la base se calculent via des sommes triangulaires formelles qui ont pour fonction de se ramener à des ordonnées à l'axe ; rappelons que, de par la définition géométrique de la roulette, ses "bonnes" ordonnées sont ses ordonnées à l'axe.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

général de tous), d'en négliger d'autres (DD^3 dans une somme triangulaire), ce sont elles qui font l'unité et l'originalité de ce *Traité de la Roulette*. Les calculs souvent géniaux des prédécesseurs de Pascal restent isolés les uns des autres, tandis que malgré ses innombrables calculs le *Traité de la Roulette* constitue *Un Calcul* plutôt que *des calculs*.

6 - Liberté des définitions chez Pascal. Retour sur le mot « somme ». Un exemple: la somme d'un faisceau de cordes dans un cercle

La lecture du *Traité de la Roulette* (et des lettres contemporaines) est souvent rendue difficile de par leur style elliptique: les éléments géométriques infinitésimaux – qu'ils soient d'ordre 1, 2 ou 3 – sont dès le deuxième Traité toujours sous-entendus. Les ellipses de Pascal sont des abus de langage qui ne recouvrent cependant jamais aucune ambiguïté.

Pascal nous a livré des réflexions profondes sur la nature de la définition dans l'opuscule *De l 'esprit géométrique* où il définit la définition

> *Il faut que je déclare ce que j'entends par définition: on ne reconnaît en géométrie que les seules définitions que les logiciens appellent définitions de nom, c'est à dire que les seules impositions de nom aux choses qu'on a clairement désignées en termes parfaitement connus*
>
> *Leur utilité et leur usage est d'éclaircir et d'abréger le discours, en exprimant par le seul nom qu'on impose, ce qui ne pourrait se dire qu'en plusieurs termes; en sorte néanmoins que le nom imposé demeure dénué de tout autre sens, s'il en a, pour n'avoir plus que celui auquel on le destine uniquement. (…)*

Après avoir donné comme exemple de définition celle du mot « pair » Pascal continue

> *D'où il parait que les définitions sont très libres et qu'elles ne sont jamais sujettes à être contredites; car il n'y a rien de plus permis que de donner à une chose que l'on a clairement désignée un nom tel que l'on voudra.*

Cet écueil ne manquera pas d'arriver, qu'un nom déjà utilisé pour désigner une chose soit librement chargé d'en désigner une autre. Pascal poursuit

25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

> *mais si l'on tombe dans ce vice, on peut lui opposer un remède très sûr et très infaillible : c'est de substituer mentalement la définition à la place du défini.*

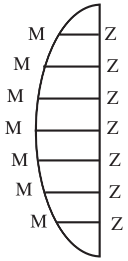
Ce texte est très moderne, par cette mise en place de l'arbitraire du signe, et de la prééminence du signifiant sur le signifié. Il est bien plus moderne que les textes mathématiques de Pascal enracinés dans la géométrie à tel point que le travail sur les symboles a lieu sur les sommes triangulaires, naturellement peu aptes à tenir ce rôle !

Prenons « la somme des DI », c'est un nom qui a déjà un sens : la somme des DI, pour un nombre indéfini de lignes DI, est infinie ; il ne peut s'agir de cela. Substituons la définition au défini, ce qui est facile, puisque Pascal a défini de manière très précise ce qu'il entendait par là : la somme des DI n'est pas la somme de tous les DI (c'est-à-dire Σ DI), mais la somme des DI multipliés chacun par les « petites portions », toutes égales entre elles, de celle des lignes de la figure que l'on a divisée en un nombre indéfini de parties égales (Σ DI DD ou Σ DI II, selon que c'est l'arc ou l'axe qui a été subdivisé en un nombre indéfini de parties égales). Abréviation libre du discours, cette expression « la somme des DI » ne recèle aucune obscurité à condition de revenir à la définition.

La définition des sommes simples de lignes est traitée de manière très exhaustive au cours du texte dont nous avons déjà cité des extraits au premier paragraphe. Le reste (sommes simples de plans, de solides ; sommes triangulaires ou pyramidales) est moins détaillé, laissé à la compréhension libre du lecteur, supposé s'être habitué au mécanisme (chercher les divisions égales, multiplier par les infinitésimaux qu'elles fabriquent, à l'ordre qu'il faut).

Quatre cas de sommes simples de lignes sont à envisager.

a - Les lignes dont on fait la somme sont droites et la ligne divisée en petites portions (infinitésimales) aussi.



Les divisions ZZ sont égales et en nombre indéfini.

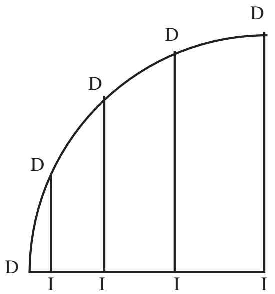
Les lignes MZ, comme le diamètre subdivisé, sont des lignes droites.

« La somme des MZ » est une abréviation du discours pour dire « la somme des MZ ZZ ». Pascal dit aussi « la somme des ordonnées à l'axe »

C'est le cas où l'on obtient des aires.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

b - Les lignes dont on fait la somme sont droites et la ligne divisée en petites portions (infinitésimales) est courbe.



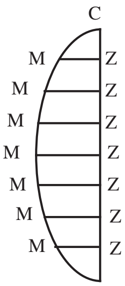
Les DD sont égales et en nombre indéfini.

Les lignes DI sont droites, mais la ligne subdivisée est courbe.

« La somme des DI » désigne « La somme des DI DD ». Aucune confusion ne peut avoir lieu avec « La somme des DI II », les II ne sont pas égales ! Pascal dit aussi « la somme des sinus sur la base ».

On n'obtient plus des aires, du moins pas pour la courbe dessinée. (C'est un problème d'intégrale curviligne, non désigné comme tel, bien sûr).

c - Les lignes dont on fait la somme sont courbes et la ligne divisée en petites portions (infinitésimales) est droite



Les ZZ sont égales et en nombre indéfini.

Les arcs CM dont on fait la somme sont des lignes courbes, mais la ligne subdivisée est droite.

« La somme des (arcs) CM » est une abréviation pour dire « la somme des CM ZZ ». Pascal dit aussi « la somme des arcs »

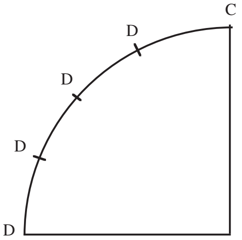
Ce genre de somme ne se rattache à rien pour nous au XX^{e} siècle.

Pascal les transforme très vite en sommes du type vu au b) ci-dessus.

d - Les lignes dont on fait la somme sont courbes et la ligne divisée en petites portions (infinitésimales) est courbe. Ce cas est mentionné mais Pascal ne donne pas d'exemple dans l'avertissement.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr



Au cours du *Traité de la Roulette*, on rencontrera

– La somme des CD DD (ou des CD^n DD). C'est le cas le plus facile, puisque c'est une somme de puissances, fort bien maîtrisée à l'époque.

– Une somme d'arcs de cercle multipliés chacun par un élément infinitésimal né de divisions égales sur la roulette. Pascal transforme de manière à tout remettre dans un autre cercle.[12]

C'est là le détail de ce que Pascal exprime avec concision lorsqu'après avoir longuement disserté sur le cas a), il nous dit que les quatre cas sont identiques

> *Il faut entendre la même chose quand toutes les lignes seraient courbes, tant celles dont on considère la somme que celle par les portions de laquelle on les multiplie : ou quand les unes sont droites et les autres courbes comme (…)*

La même chose cela veut dire que dans toute situation il faudra multiplier les lignes par les portions nées de divisions égales.

Plus généralement, et c'est là la clé du calcul intégral de Pascal, quelle que soit la forme particulière que prend le problème — que les sommes soient simples, triangulaires, pyramidales, que l'on somme des lignes, des aires, des volumes, des carrés d'arcs ou des produits de tout cela — une seule chose est invariante :

Une « somme d'éléments géométriques » est toujours une abréviation du discours pour dire « la somme des mêmes éléments géométriques multipliés par les portions infinitésimales nées de divisions égales, ces portions étant élevées à la puissance convenable »

12 - Voir le chapitre VI, *Les problèmes d'Octobre*. Une telle somme calcule la surface courbe du « solide autour de l'axe ».

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Un exemple

On trouve cet énoncé, et sa solution, laconiques, dans une lettre à Huygens[13]

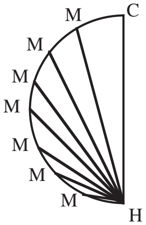
Énoncé

> *La circonférence d'un cercle donné étant divisée en un nombre indéfini d'arcs égaux, et ayant mené les droites d'un point quelconque donné dans le plan du cercle à tous les points de division : trouver la somme de ces droites.*

Solution

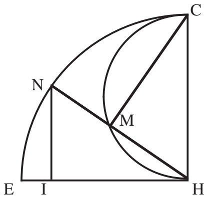
> *Ce problème est aisé à résoudre quand le point est donné dans la circonférence (…) car alors la somme de ces droites est égale au carré du diamètre parce que c'est la même chose que la somme des sinus droits du quart d'un autre cercle dont le rayon sera double*

* On cherche donc « la somme des HM », mystérieuse somme des droites d'un faisceau, jamais définie en tant que telle. Par quelle petite portion faut-il multiplier chaque HM avant de faire la somme ?



Les seules divisions égales données sont les MM. Ici Σ HM ne peut vouloir dire que Σ HM MM si l'on revient à la définition, puisqu'aucune autre ligne droite ou courbe n'est découpée en petites portions égales.

* Dessinons alors le quart de cet autre cercle dont le rayon est double, sur le même dessin



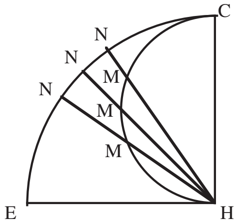
HM = NI, de par l'égalité des triangles CMH et HIN

13 - Cette lettre (*Dimension des lignes courbes de toutes les roulettes. Lettre de M. Dettonville à M. Huygens de Zulichem*) démontre qu'une roulette généralisée a même longueur qu'une certaine ellipse (dont le petit axe mesure le "défaut de roulement sans glissement"). L'énoncé ne fait donc pas partie du *Traité de la Roulette* mais il est dans le même esprit, et sa résolution en suppose la connaissance.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

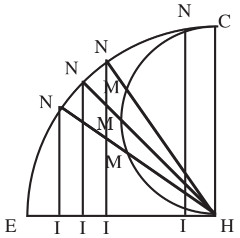
Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

* Chose importante, lorsque les points M. découpent le demi-cercle en petites portions égales, les N correspondants découpent aussi le quart de cercle en petites portions égales, et égales au précédentes.



MM = NN de par le théorème de l'angle au centre

* La somme des HM MM est donc terme à terme la somme des NI NN



Σ NI NN est bien ce que Pascal entend par « la somme des sinus du quart de cercle de rayon double » puisque les NI naissent de divisions égales aux points N.

Ainsi, en revenant des définis aux définitions, il ne fait plus de doute que

« la somme des HM » égale « la somme des sinus NI ».

L'égalité a lieu entre deux abrégés du discours. Les éléments infinitésimaux sous-entendus ne sont pas placés aux mêmes endroits.

* C'est le *Traité des sinus du quart de cercle* qui achève le calcul – par une proposition aussi inédite que révolutionnaire en 1658, comme nous le verrons dans le chapitre suivant – cependant que, pour nous, modernes, il ne fait guère de difficulté de voir en Σ NI NN l'intégrale entre $\pi/2$ et π de R sinα d (Rα), égale à R^2 sans trop d'effort.

Rien n'est dit ou presque dans la lettre à Huygens, mais tout l'a été. Il suffit de recoller les morceaux de textes auxquels Pascal ne renvoie pas. La lecture est globale et les textes non strictement mathématiques contribuent à la compréhension des textes les plus techniques.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

CHAPITRE II

UN TRAITÉ TRÈS TECHNIQUE

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Résumé du Chapitre II

Le *Traité de la roulette* crée des techniques d'"intégration curviligne", de "changement de variable", d'"intégration multiple" et "par parties" que l'on aurait pu croire subordonnées au calcul par primitive, principalement la dernière.

Dans le *Traité de Sinus* du quart de cercle, Pascal intégre la "fonction sinus" par la considération d'un triangle infinitésimal semblable à un triangle fini. L'assimilation d'un petit arc à une portion de tangente, qui sert de pivôt à la démonstration fait l'objet d'un avertissement riche de sens et d'avenir. L'intégrale ainsi calculée est curviligne, de même que toutes celles du même traité. Pour démontrer que la somme des sinus est un cosinus, Pascal somme des différences de cosinus, ainsi la quadrature est vue dans ce cas particulier comme problème inverse des tangentes. Pascal ne dégage pas ce fait qui ne se reproduira d'ailleurs plus, il n'y a aucune autre considération de tangente dans le *Traité de la roulette*.

Ensuite les puissances de sinus (les nôtres) sont intégrées par une technique s'apparentant au changement de variable. Le changement de variable ne peut conserver l'égalité des divisions et Pascal est obligé de fournir un grand travail pour contourner la difficulté. Il démontre *dans les faits* que l'égalité des divisions n'est pas une nécessité logique ; il restera pourtant prisonnier de l'égalité des divisions tout au long du *Traité*.

C'est toujours dans le *Traité des Sinus* que l'on trouve – semble-t-il – les deux premiers énoncés d'intégrale double et triple, purs produits des sommes triangulaires et pyramidales continues. Le langage de ces sommes, où les différentielles d'ordre 2 et 3 sont sous-entendues est parfaitement adapté.

Le *Traité des Trilignes* démontre un *lemme général*, sorte de machine à fabriquer de formules d'intégration par parties. La figure du lemme comporte un triligne fixe et un autre variable, destiné à être relevé pour fabriquer un volume. Chaque valeur assignée au triligne variable crée une formule générale d'intégration par parties. Cinq propositions générales sont ainsi démontrées toujours en écrivant qu'un certain attribut géométrique – aire, volume, ou centre de gravité – est identique à lui-même. Dans un deuxième temps la figure est modifiée de manière que sa partie fixe "rectifie" sa partie variable. Une nouvelle série de propositions, images des précédentes est obtenue sans effort. Le *Traité des Trilignes* démontre quinze propositions générales, en tout. L'unité du *Traité* est parfaite car ces propositions sont toutes lisibles comme des formules d'intégration par parties, et leur quintessence géométrique est toujours la même : l'identité d'un élément géométrique. Dans les quatre dernières propositions mettant en jeu des intégrales curvilignes d'intégrales ordinaires, la géométrie finit par ne plus être qu'une abstraction au service du calcul. On peut lire le *Traité des Trilignes* comme un traité de métamorphose des différentielles, dx en dy, dx en ds. Il est un passage obligé pour presque tous les calculs de roulette car il est rare dans la pratique que le problème soit posé et résoluble dans les mêmes termes différentiels. Il est le seul avec la *Lettre* à démontrer des théorèmes généraux. Sa richesse repose sur la variété des différentielles qu'il traite et sur leur aptitude à s'échanger.

On assiste à un mode de calcul intermédiaire entre les calculs isolés des prédécesseurs et ceux rassemblés par l'algorithme de la primitive, comme ils apparaissent en 1664 avec Newton dans la *Méthode des fluxions*. Ici ce sont les différentielles qui jouent un rôle unificateur en reliant aussi bien les calculs que les Traités les uns aux autres.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Chapitre II - Un traité très technique

On trouve dans l'ouvrage de Pascal sur la roulette, sous des formes géométriques extrêmement ingénieuses, les résultats fondamentaux se rapportant à ce que les géomètres appellent aujourd'hui les intégrales curvilignes et les intégrales doubles (...) C'est le premier Traité de calcul intégral.

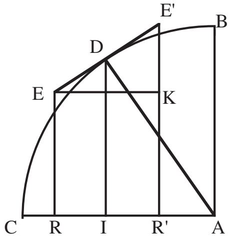
Émile Picard

Au XVII[e] siècle, on ne parlait ni d'intégrale curviligne, ni de changement de variable dans une intégrale, ni d'intégrale double ou triple, ni d'intégration par parties; cependant ces catégories permettent d'éclairer l'œuvre de Pascal sur la roulette, véritable traitement géométrique de ces techniques non encore baptisées.

I - Intégrale curviligne

Pascal commence le *Traité des sinus* par un lemme fécond sous des apparences innocentes. Si ABC est un quart de cercle, EE' la portion de tangente comprise entre les deux perpendiculaires ER et E'R' à AC, les triangles EE'K et DIA sont évidemment semblables.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4



LEMME

(...) Je dis que le rectangle compris[1] du sinus DI et de la touchante EE', est égal au rectangle compris de la portion de la base (enfermée entre les parallèles) et le rayon AB [2]

La similitude des triangles EE'K et DIA implique : DI EE' = RR' AB.
Si EE' est infiniment petit, il se confond avec l'arc $d\alpha$, tandis que RR' devient $d(\cos\alpha)$; comme DI est $\sin\alpha$, le lemme exprime géométriquement ce que nous dirions aujourd'hui plus analytiquement sous la forme "la dérivée de cosinus est sinus". Le concept de dérivée, bien qu'il tente de sérieuses percées, n'existe pas au temps de Pascal.

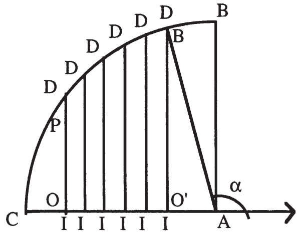
Le mot « sinus » n'a en toute rigueur pascalienne pas de sens ici, puisque DI, tout seul, ne saurait « naître de divisions égales » ; mais, bien sûr, il annonce que vont apparaître sans tarder d'autres DI, compagnons de celui-ci et régulièrement espacés en D.

Le lemme est la clé de tout le *Traité des sinus du quart de cercle*, qui est un traité d'intégrale curviligne, comme l'indique le mot « sinus » dont le

1 - C'est à dire le produit. Remarquer comme le langage est resté géométrique, à la manière des anciens.
2 - Leibniz qui, sur les conseils de Huygens s'était plongé dans l'œuvre mathématique de Pascal, raconte qu'il "puisa soudainement la lumière" en lisant le lemme, car il y vit ce que Pascal n'avait pas perçu : l'existence, dans le cas général et pas seulement pour le cercle, de deux triangles semblables, l'un infiniment petit et l'autre fini ; il suffit pour cela de remplacer le rayon DA par la normale à la courbe quelconque. Il ne faut cependant pas oublier que cette "illumination" tient largement autant à Leibniz, qui avait encore très peu lu, qu'à Pascal, car celui-ci n'était pas le premier à avoir mis en évidence une similitude entre un triangle inassignable et un triangle de dimensions finies. (cf. *Leibniz, Naissance du calcul différentiel* par Marc Parmentier (Vrin).)

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

rôle est de signaler que la variable d'intégration[3] est l'abscisse curviligne. Voyons, dans ce paragraphe et dans le suivant comment les propositions I, II, III, IV s'articulent au lemme.



PROPOSITION I

La somme des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon.

La proposition I exprime que Σ DI DD = OO' AB, « pour un nombre indéfini de divisions égales DD de l'arc ». En langage moderne, α étant l'angle que fait la demi-droite opposée à AC avec la demi-droite AD :

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \, d\alpha = \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1,$$

puisque AO = R $\cos\alpha_2$,
AO' = R $\cos\alpha_1$, DD = R $d\alpha$, et DI = R $\sin\alpha$
Les points ont un nom générique et les points frontière ont en plus un nom de point d'arrêt, ainsi le dernier point I à gauche s'appelle aussi O.

Comme Pascal a dessiné un cercle et non pas une sinusoïde, la proposition I calcule une *intégrale curviligne* :

$$\int_{\mathrm{arcBP}} \mathrm{DI}$$

3 - En utilisant nos catégories pour parler des sommes pascaliennes. *Sinus* est perçu par le lecteur moderne comme un indicateur de variable d'intégration ; contrairement à Pascal le lecteur moderne sait qu'il n'y a pas de nécessité logique à découper la variable d'intégration en parties égales.

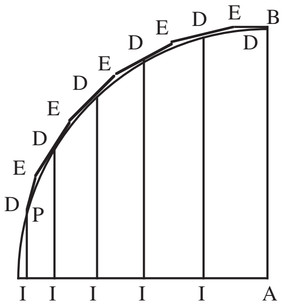
Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Nous nous souvenons de ce que Pascal entend par « somme des sinus DI » : c'est Σ DI DD *pour un nombre indéfini de divisions égales DD de l'arc*. “Sinus” renvoie donc à “divisions égales sur l'arc” et n'a a priori rien à voir avec le sinus ligne trigonométrique, même si cela coïncide par hasard ici.

Il est à peu près clair que la proposition I découle facilement du lemme par assimilation de la portion de tangente EE′ avec la portion d'arc correspondante ; le fait que les divisions soient égales va garantir d'une façon grossièrement suffisante le caractère licite de cette assimilation. Effectivement Pascal divise soigneusement (en faisant O′ = A) l'arc BP en « un nombre indéfini de parties égales », mène les tangentes en chaque point D, d'où les portions EE de tangentes pour les D intérieurs, et les demi-tangentes aux extrémités D = B et D = P ; il a ainsi exactement le même nombre (indéfini !) d'arcs DD et de tangentes complètes EE.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION I

(...) il est visible que chaque sinus DI, multiplié par la touchante EE, est égal à chaque distance RR multipliée par le rayon AB. Donc tous les rectangles ensembles des sinus DI, multipliés chacun par sa touchante EE (lesquelles sont toutes égales entre elles) sont égaux à tous les rectangles ensemble faits de toutes les portions RR avec le rayon AB ; c'est à dire (puisqu'une des touchantes EE multiplie chacun des sinus, et que le rayon AB multiplie chacune des distances) que la somme des sinus DI, multipliés chacun par une des touchantes EE, est égale à la somme des distances RR, ou à AO multipliée par AB. ***Mais chaque touchante EE est égale à chacun des arcs égaux DD****. Donc la somme des sinus multipliés par un des petits arcs égaux est égale à la distance AO, multipliée par le rayon.*



Le dessin est fait pour 5 arcs DD égaux, et 4 tangentes complètes EE plus deux demi-tangentes aux extrémités, ce qui fait 5 tangentes égales EE en tout ; et il faut imaginer 5 infini…

Pascal dit que la somme à calculer : Σ DI DD n'est autre que Σ DI EE, laquelle est du ressort du lemme : elle vaut Σ AB RR, c'est à dire AB Σ RR, dont la valeur est immédiate.

Les points R, projections des points E ne sont pas représentés pour ne pas alourdir la figure ; se reporter à la figure du lemme.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

La partie soulignée par nous est ensuite soigneusement justifiée dans un avertissement :

AVERTISSEMENT

> *Quand j'ai dit que (...) chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD, on n'a pas dû en être surpris, puisqu'on sait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude est indéfinie; parce qu'alors la somme de toutes les touchantes égales entre elles, EE, ne diffère de l'arc entier BP, ou de la somme de tous les arcs égaux DD, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.*

L'avertissement, excellent compromis entre la rigueur et l'intuition, préfigure admirablement le langage des limites. Les avertissements de Pascal, comme celui-ci, sont souvent empreints de dénégation (*on n'a pas dû en être surpris*) : comme certaines notions sont impossibles à clarifier de manière rigoureuse avec le savoir de l'époque, et que d'autre part Pascal comme ses contemporains ont la certitude intuitive de la véracité du résultat, leurs écrits vont au devant des critiques en affirmant qu'il n'y a pas de problème.[4]

Dans quelle mesure est-il important que les divisions DD soient égales ? Certes il ne suffit pas que le nombre de divisions D soit indéfini pour que le remplacement de EE par DD soit licite : si l'un seulement des DD restait supérieur à un arc donné, même très petit, ce serait radicalement faux de remplacer les EE par les DD ; là intervient l'égalité des divisions, l'égalité

$$n\,DD = BP$$

pour n divisions *égales*, garantit que chaque DD devient plus petit que tout arc donné quand n devient indéfini. Au temps de Pascal, on n'a guère de raisons de rechercher une condition moins grossièrement suffisante ("le pas de la subdivision est arbitrairement petit") ; nécessaires au calcul pascalien,

4 - Voir la préface à *l'Analyse des infiniment petits* du Marquis de l'Hospital (Paris 1696). « Les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commencement de ce traité me paraissent si évidentes que je ne crois pas qu'elles puissent laisser aucun doute dans l'esprit des lecteurs attentifs ». l'Hospital ne demande rien moins que de supposer le même dx nul ou non nul selon sa place dans le calcul ! Quant on sait le temps qu'il a fallu pour accorder cette demande avec le principe de contradiction, les métamorphoses que dut subir dx pour accéder au statut d'objet, on se rend compte que les mathématiciens ne sont pas exempts de dénégation.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

les divisions égales ne le sont pas au résultat, et l'énoncé de la proposition I ne contiendrait pas de nos jours, comme il le fait chez Pascal (implicitement par le mot « sinus ») le terme « divisions égales » (en nombre indéfini).

Le calcul de Pascal, résumé dans l'avertissement peut se paraphraser ainsi : Pascal divise BP en n arcs égaux, puis écrit la double égalité

$$BP = n\,DD = n\,EE$$

La première égalité est vraie que n soit fini ou infini (« indéfini »); la deuxième ne l'est que pour n indéfini, elle signifie que

$$EE = DD + \text{un infiniment petit d'ordre au moins égal à } 2$$

et c'est cela même qui autorise Pascal à remplacer EE par DD comme il le fait dans la démonstration de la proposition I. L'avertissement est une manière de dire "on pourrait bien montrer cela par exhaustion euclido-archimédienne, mais c'est fatigant, et en plus, quand on a un peu d'intuition de l'ordre des infiniment petits, on sait bien que cela marche toujours". Justement Pascal a une excellente intuition des ordres infinitésimaux, comme il le montre à plusieurs reprises[5], et ce en relation étroite avec ses préoccupations métaphysiques et apologétiques ; ces dernières culminent à la fin de sa vie avec la théorie des trois ordres *du corps, de l'esprit, de la charité,* chacun infiniment petit par rapport à celui qui le suit. Les mathématiques de Pascal ne sont pas séparées de la théologie alors que la démarcation entre cette dernière et les sciences physiques est soigneusement opérée dans la préface pour le Traité du vide. La similitude des mots employés dans l'Apologie (les Pensées) et dans les traités mathématiques est frappante :

> *Les saints ont leur empire, leur éclat, leur grandeur, leur victoire, leur lustre, et n'ont nul besoin des grandeurs charnelles ou spirituelles, où elles n'ont nul rapport, car elles n'y ajoutent ni ôtent.*[6]
>
> *(...) On n'augmente pas une grandeur continue lorsqu'on lui ajoute en tel nombre que l'on voudra, des grandeurs d'un ordre d'infinitude inférieur. Ainsi les points n'ajoutent rien aux lignes, les lignes aux surfaces (...) les racines ne comptent pas par rapport aux carrés, les carrés par rapport aux cubes et les cubes par rapport aux carro-carrés.*[7]

5 - Par exemple dans le calcul de sommes pyramidales de grandeurs continues (*Lettre à Carcavi*), ou dans l'application du triangle arithmétique à la sommation de puissances numériques.

6 - *L'Apologie. L'ordre des corps, l'ordre des esprits, l'ordre de la charité.*

7 - *Traité du triangle arithmétique ; sommation des puissances numériques.*

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Il n'était pas impossible de concevoir l'intégrale ordinaire $\int \sin\alpha\, d\alpha$ au temps de Pascal ; en effet, Roberval avait dessiné la courbe sinus "compagne de la cycloïde" pour quarrer la dite cycloïde. Cependant si l'on ne dispose que de méthodes géométriques pour le calcul d'intégrales, il est plus facile de calculer l'intégrale curviligne $\int_{\text{arc } BP} \sin\alpha\, d\alpha$ que l'intégrale ordinaire $\int \sin\alpha\, d\alpha$.

Le calcul par l'algorithme-primitive opérera donc une inversion des difficultés par rapport au calcul géométrique, visuel, que Pascal nous donne à voir dans son stade ultime, juste avant la grande rupture que constituera le Nouveau Calcul.

Le lemme est le seul endroit des sept traités où Pascal frôle le lien quadrature-dérivée ; c'est d'ailleurs l'unique moment où il trace une tangente !

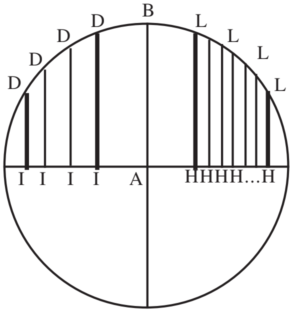
La tangente au cercle est un être très géométrique : pour des raisons évidentes de symétrie, elle ne peut être que la perpendiculaire au rayon, raisonnement qui se passe complètement de toute intuition infinitésimale… L'assimilation de la portion infinitésimale de courbe et de la portion correspondante de tangente est un grand saut conceptuel. Pascal ne l'a pas exploité à fond, il était trop engagé dans le cas particulier du cercle. Quelques années plus tard Leibniz "puisant soudainement la lumière" dans le lemme en tirera un résultat général : l'algorithme par lequel le calcul d'une intégrale se ramène à celui d'une primitive. Le *Traité des sinus* a porté des idées qui ont dépassé son auteur.

Les propositions suivantes mettent en jeu d'autres techniques mais le travail principal, qui était de légitimer l'assimilation d'une portion de courbe avec une portion de tangente est fait. Voyons-en les effets maintenant.

II - Changement de variable

Restons avec le *Traité des sinus* du quart de cercle ; la proposition I reposait sur une technique d'intégrale curviligne, les propositions II, III, IV mettent en jeu deux techniques, celle de l'intégrale curviligne et celle du changement de variable.

Par *somme des carrés des sinus* Pascal entend Σ DI^2 DD (à cause du mot *sinus*, DI^2 est multiplié par DD).



PROPOSITION II

La somme des carrés des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale a la somme des ordonnées au quart de cercle qui seraient comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon.

De même par *somme des ordonnées* il faut entendre Σ LH HH (à cause du mot *ordonnée* LH se voit multiplié par HH).

Toutes les divisions égales, tant les DD que les HH, sont en nombre indéfini (infini).

La contraignante (et superflue) condition des divisions égales oblige Pascal à faire deux dessins ; car si les DD sont des divisions égales sur l'arc, leurs projections ne sauraient l'être sur l'axe : les I I ne conviennent pas pour fabriquer des sommes d'ordonnées.

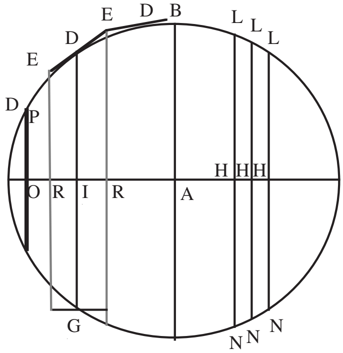
La proposition II exprime que pour les DI et les LH variant entre les positions extrêmes, on a

$$\Sigma\, DI^2\, DD = \Sigma\, LH\, HH \times AB$$

Les quatre positions extrêmes, deux à deux symétriques, de sinus (à gauche) et d'ordonnées (à droite) sont matérialisées par quatre traits gras.

Paraphrasons et commentons la démonstration que donne Pascal:

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr



– DI varie entre le rayon AB et DO (donc LH entre le rayon AB et le symétrique de DO)

– DI^2 est visuellement dédoublé en DI x IG

– donc $\Sigma\ DI^2$ DD est Σ IG DI DD

– DI DD est DI EE, c'est le coup de force qui consiste à confondre localement la courbe et sa tangente ; coup de force légitimé par l'avertissement[8], autant qu'il est possible de le faire en 1658.

– DI EE est AB RR par le lemme

– Donc $\Sigma\ DI^2$ DD n'est autre que AB Σ IG RR ; mais *cette somme n'est pas une somme d'ordonnées,* en effet les RR ne sont sûrement pas égales puisque la pente des EE est variable. C'est là qu'intervient la rigueur de Pascal *à l'intérieur de son propre système de pensée* ; la *somme des ordonnées*, il la suggère à droite de son dessin : c'est Σ LH HH (HH divisions égales, en nombre indéfini).

– C'est la géométrie qui sauve tout, car Σ LH HH est évidemment l'*espace* entre les deux ordonnées extrêmes et Σ IG RR ne diffère du même espace que « d'une grandeur moindre qu'aucune donnée » ; subrepticement, on a glissé des divisions RR (non égales) aux HH (égales), et donc d'une expression interdite dans la logique pascalienne Σ IG RR (être non répertorié, ni somme d'ordonnées, ni somme de sinus) à une somme admissible Σ LH HH.

– Le double rôle joué par les « divisions » « égales » est ici particulièrement intéressant : d'une part, elles fonctionnent en tant que « divisions » comme indicateur de variable d'intégration, d'autre part, en tant qu'« égales », comme complicateur inutile de démonstration ! Pascal ne sépare pas les deux rôles ; l'histoire rejettera l'« égalité » et la remplacera par le "pas", puisque l'égalité est une condition suffisante beaucoup trop forte pour assurer que toutes tendent vers zéro.

– Il semble que ce soit une des deux seules fois[9] où Pascal démontre lui-même dans les faits, mais sans le dire, que l'égalité des divisions est une

8 - Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent.

9 - A la fin du *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets,* en accrochant des poids nuls là où il le faut Pascal démontre que le théorème de l'abcisse du centre de gravité vaut aussi pour des subdivisions inégales (il faut alors renoncer au langage des « sommes triangulaires » mais il n'en parle pas.) Voir § 3 du chapitre V *Divisions égales*.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

hypothèse superflue ; aucune conséquence générale n'est tirée, aucun signe de doute sur l'utilité des divisions égales ne se montre, pas plus là que dans le *Traité des trilignes*. Pascal a seulement fait preuve d'une rigueur fidèle à ses propres conceptions, là où un changement de variable s'est mis à détruire l'égalité des divisions.

Les propositions III et IV sont très semblables à la proposition II

PROPOSITION III

La somme des cubes des mêmes sinus est égale à la somme des carrés des mêmes ordonnées comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon.

PROPOSITION IV

La somme des carrés-carrés des mêmes sinus est égale à la somme des cubes des mêmes ordonnées comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le même rayon.

Et ainsi à l'infini.

Ces trois propositions et celle à l'infini sont subsumées sous la formule générale

$$\Sigma\, DI^{n}\, DD = R\, \Sigma\, LH^{n-1}\, HH \qquad (E)$$

Il y a changement d'élément différentiel, DD devient HH ; cela ressemble fortement à un changement de variable.

Utilisons le langage moderne pour voir qu'il s'agit bien d'une double technique, d'intégrale curviligne, de changement de variable. Le langage d'aujourd'hui, plus simple car il ne s'encombre pas d'inutiles égalités de divisions, rend caduque la distinction entre LH et DI. Les propositions II, III, IV et celle « à l'infini » s'énoncent alors

$$\int \sin^{n} \alpha \, d\alpha = R \int \sin^{n-1} \alpha \, dx \qquad (E')$$

l'un des facteurs sin α, multiplié par dα, faisant R dx (c'est le Lemme du début du *Traité des sinus*). Dit comme cela, il n'y a rien à montrer (E') n'est que le Lemme, résultat simple s'il en est ; ainsi toute la lourdeur de la démonstration pascalienne n'est qu'un tribut payé aux divisions égales.

La formule (E') égale une intégrale curviligne (Pascal ne dispose pas de sinusoïde, il intègre le long du cercle) à une intégrale ordinaire – via un changement d'élément différentiel.

Le lecteur moderne est insatisfait par le deuxième membre : qu'est α dans $\sin^{n-1}\alpha$? ses habitudes de pensée l'incitent à expliciter la dépendance fonctionnelle $\alpha(x)$; comme $x = \cos\alpha$, $\alpha = \operatorname{Arc}\cos x$, et il aura tendance à écrire

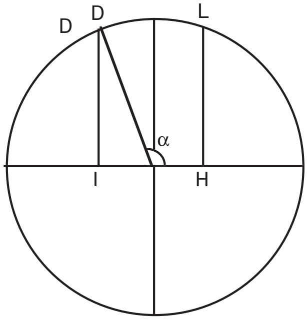
$$\int \sin^n \alpha \, d\alpha = R \int \sqrt{(1 - x^2)}^{\,n-1} \, dx \qquad (E'')$$

(E') sous la forme (E'')

où le changement de variable est patent.

Pascal, qui intègre géométriquement, n'a pas besoin d'expliciter la fonction, chaque LH^{n-1} est multiplié par son HH, celui qui est à côté.

(E') est la plus évidente des trois formulations, mais elle exige d'être un lecteur à la fois pascalien et moderne : pascalien pour renoncer à l'explicitation fonctionnelle, moderne pour renoncer aux divisions égales. Les lourdeurs engendrées par la rigueur varient au cours du temps.



DI est sin α

DD est dα

La distinction entre DI et LH n'a de sens que dans le système de rigueur pascalien avec sa contrainte des divisions égales.

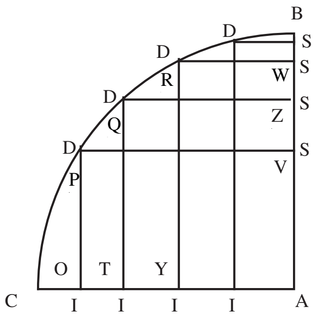
III - Intégration double et triple

Poursuivons la lecture du *Traité des sinus* ; après les propositions V et VI qui reviennent à démontrer le théorème de la moyenne dans un cas particulier, viennent deux propositions qui calculent respectivement une somme triangulaire et une somme pyramidale de sinus.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

PROPOSITION VII

La somme triangulaire des sinus sur la base d'un arc quelconque terminé au sommet, à commencer par le moindre des sinus extrêmes, est égale à la somme des sinus du même arc sur l'axe, multipliée par le rayon, ou, ce qui est la même chose, à la différence d'entre les sinus extrêmes sur la base, multipliée par le carré du rayon.



Car la somme triangulaire des sinus DI, à commencer par DO, n'est autre chose par la définition, que la simple somme de tous les DI compris entre les extrêmes BA, DO, plus la somme de tous les DI, excepté le premier PO, c'est à dire compris entre le second QT et AB, et ainsi de suite. Mais la somme des sinus compris entre DO et BA est égale à OA ou PV en AB; et la somme des sinus compris entre DT et AB est de même égale au rectangle TA ou QS en AB, et ainsi toujours. Donc la somme triangulaire des sinus DI, à commencer par DO, est égale à la somme des sinus PV, QS, DS, etc., multipliés par AB, ou à BV (qui est la différence entre BA et PO) multipliée par BA carré, puisque la somme des sinus DS est égale au rectangle VB en BA par la première de ce Traité.

Les points ont un nom de point générique et un nom de point d'arrêt.

Paraphrase et commentaire

Une somme **triangulaire** *à partir de PO*, c'est une somme de sommes **simples** dans lesquelles on laisse progressivement tomber le terme le plus à gauche, *le terme du côté de PO* donc, cette somme triangulaire est:

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France   Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

$$\sum_{\text{jusqu'à PO compris}} \mathrm{DI} \quad : \quad \mathrm{PV} \times \mathrm{AB}, \text{ par la proposition I}$$

$$+ \sum_{\text{jusqu'à QT compris}} \mathrm{DI} \quad : \quad \mathrm{QZ} \times \mathrm{AB}, \text{ par la même}$$

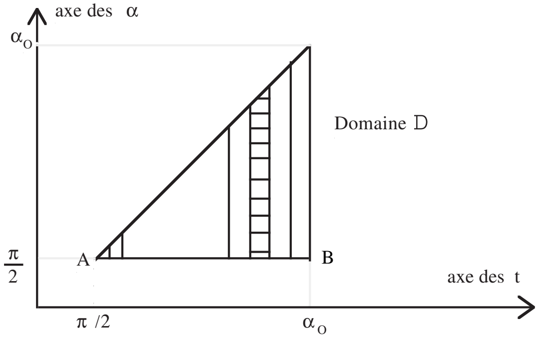
$$+ \sum_{\text{jusqu'à RY compris}} \mathrm{DI} \quad : \quad \mathrm{RW} \times \mathrm{AB}, \text{ par la même} \qquad + \ \ldots$$

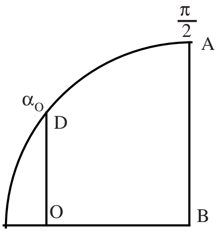
mais PV + QZ + RW +... n'est autre que BV (« différence des sinus extrêmes »), toujours par la proposition I[10].

Il s'agit en notations modernes de $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\alpha_0} dt \int_{\pi/2}^{t} \sin\alpha \, d\alpha$

ou encore de l'intégrale double $\displaystyle\iint_D dt\, d\alpha \sin\alpha$

calculée par la méthode de Fubini avec le découpage vertical dessiné ci-dessous du triangle D





10 - En réintroduisant le DD deux fois sous entendu :

$$\sum_{\text{triang. DO}} \mathrm{DI}\ \mathrm{DD}^2 = \sum \mathrm{DD}\ \Big[\sum_{\text{jusqu'à DO}} \mathrm{DI}\ \mathrm{DD} + \sum_{\text{jusqu'à DT}} \mathrm{DI}\ \mathrm{DD} + \sum_{\text{jusqu'à DY}} \mathrm{DI}\ \mathrm{DD} \Big] = \mathrm{BV} \times \mathrm{R}^2$$

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Calcul en langage moderne

L'intégrale double qui figure implicitement dans la proposition VI se calcule par le théorème de Fubini :

$$\iint_D dt\, d\alpha \sin\alpha = \int_{\pi/2}^{\alpha_0} dt \int_{\pi/2}^{t} \sin\alpha \, d\alpha$$

(Fubini avec préempilages verticaux ; voir le dessin ci-dessus)

Le deuxième membre de l'égalité correspond **à la lettre** à ce que fait Pascal.

Le calcul par primitive permet de calculer la « somme triangulaire » de Pascal qui figure dans le deuxième membre.

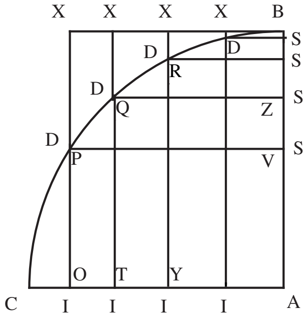
$$\int_{\pi/2}^{\alpha_0} dt \int_{\pi/2}^{t} \sin\alpha \, d\alpha = \int_{\pi/2}^{\alpha_0} (\cos\pi/2 - \cos t)\, dt = 1 - \sin\alpha_0$$

C'est bien la « *différence entre les sinus extrêmes* » (le rayon du cercle a été pris égal à 1).

Voyons la proposition VIII

PROPOSITION VIII

La somme pyramidale des sinus d'un arc quelconque terminé au sommet, à commencer par le moindre, est égale à la somme des sinus verses du même arc multipliée par le carré du rayon : ou ce qui est la même chose, à l'excès dont l'arc surpasse la distance entre les sinus extrêmes, multipliée par le cube du rayon.



PO est le « moindre » des sinus, AB et PO sont les « sinus extrêmes » et AO est leur « distance ».

La somme pyramidale en question est la somme triangulaire à partir de PO des sommes triangulaires analogues à celles de la proposition VII.

Les « sinus verses » sont les compléments à R des sinus, c'est à dire les DX puisque DX = R – DI.

« L'excès dont l'arc surpasse la distance entre les sinus extrêmes, multipliée par le cube du rayon » est

(BP – AO) 6 R^3

A cause des sommes triangulaires les points D (et S) sont à la fois points génériques et points d'arrêt, c'est pourquoi ils ont deux noms.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

La démonstration qui suit est lumineuse, la beauté du langage des indivisibles y est à son apogée : l'absence des DD^3 sous-entendus ne se remarque même pas ! La voici :

> *Car cette somme pyramidale n'est autre chose que la somme triangulaire des sinus DI compris entre PO et AB, plus la somme triangulaire de tous les sinus compris entre QT et AB, et ainsi de suite. Mais la première de ces sommes triangulaires est égale, par la précédente, à BV ou PX en AB carré. et la seconde de ces sommes triangulaires est égale, par la même raison, à BZ ou QX en AB carré. Donc toutes les sommes triangulaires ensemble, c'est-à-dire la somme pyramidale des sinus DI, à commencer par PO, est égale à la somme des sinus verses DX multipliés par AB carré. C.Q.F.D.*

Paraphrase et commentaire

La somme pyramidale des sinus *à partir de PO*, c'est, par définition, la somme de toutes les sommes triangulaires suivantes :

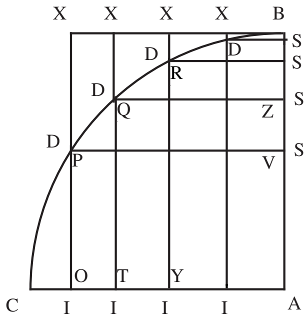
$$\begin{array}{lcll}
 & \displaystyle\sum_{\text{triang. à partir de PO}} DI \ : & PX \times AB^2, & \text{par la proposition VII} \\
+ & \displaystyle\sum_{\text{triang. à partir de QT}} DI \ : & QX \times AB^2, & \text{par la même} \\
+ & \displaystyle\sum_{\text{triang. à partir de RY}} DI \ : & RX \times AB^2, & \text{par la même} \\
+\ldots & & &
\end{array}$$

C'est la somme des sinus verses ; il reste donc seulement à voir que cette somme est bien « l'excès dont l'arc surpasse la distance entre les sinus extrêmes » : BP – AO. La rédaction de Pascal n'est pas plus heuristique que celle des anciens (qu'il critique pourtant à ce sujet), et le corollaire de la proposition I répond d'avance à la question deux pages plus tôt.

Corollaire de la proposition I

> *De la première proposition il s'ensuit que la somme des sinus verses d'un arc est égale à l'excès dont l'arc surpasse la distance d'entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon.*
>
> *Je dis que la somme des sinus verses DX est égale à l'excès dont l'arc BP surpasse la droite AO, multipliée par AB.*

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4



Car les sinus verses ne sont autre chose que l'excès dont le rayon surpasse les sinus droits. Donc la somme des sinus verses DX est la même chose que le rayon AB pris autant de fois, c'est à dire multiplié par tous les petits arcs égaux DD, c'est à dire multiplié par l'arc entier BP, moins la somme des sinus droits DI, ou le rectangle BA en AO.

Et par conséquent la somme des sinus verses DX est égale au rectangle compris du rayon AB et de la différence entre l'arc BP et la droite AO.

Autrement dit, puisque $DX = AB - DI$, $\Sigma\, DX\, DD = \Sigma\, AB\, DD - \Sigma\, DI\, DD$, ou si l'on préfère, l'intégrale curviligne (le long du cercle) de la différence est la différence des intégrales curvilignes :

$$\int \sin \text{ver}\, \alpha \, d\alpha = \int R\, d\alpha - \int \sin \alpha \, d\alpha.$$

Calcul en langage moderne

Revenons à la proposition VIII ; imaginons la pyramide P construite sur le triangle D en élevant en son sommet A un segment perpendiculaire à son plan et de longueur AB. Si l'on appelle D(β) le triangle ombré, celui-ci est la projection de la coupe horizontale de P faite à la hauteur b. Alors, la somme pyramidale considérée dans la proposition VIII est, en notations modernes, à la lettre

$$\int_{\pi/2}^{\alpha_0} d\beta \iint_{D(\beta)} dt\, d\alpha \sin \alpha \qquad \text{ou} \qquad \int_{\pi/2}^{\alpha_0} d\beta \int_{\pi/2}^{\beta} dt \int_{\pi/2}^{t} \sin\alpha \, d\alpha$$

(selon la manière dont on pense cette somme pyramidale) ; nous pouvons encore dire, mais là nous sortons de la lettre du texte de Pascal, qu'il s'agit de l'intégrale triple

$$\iiint_P d\beta\, dt\, d\alpha \sin \alpha$$

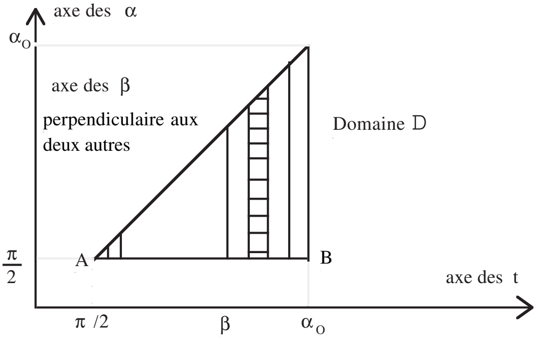
calculée par la méthode de Fubini avec prédécoupage en tranches horizontales de la pyramide P ! Sous la première forme le calcul donne

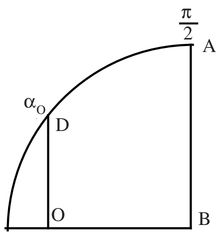
Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : / /presses-ufc.univ-fcomte.fr

$$\int_{\pi/2}^{\alpha_0} d\beta\,(\sin\beta - 1) \qquad \text{(par la proposition VI), ou}$$

$$[\cos\beta - \beta]_{\pi/2}^{\alpha_0} = \cos\alpha_0 - (\alpha_0 - \pi/2) = \text{OB} - \text{arc AD},$$

c'est bien « l'excès dont l'arc surpasse la distance entre les sinus extrêmes (il n'y a pas de signe – au temps de Pascal).





Pour résumer

– Il s'agit probablement des deux premiers énoncés d'intégrale double et triple (mais il faut être prudent en matière d'antériorité).

– Ces intégrales sont vues respectivement comme somme de sommes (proposition VII), comme somme de sommes de sommes (proposition VIII), et ce grâce au langage des sommes triangulaires et pyramidales, véritables techniques fubiniennes de sommations par paquets avant la lettre.

– Le langage des indivisibles réussit cette prouesse d'occulter les infiniment petits DD^2 et DD^3, sans que le sens en souffre le moins du monde : au contraire c'est leur réintroduction qui compliquerait la compréhension.

IV - Intégration par parties

Il s'agira ici du *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets*, le plus général des sept traités.

Dans ce calcul intégral géométrique, le triligne est quelconque ("fonction quelconque", une fonction étant vue comme un graphe plutôt que comme une correspondance), mais les formules ne sont pas pour autant

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France   Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

complètement générales : Pascal intègre géométriquement ce dont il a besoin pour le problème qui l'occupe ; or de quoi a-t-il besoin ? de calculer des longueurs, des surfaces planes et courbes, des volumes, ainsi que les centres de gravité de tout cela ; tous ces calculs font intervenir des intégrales de monômes, de degré inférieur ou égal à trois[11].

De fait, Pascal découvre par une investigation entièrement géométrique des relations générales entre les intégrales de tous les monômes de degré pas trop élevé (juste ce dont il a besoin), en les trois variables d'importance égale « arc », « ordonnées à l'axe », « ordonnées à la base » (nos "abscisses curvilignes", "abscisses", "ordonnées").

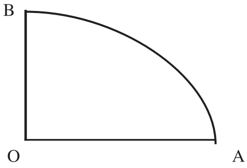
Les quinze propositions générales du *Traité des Trilignes* présentent une remarquable unité, elles nous apparaissent aujourd'hui sans audace interprétative comme autant de formules d'intégration par parties.

La première proposition, énoncée et démontrée en trois lignes, est exemplaire :

PROPOSITION I

La somme des ordonnées à la base est la même que la somme des ordonnées à l'axe.

Car l'une et l'autre est égale à l'espace du triligne.



Ecrivons l'égalité

$$\int_{[OA]} y\,dx = [\,xy\,]_B^A + \int_{[OB]} x\,dy,$$

dans laquelle le lecteur reconnaîtra sans peine une intégration par parties à condition de choisir une variable.

Le terme tout intégré $[\,xy\,]_B^A$ est nul de par la forme même d'un triligne puisqu'aux points A et B x ou y est nul.

Les nombreuses formules d'intégration par parties qui figurent dans le *Traité des Trilignes* seront toutes sur ce modèle. Vue géométriquement, l'intégration par parties sera toujours l'expression de l'identité d'un attribut géométrique. Ici l'espace (l'aire) d'un triligne est identique à lui même, qu'il

11 - Il n'y a qu'à la fin du dernier Traité : le *Traité général de roulette* qu'il faut faire la somme de "FM cube en MV"

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

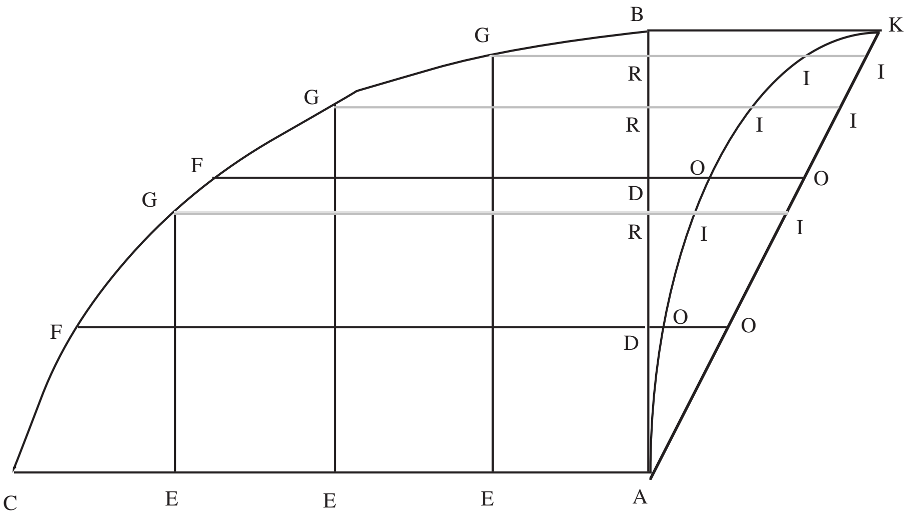
soit calculé sous la forme $\int y\,dx$ ou sous la forme $\int x\,dy$.

Le terme tout intégré sera toujours nul pour la même raison, évoquée ci-dessus.

Les propositions suivantes requièrent des figures adaptées.

1 - Figure adjointe et identité d'un volume

Pascal crée une figure de base, composée d'une partie constante (le triligne ACB), et d'une partie sujette à des variations (ABK, l'*adjointe* du triligne). Chaque particularisation de l'adjointe ABK, à la seule condition que l'on sache calculer son aire, fournira une formule simple d'intégration par parties. Si l'adjointe ABK reste générale, autrement dit si son aire garde une forme intégrale, on obtiendra une formule mêlant intégration par parties et intégration double. Ce sera le cas pour les propositions XII à XV, difficiles.



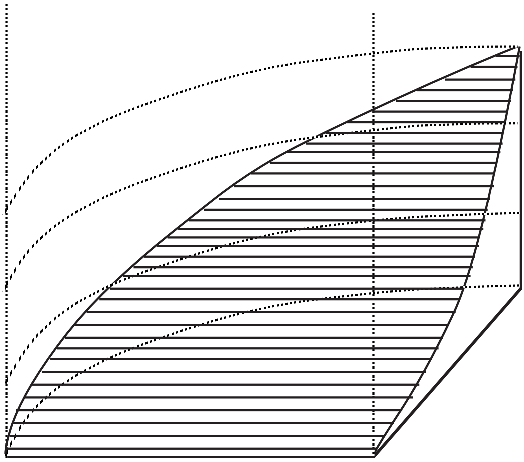
Pascal part donc d'un triligne quelconque ACB, mène les ordonnées à l'axe et à la base avec les divisions égales requises, ainsi que les contre-ordonnées GR qui ne sauraient pour lui se confondre avec les ordonnées à l'axe, vu la nécessaire égalité des divisions ; puis il accole la figure adjointe ABK astreinte à la seule condition d'être un triligne rectangle en B. Et il énonce un *lemme général*

LEMME GÉNÉRAL

Je dis que la somme des rectangles FD en DO, compris de chaque ordonnée du triligne et de chaque ordonnée de la figure adjointe, est égale à la somme des espaces ARI, qui sont les portions de l'adjointe, comprises depuis chacune des contre-ordonnées jusqu'à l'extrémité de l'adjointe du côté de A.

Cette égalité plane devient une évidence si l'on passe dans l'espace, car alors elle exprime l'identité d'un certain volume. Le passage dans l'espace va aussi nous renseigner sur ce qu'est cette « somme des espaces ARI »: Σ ARI RR? Σ ARI EE? RR est sûrement interdit, les infinitésimaux géométriques pascaliens ne sauraient naître de divisions inégales.

Le volume est ainsi fabriqué: on construit un cylindre droit sur le triligne ACB perpendiculairement au dessin, on relève le triligne adjoint BAK en le faisant tourner autour de BA de 90 degrés, puis on promène AC parallèlement à elle-même le long du bord AK relevé; AC recoupe le cylindre et engendre un volume qui se termine lorsqu'elle retombe verticalement en K.



Deux ordres de plans verticaux découpent ce volume relevé:

– Les plans passant par GE, produisant les découpages “espaces ARI, d'épaisseur EE”

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

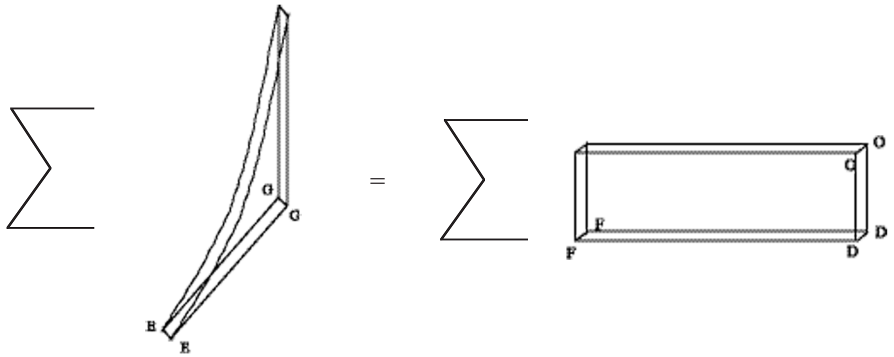
– Les plans passant par DF, les découpages seront des rectangles de côté FD et DO, d'épaisseur DD.

Les reconstitutions du même volume par les deux découpages conduisent à l'égalité

$$\Sigma \text{ ARI EE} = \Sigma \text{ FD DO DD}$$

identité du volume relevé.

> *Or il est visible que la somme des sections faites par chacun de ces ordres de plans sont égales chacune au solide, et par conséquent entre elles (puisque les portions indéfinies AE, EE, etc. de la base, sont égales, tant entre elles qu'aux portions égales et indéfinies AD, DD, etc. de l'axe); c'est-à-dire que la somme de tous les rectangles FD en DO est égale à la somme de toutes les portions RIA. C.Q.F.D.*



ce qui est bien dire que :

$$\sum \text{Espace ARI} \times \text{EE} = \sum \text{Rectangles FD en DO} \times \text{DD}$$

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Exiger que les divisions égales entre elles EE soient égales aux divisions DD est un étrange illogisme dont il sera intéressant de chercher la source.[12]

Le *lemme général* est un lemme d'intégration par parties. Nous allons le voir sur trois cas particuliers en faisant, comme Pascal, varier l'adjointe.

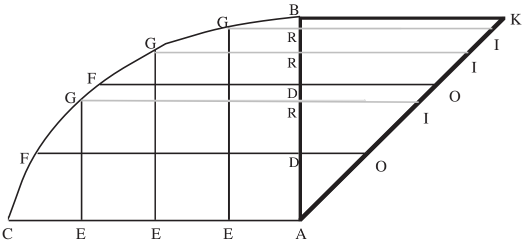
Puis, pour être totalement convaincus, nous le regarderons dans le cas général à la lumière du calcul Leibnizo-Newtonien (c'est à dire en recourant à la primitive).

Variations sur l'adjointe

Pascal applique tout de suite le lemme général à la découverte des rapports entre les ordonnées à l'axe et les ordonnées à la base d'un triligne rectangle quelconque.

PROPOSITION II

La somme des carrés des ordonnées à la base est double des rectangles[13] compris de chaque ordonnée à l'axe et de sa distance à la base. C'est-à-dire que la somme de tous les EG carré est double de tous les rectangles FD en DA.



Car si le triligne ABC a pour adjoint un triangle rectangle et isocèle ABK, dont les côtés AB, BK soient égaux entre eux, et la base AK une ligne droite qui soit coupée par les ordonnées FD aux points O, et par les contre-ordonnées GR aux points I, il arrivera, comme il a été démontré, que la somme de tous les rectangles FD en DO, ou FD en DA (puisque partout DO sera égal à DA) sera égale à la somme de tous les triangles ARI; c'est-à-dire, à la moitié de la somme de tous les AR carré, ou de tous les EG carré.

12 - Nous tenterons une explication de cette abondance d'égalité plus loin, dans le chapitre V *Divisions égales*.

13 - Sous entendu « *de la somme* des rectangles… »

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

La formule du *Lemme général* :

$$\Sigma\ \mathrm{ARI\ EE} = \Sigma\ \mathrm{FD\ DO\ DD}$$

devient dans ce cas particulier d'adjointe “triangle isocèle rectangle”, où AR = RI (= GE) et AD = DO :

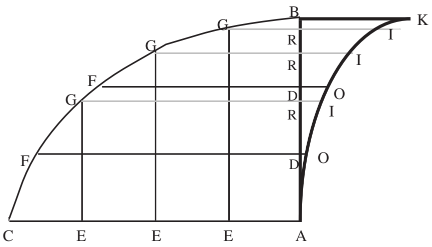
$$\frac{1}{2}\ \Sigma\ \mathrm{GE}^2\ \mathrm{EE}\ =\ \Sigma\ \mathrm{FD\ AD\ DD}$$

La somme des carrés des ordonnées à la base est bien, comme dit Pascal, double de [la somme] des rectangles compris de chaque ordonnée à l'axe et de sa distance à la base.

Dite aujourd'hui, mot à mot : $\frac{1}{2}\int y^2\,dx\ =\int xy\,dy$

PROPOSITION III

La somme des cubes des ordonnées à la base est triple des solides compris de chaque ordonnée à l'axe et du carré de sa distance à la base. La somme de tous les EG cube est triple de la somme de tous les FD en DA carré.



Car si la figure adjointe ABK est composée des deux droites perpendiculaires AB, BK et de la parabole AOK, telle qu'elle a été supposée dans le lemme précédent[14]*, il arrivera toujours (par le lemme général) que la somme des rectangles FD en DO sera égale à la somme des portions ARI (qui seront ici des trilignes paraboliques). Donc en multipliant le tout par BA, la somme des solides FD en DO en AB, ou FD en DA carré, sera égale à la somme des trilignes ARI, multipliés par AB ; c'est-à-dire (par le lemme précédent) au tiers de la somme des AR cube, ou des EG cube.*

La formule du Lemme général :

$$\Sigma\ \mathrm{ARI\ EE} = \Sigma\ \mathrm{FD\ DO\ DD}$$

devient dans ce cas particulier où l'adjointe est la parabole d'équation

$$\mathrm{AB} \times \mathrm{RI} = \mathrm{AR}^2\ (\mathrm{AB} \times \mathrm{DO} = \mathrm{AD}^2)$$

14 - Le lemme en question rappelle simplement le résultat d'Archimède : Si AB = BK (ce qui revient à dire que l'équation de la parabole est AB x RI = AR carré), alors l'aire du triligne ARI, multipliée par AB est le tiers de AR cube.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

compte tenu du réultat connu depuis Archimède, à savoir

$$AB \times ARI = \frac{1}{3} AR^3 \quad [= \frac{1}{3} EG^3]$$

$$\frac{1}{3} \Sigma\, EG^3\, EE = \Sigma\, FD\, AD^2\, DD$$

après avoir simplifié par AB. Toutes les lignes sont remises dans le triligne initial. On a mot à mot ce que l'on exprimerait aujourd'hui par :

$$\frac{1}{3} \int y^3\, dx = \int xy^2\, dy$$

PROPOSITION IV

On démontrera de même que la somme des carrés-carrés des ordonnées à la base est quadruple de la somme des ordonnées à l'axe, multipliées chacune par le cube de sa distance de la base ; et ainsi toujours.

Pascal ne prend pas la peine de démontrer ce résultat calqué sur le précédent puisque la formule du Lemme général : Σ ARI EE = Σ FD DO DD devient dans ce cas particulier où l'adjointe est la "parabole de degré 3" d'équation $AB^2 \times RI = AR^3$ ($AB^2 \times DO = AD^3$)
et compte tenu du résultat connu au XVII^e^ siècle

$$AB^2 \times ARI = \frac{1}{4} AR^4 \,[= \frac{1}{4} EG^4]$$

il obtient $$\frac{1}{4} \Sigma\, EG^4\, EE = \Sigma\, FD\, AD^3\, DD$$

après avoir simplifié par AB^2. Ce qui est bien dire que la somme des carrés-carrés des ordonnées à la base (EG^4) est quadruple de la somme des ordonnées à l'axe multipliées chacune par le cube de sa distance de la base On a mot à mot ce que l'on exprimerait aujourd'hui par :

$$\frac{1}{4} \int y^4 dx = \int xy^3\, dy$$

Formule lisible une fois de plus comme une formule d'intégration par parties avec terme tout intégré nul

$$\int y^4 dx = \int x dy^4$$

Ainsi, suivant les formes que reçoit l'adjointe, triangle rectangle dans la proposition II, parabole dans la proposition III, puis devine-t-on, "parabole de degré 3" dans la proposition IV, etc, différentes formules d'intégration par

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

parties sont créées. Leur terme tout intégré est toujours nul de par la forme même d'un triligne : x ou y étant nul aux extrémités de la partie courbe. Lues aujourd'hui :

$$\int y^2\,dx = 2\int xy\,dy \quad \text{(Proposition II)}$$

$$\int y^3\,dx = 3\int xy^2\,dy \quad \text{(Proposition III)}$$

$$\int y^4\,dx = 4\int xy^3\,dy \quad \text{(Proposition IV)}$$

Le lemme général est complexe, il contient de l'intégrale double de manière sous-jacente, puisque les ARI sont déjà des intégrales effectuées ; pour qu'il donne un résultat agréable, il faut choisir des adjointes dont les espaces soient calculables (de manière à éviter de conserver une intégrale double au deuxième membre : la somme des ARI). A l'époque de Pascal le catalogue de telles courbes est restreint. On y trouve les droites, les paraboles, les cercles, les puissances de x d'exposant fractionnaire, et bien sûr les sinusoïdes. Il se trouve que cela suffit pour résoudre les problèmes de roulette.

Le lemme général, relu avec la notion de fonction et le calcul par primitive

Reportons nous au même dessin, et appelons f la correspondance AD = f(DF), pour le triligne, et ϕ la correspondance DO = ϕ(AD) pour l'adjointe. En privilégiant x,

FD est x

AD est f(x)

DO est $\phi(f(x))$ (les abscisses de ϕ sont les ordonnées de f)

DD est d(f(x))

ARI est $\displaystyle\int_0^{f(x)} \phi(f(u))\,df(u)$

* La somme des rectangles FD en DO (sous-entendu multipliés par DD) est

$$\int_0^c x\,\phi(f(x))\,df(x)$$

* La somme des espaces ARI (sous-entendu multipliés par EE) est

$$\int_0^c dx \int_0^{f(x)} \phi(f(u))\,df(u)$$

* Et si on connaît à la fois l'algorithme de la primitive et l'intégration par parties :

$$\int_0^c dx \underbrace{\int_0^{f(x)} \phi(f(u))\, df(u)}_{v} = (\text{IPP}) \int_0^c x\, dv = (\text{Calcul par primitive}) \int_0^c x\, \phi(f(x))\, df(x)$$

puisque $d\left(\int_0^{\Delta} g(\square)\, d\square\right) = g(\Delta)\, d\Delta$ (formule clé du calcul par primitive…). C.q.f.d.

2 - Figure du double onglet et identité d'un centre de gravité

Si maintenant on exprime l'identité du bras d'un certain solide, on obtient une nouvelle formule, très symétrique, d'intégration par parties

PROPOSITION V

La somme des solides compris de chaque ordonnée à la base, et de sa distance à l'axe est égale à la somme des solides compris du carré de chaque ordonnée à l'axe et de sa distance de la base.

Je dis que la somme des solides de tous les EG carré en EA est égale à la somme des solides de tous les DF carré en DA.

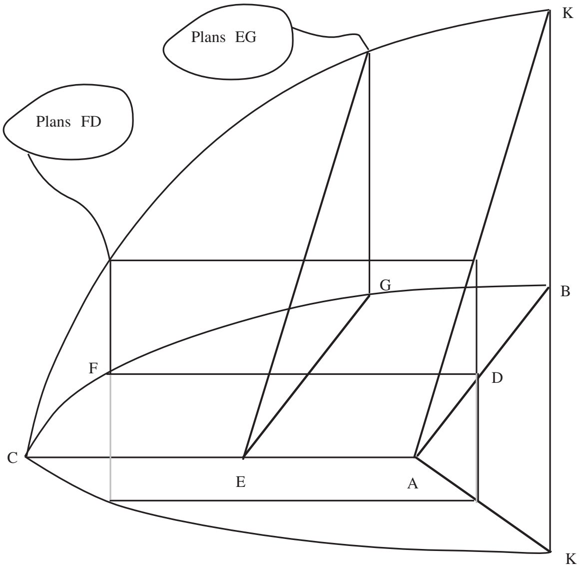
En insérant les sous-entendus EE et DD

$$\sum EG^2\ EA\ EE = \sum DF^2\ DA\ DD$$

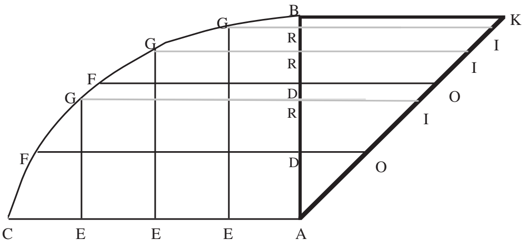
Pascal démontre cette proposition avec l'aide d'un « double onglet de la base », c'est à dire une figure ainsi construite sur le triligne ABC :

On prend deux plans passant par CA, inclinés à 45 degrés au-dessus et au-dessous du plan du triligne. Les deux plans, perpendiculaires entre eux, rencontrent le cylindre droit bâti sur la partie CB ∪ AB du triligne, de manière à délimiter le « double onglet de la base ».

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4



A notre avis, le double onglet est une notion superflue ; c'est une façon de parler du solide relevé dans le cas où la figure adjointe ABK est un triangle rectangle isocèle : le double onglet est ce solide, symétrisé par rapport au plan du triligne ABC. On pourra donc aussi utiliser la figure de la proposition II, répétée ci-contre.



AD = DO

Les EE, comme les DD sont des divisions égales en nombre indéfini

Le double onglet est coupé par deux ordres de plans parallèles également distants entre eux

– Les plans perpendiculaires au plan du triligne, passant par EG, en abrégé *plans EG* (ou même *EG*).

– Les plans perpendiculaires au plan du triligne, passant par FD, en abrégé *plans FD* (ou *FD*).

Par le premier ordre de plans, les *EG*, le double onglet se voit découpé en triangles rectangles isocèles épais de volume EG^2 EE. Par le deuxième ordre de plans, les *FD*, le double onglet se voit découpé en rectangles isocèles épais de volume FD 2 DO DD = 2 FD DA DD.

La proposition V est l'identité géométrique “Le bras sur *AB* du double onglet de la base est égal à lui-même”.

Le bras est sur *AB*, donc la balance est la droite AC et les divisions égales EE sont privilégiées par rapport aux DD : ce sont celles du formalisme des sommes triangulaires, réécriture pascalienne de la loi du levier.

Pascal calcule de deux façons différentes le produit (Bras sur *AB*) × (Volume relevé), en découpant ce volume successivement par les deux ordres de plans. La première est la plus naturelle : chaque volume infinitésimal créé par deux plans *EG* consécutifs a tous ses points également distants de *AB*. La *méthode générale* des centres de gravité s'aplique immédiatement et

$$\text{Bras sur AB du double onglet} \times \text{Volume} = \sum_{\text{triang. A}} EG^2\ EE^2 = \sum AE\ EG^2\ EE.$$

En revanche les découpages par les plans *FD* ne sont plus naturels pour la balance AC : les points d'un même volume infinitésimal ne sont plus équidistants de *AB*. Qu'à cela ne tienne, Pascal prend un par un les volumes infinitésimaux rectangles FD 2 DA DD et les redécoupe chacun par tous les *plans GE*. Des volumes du deuxième ordre sont créés. La somme triangulaire en EE^2 de cette double infinité est scindée en morceaux, ceux correspondant à un même rectangle épais étant regroupés. Chaque tel paquet est calculé cette fois par application directe de la *méthode générale des centres de gravité*. Le centre d'un rectangle est au milieu de FD, la *méthode générale* assigne à la somme partielle la valeur FD/2 FD 2 DA DD = DF^2 DA DD. Et il ne reste plus qu'à sommer sur tous les rectangles pour avoir la formule cherchée

$$\sum AE\ EG^2\ EE = \sum DA\ DF^2\ DD.$$

Lue aujourd'hui, la proposition V dit

$$\int xy^2\,dx = \int x^2y\,dy$$

ou, “par parties”

$$\int y^2\,d[x^2] = \int x^2\,d[y^2]$$

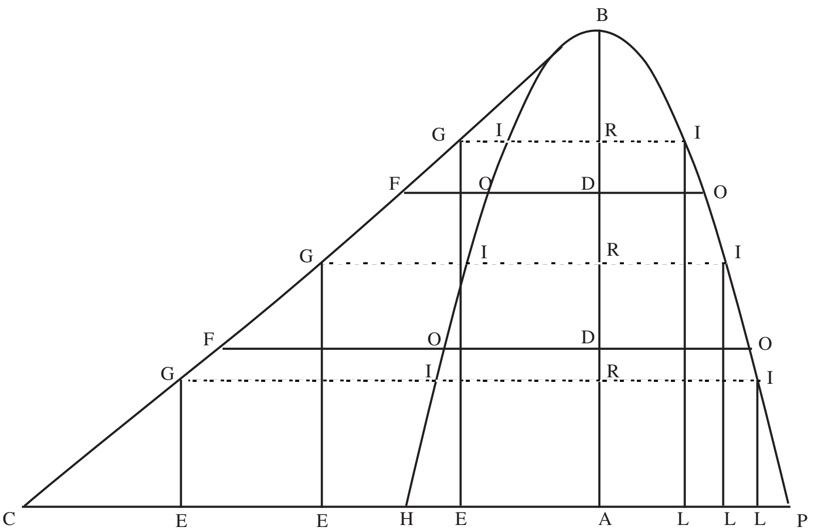
Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Les centres de gravité n'ont pas été considérés pour eux-mêmes, mais comme des intermédiaires de raisonnement pour fabriquer une formule d'intégration par parties très générale puisque valable pour toute courbe limitée par les deux axes d'ordonnées.

3 - "Figure rectifiante" ou "comment faire pour que des sinus deviennent des ordonnées". Les images des cinq premières propositions. La raison pour laquelle il y a plus d'images que d'originaux

Le paragraphe suivant qui contient une figure-outil fort ingénieuse et dix propositions s'intitule

RAPPORTS ENTRE LES SINUS SUR LA BASE D'UN TRILIGNE QUELCONQUE ET LES PORTIONS DE SA LIGNE COURBE COMPRISES ENTRE LE SOMMET ET LES ORDONNÉES À L'AXE



En voici certaines, énoncées dans le triligne BAP, c'est à dire la partie droite de la figure

PROPOSITION VI

La somme des arcs de la courbe compris entre le sommet et chaque ordonnée à l'axe est égale à la somme des sinus sur la base.
C'est à dire que la somme de tous les arcs BO, est égale à la somme des sinus IL.

PROPOSITION VII

La somme des carrés de ces mêmes arcs BO est égale à deux fois la somme triangulaire des mêmes sinus IL, à commencer par A.

PROPOSITION XI

La somme triangulaire des carrés des mêmes arcs BO, à commencer par A, est égale à la somme triangulaire des carrés des mêmes sinus IL, à commencer par A.

Les sommes d'arcs sont, comme toujours, relatives à des infinitésimaux nés de divisions égales sur l'axe.

Tel Michel Chasles qui, deux siècles plus tard, s'amusera à créer des théorèmes en en transformant d'autres par une application suffisamment déformante pour les rendre méconnaissables, Pascal va, grâce à une figure, copier les propositions du paragraphe précédent.

Tout d'abord le triligne BHA est symétrisé par rapport à BA, simplement pour ne pas surcharger le dessin ; puis l'arc BH est "étalé" en AC et les promenades concomitantes sur l'arc BH et sur la droite AC sont régies par la ligne courbe BC construite de telle sorte que chaque parallèle à la base (GR, FD) soit égale à l'arc qu'elle délimite (à partir de B) ; donc, par la nature de la ligne BC,

GR = BI FD = BO EE = II

Et les rôles sont partagés entre trois trilignes

– le triligne T = BHA porte les arcs BO (les DD sont les divisions égales sur l'axe)

– son double T' = BPA porte les sinus sur la base (les II sont les divisions égales sur l'arc)

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

– le triligne T = BCA joue le rôle de passeur entre BHA et BPA, il porte des ordonnées à la base GE, les EE (= II, divisions égales) et des ordonnées à l'axe FD (DD divisions égales)

avec la correspondance

– les arcs de T sont les ordonnées à l'axe de T (DD égales)

– les sinus sur la base de T' sont les ordonnées à la base de T (les divisions II et EE sont des divisions égales et égales entre elles),

correspondance qui transforme les rapports "sinus sur la base – arcs" d'un certain triligne en les rapports (connus) "ordonnées à l'axe – ordonnées à la base" d'un autre.

Les x de T sont les s de T. Les divisions EE, copies des divisions II, sont à la fois les dx du triligne ABC "rectifiant" et les ds du triligne initial ABP.

Les six propositions suivantes VI,..., XI apparaissent alors comme les traductions des propositions I,…, V du précédent paragraphe. Simples images des autres, elles sont aussi du ressort de l'identité d'un attribut géométrique avec lui-même.

Ces égalités entre sommes de sinus et sommes d'arcs se lisent aujourd'hui comme égalités entre intégrales ordinaire et curviligne :

$$\int y\, ds = \int s\, dy \qquad \text{(Proposition VI)}$$

$$\int s^2\, dy = 2 \int s\, y\, ds \qquad \text{(Proposition VII)}$$

$$\int s^3\, dy = 3 \int s^2\, y\, ds \qquad \text{(Proposition VIII)}$$

$$2 \int y\, s\, dy = \int y^2\, ds \qquad \text{(Proposition IX)}$$

$$3 \int y^2\, s\, dy = \int y^3\, ds \qquad \text{(Proposition X)}$$

$$\int y\, s^2\, dy = \int s\, y^2\, ds \qquad \text{(Proposition XI)}$$

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

VI est la copie de I.

XI est la copie de V.

IV n'est pas copiée pour des raisons évidentes: elle est dans la continuation de II et III.

IX est la copie de II.

VII est la copie d'une proposition que Pascal n'a pas éprouvé le besoin d'écrire: un double de la II où les rôles de x et y seraient échangés. Il se passe la même chose pour la proposition III copiée en X (littéralement) et en VIII (après l'échange des rôles).

Pourquoi par deux fois ces deux copies? La réponse est simple. L'échange $x \leftrightarrow y$ n'apporterait rien de nouveau géométriquement: le triligne est "le même" en (x, y) et en (y, x). Mais s et y n'ont pas l'interchangeabilité naturelle de x et y. L'échange $s \leftrightarrow y$, lui, est géométriquement signifiant, une abscisse curviligne n'est pas perçue comme une abscisse rectiligne. Puisqu'il y a dissymétrie de nature, Pascal écrit cette fois les deux propositions. Le problème ne se posait pas pour I et V, symétriques en x et y.

Des détails comme celui-là nous montrent à quel point la *géométrie calculante* de Pascal reste géométrique dans son regard des choses.

4 - Des résultats extrêmes: les quatre dernières propositions du *Traité des Trilignes*

Dans les copies ci-dessus, la figure rectifiante était utilisée à plat. On peut aussi voir le triligne de droite T' comme l'adjointe de sa propre partie rectifiante, le triligne BAC, et fabriquer un volume relevé comme pour l'énoncé du *lemme général*. La *figure rectifiante* diffère de la *figure du lemme général* en ce sens que ses deux parties – droite et gauche – ne sont plus indépendantes. Ce point se retouve dans le volume relevé. Pour cette raison la copie du *lemme général* qu'est la proposition XII est plus simple que son modèle. Nous l'écririons

$$\int x \;\, s\, dy = \int \Big[\int x\, dy\,\Big] \;\; ds \qquad\qquad \text{(Proposition XII)}$$

Les propositions XIII, XIV et XV expriment toutes les trois l'identité d'un bras pour le volume relevé.

Leurs énoncés, d'une complexité extrême, font pressentir la nécessité d'un changement de cadre, il semble impossible de continuer dans cette voie des centres de gravité

PROPOSITION XIII

La somme de carrés de chaque arc, multiplié par son ordonnée, c'est à dire de tous les BO carré en OD, est double de la somme triangulaire de ces mêmes portions IRAP du triligne, entre la base et chaque sinus sur l'axe, à commencer du côté de B.

PROPOSITION XIV

La somme triangulaire des rectangles de chaque ordonnée avec son arc, c'est à dire la somme triangulaire de tous les BO en OD, à commencer par A ou (ce qui est la même chose) la somme de tous les solides AD en DO en OB, (...) est égale à la somme de ces portions IRAP du triligne, multipliées chacune par son bras sur la base AP, c'est à dire par la perpendiculaire menée sur AP du centre de gravité de chaque portion IRAP.

PROPOSITION XV

La somme des arcs multipliés chacun par le carré de son ordonnée, c'est à dire de tous les BO en OD carré, est double de ces portions IRAP du triligne, multipliées chacune par son bras sur l'axe AB, c'est à dire par la perpendiculaire sur AB menée du entre de gravité de chaque portion IRAP.

Les propositions XIII, XIV et XV expriment toutes les trois l'identité d'un bras pour le volume relevé. Respectivement sur Y O Z, X O Z, X O Y en appelant O X la base AC du triligne, O Y son axe (AB) et O Z la troisième coordonnée dans l'espace après relèvement (AP). Les balances sont les perpendiculaires à ces plans, respectivement AC, AB, AP. Seule AP n'est pas déjà subdivisée, AC l'est par les EE, AB par les DD; pour suppléer à ce manque, Pascal imagine un troisième ordre de plans parallèles (et parallèles au plan de la figure) qui produit un nouveau découpage du volume relevé.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Les démonstrations sont toutes trois sur le modèle de la V (voir ci-dessus § 2.) et exigent un (XIII et XIV) ou deux (XV) redécoupages en volumes du second ordre.

Les énoncés en termes modernes font apparaître une intégrale d'intégrale (intégrale double déjà fubinisée) comme la XII

$$\int s^2 x\, dy = 2 \int s \int x\, dy \quad ds \qquad \text{(Proposition XIII)}$$

$$\int s\, y\, x\, dy = \int \int y\, x\, dy \quad ds \qquad \text{(Proposition XIV)}$$

$$\int s\, x^2\, dy = 2 \int \int \frac{x}{2}\, x\, dy \quad ds \qquad \text{(Proposition XV)}$$

Les traductions sont à la lettre, avec une omission et un abus de langage dans l'écriture des intégrales intérieures nées des espaces ARIP. Dans la XIV par exemple, au lieu de

$\int y\, x\, dy$ il faudrait écrire $\int_0^y Y\, x\, dY$.

De même pour les deux autres. Comme x et s sont fonction de y toute ambiguïté disparaît.

5 - L'unité du *Traité des trilignes*. Toutes les propositions sont lisibles comme des intégrations par parties. Pour Pascal le lien est dans la géométrie

Il est immédiat de réécrire par parties les propositions I à XI

$$\int y^2\, dx = \int x\, d[y^2] \qquad \text{(Proposition II)}$$

$$\int y^3\, dx = \int x\, d[y^3] \qquad \text{(Proposition III)}$$

$$\int y^4\, dx = \int x\, d[y^4] \qquad \text{(Proposition IV)}$$

$$\int y^2\, d[x^2] = \int x^2\, d[y^2] \qquad \text{(Proposition V)}$$

etc.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

La réécriture des quatre dernières se fait ainsi

$$\int s \; d\Big[\int x \, dy\Big] = \int \int x \, dy \quad ds \qquad \text{(Proposition XII)}$$

$$\int s^2 \; d\Big[\int x \, dy\Big] = \int \int x \, dy \quad ds^2 \qquad \text{(Proposition XIII)}$$

$$\int s \; d\Big[\int y \, x \, dy\Big] = \int \int y \, x \, dy \quad ds \qquad \text{(Proposition XIV)}$$

$$\int s \; d\Big[\int x^2 \, dy\Big] = \int \int x^2 \, dy \quad ds \qquad \text{(Proposition XV)}$$

Voyons-le par exemple sur la XIV, dont le premier membre $\int s \; d\Big[\int y \, x \, dy\Big]$ ainsi réformulé est bien celui de Pascal $\int s \, y \, x \, dy$, puisque

$$d\Big[\int y \, x \, dy\Big] = d\Big[\int_0^y Y \, x(Y) \, dY\Big] = y \, x \, dy$$

Pour un lecteur moderne, l'unité du *Traité des trilignes* est remarquable. Les quinze propositions sont des formules d'intégration par parties. L'intégration par parties n'est-elle pas un pur produit du calcul par primitive, celui que nous utilisons constamment pour réécrire les théorèmes de ce Traité ? Comment Pascal en a-t-il fait l'économie ? L'unité du *Traité des trilignes* est l'unité de ses quinze démonstrations. L'attribut géométrique est variable, ce peut être un espace (aire), un solide (volume), un bras (distance d'un centre de gravité à l'axe ou à la base), mais le principe est toujours le même : c'est l'identité de cet attribut géométrique avec lui-même qui fournit les égalités que nous lisons aujourd'hui comme des formules d'intégration par parties. Ce sont toujours deux découpages géométriques infinitésimaux qui finissent par produire les deux différentielles df et dg de la formule résumant toute intégration par parties

$$\int f \, dg = \int g \, df$$

la quintessence de l'intégration par parties, c'est la permanence de la grandeur géométrique.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Aussi invraisemblable que cela paraisse, l'intégration par parties a débuté en géométrie. Le terme tout intégré était toujours nul, de par la forme d'un triligne. Le signe moins était impensable au XVII[e] siècle, surtout en géométrie !

6 - Fonction graphe arbitraire ou fonction correspondance. Pascal et ces deux points de vue. Il est prisonnier de la géométrie

Il est pratique de lire Pascal en pensant parallèlement "variable", "changement de variable", "fonction", "intégration curviligne, double, triple, par parties" ; il est même, à notre avis, presque impossible de le lire autrement : nous ne sommes plus ignorants de ces concepts et ne pouvons faire le vide à leur propos.

Cependant cela ne doit pas nous faire oublier que Pascal n'a, pas plus que les mathématiciens de son époque, la notion de fonction, ni, donc, celle de variable ; et si ces objets que nous appréhendons maintenant comme des variables, x, y, s, nous apparaissent démocratiquement traités par Pascal, aucune n'étant privilégiée, c'est qu'elles ne sont pas dans une dépendance fonctionnelle repérée, laquelle crée immanquablement des hiérarchies. Leurs liens sont des liens de contiguïté géométrique, pas de dépendance fonctionnelle : Pascal parle de Σ DI DD, pas de Σ DI(D) DD, DI est à côté de DD, il n'est pas fonction de D.

Mais, pourrait-on dire, même si Pascal ne rédige pas à l'aide d'un concept de fonction bien dégagé, n'en a-t-il une de ces préfigurations intuitives auxquelles il nous a si souvent habitués ? Comme il a une forte notion intuitive de limite dans le cinquième avertissement de la Lettre, et dans le premier du *Traité des sinus*, où l'on croirait lire $\alpha - \varepsilon$ raconté en français[15] dans sa méthodedesindivisibles.

Il y a un argument pour prouver qu'il n'en est rien :

Reprenons le schéma pascalien

– Une somme de carrés d'ordonnées à la base est égalée à une somme triangulaire d'ordonnées à l'axe (proposition II)

– Une somme de carrés d'arcs est égalée à une somme triangulaire de sinus (proposition VII)

15 - Voir le paragraphe I de ce chapitre.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

L'intervention de la figure rectifiante peut paraître indispensable, et le résultat que ces deux propositions n'en font qu'une, un miracle.

Pourtant il est plus juste de dire que c'est la preuve qu'il n'y a pas de pensée “dépendance fonctionnelle” dans le *Traité de roulette*. Si Pascal avait pensé en termes de dépendance fonctionnelle plutôt que de contiguïté géométrique, il n'aurait pas ressenti le besoin d'inventer une figure de passage ; en effet, l'égalité qu'exprime la proposition II

$$\int y^2\,dx = 2\int x\,y\ dy$$

étant vraie pour *toutes* les dépendances fonctionnelles y(x), le changement purement nominal de y(x) en s(y) a pour effet immédiat d'écrire la proposition VII sous la forme :

$$\int s^2\,dy = 2\int y\,s\ ds$$

pour passer de l'une à l'autre il aurait suffi de remplacer formellement y par s et x par y.

Le nominalisme de Pascal est ici entravé par son amour de la géométrie, discipline où les choses gardent leur essence.

La seule notion intuitive de fonction que nous pouvons reconnaître à Pascal, c'est celle de graphe arbitraire, qu'il met en oeuvre dans son triligne quelconque ; il y a à la fois l'idée de fonction uniforme, et celle d'arbitraire. Sur ce point il est en avance sur Descartes, rivé aux polynômes et à l'algèbre. Mais rien ne perce chez Pascal de la fonction “correspondance” (même non arbitraire !) entre x et f(x). La géométrie n'interdit pas de penser en termes de dépendance fonctionnelle, simplement elle n'y prédispose pas. Par contre le graphe arbitraire n'est pas étranger à la pensée géométrique. Les deux aspects du concept de fonction ont des significations différentes, l'un s'accorde avec une vision géométrique, l'autre est lié à une pensée symbolique, algébrique.

V - *Traité de la roulette* et vision nouvelle : Pascal calcule avec des différentielles

Pascal calcule toujours avec des différentielles géométriques, ces petites portions nées de divisions égales sur une ligne – droite ou courbe – par lesquelles il faut multiplier toujours les expressions dont on fait la somme.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Ces différentielles sont nommées. Sujettes à l'échange, nous les voyons qui, nées d'une droite, se transforment en d'autres, nées d'une courbe dans le *Traité des Trilignes*. Elles sont capables de changer d'ordre, puisque des sommes triangulaires où MM est d'ordre 2 deviennent de simples sommes où MM est d'ordre 1. Elles passent même de l'ordre 3 à l'ordre 1 : les sommes pyramidales sont également de simples sommes.

Susceptibles de transformations, parce que nommées au départ, les différentielles pascaliennes sont les outils d'un calcul extrêmement articulé.

Ce ne sont pas de simples épaisseurs restituées à la méthode des indivisibles lorsqu'un paradoxe a la malencontreuse idée de surgir. Elles ne viennent pas sur le devant de la scène quand il y a problème, elles y sont dès le début.

Pourtant, à la lecture du *Traité de la roulette*, on pourrait les croire aussi absentes que celles de Cavalieri – n'est-il pas question, tout au long du Traité, de « sommes de lignes », « sommes d'arcs », « sommes triangulaires de produits d'arcs par des ordonnées » ?

Il ne faut pas s'y tromper cette fausse absence se change en vraie présence dès lors que l'on « revient sans cesse du défini à la définition » – selon le précepte de *L'esprit géométrique* – pour réécrire les infinitésimaux sous-entendus.

Le lien entre quadrature et tangente – la quadrature comme problème inverse des tangentes – est pratiquement absent du *Traité de la roulette*. La seule exception est la proposition I du *Traité des sinus*, où il est à l'œuvre, mais pas dégagé dans sa généralité.

Cependant, le *Traité de la roulette* est un chaînon entre le foisonnement des calculs isolés qui l'ont précédé et l'avènement quelques années plus tard du nouveau calcul. Ce qu'on lit, ce ne sont pas des calculs séparés, ce ne sont même pas des traités séparés car les différentielles courent d'un traité à l'autre[16]. Le *Traité de la roulette* est, comme le futur calcul, une méthode subsumant les problèmes, les dés-isolant les uns des autres. C'est en dégageant les différentielles géométriques et en leur accordant l'importance qui leur revient que Pascal est parvenu à cette généralité intermédiaire. La richesse du *Traité de la roulette* est la richesse de ses différentielles, leur mutabilité dérapante, leur aptitude à devenir d'autres. Ce sont elles qui font de ce texte étonnant le "premier traité de calcul intégral".

16 - Comme le montrent les calculs faits dans les chapitres III, *Un calcul à la manière de Pascal* et VI, *Les problèmes d'octobre* (Bras sur l'axe de la surface autour de la base et Bras sur l'axe de la surface autour de l'axe).

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Chapitre III

Un calcul à la manière de Pascal

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Résumé du Chapitre III

Nous nous proposons de donner à voir le calcul du solide de la roulette autour de la base, par les méthodes pascaliennes, en suivant de près les indications de l'auteur.

Il s'agit de calculer la somme des carrés des ordonnées à la base. Ce ne sont pas les ordonnées naturelles de la roulette. Mais la somme des carrés des ordonnées à la base est égale, de par le *Traité des Trilignes*, à la somme triangulaire des ordonnées à l'axe. Dans cette première transformation du problème posé apparaissent deux choses essentielles, la fonction strictement calculatoire des sommes triangulaires – il n'est pas question ici de chercher un centre de gravité – et la réduction de la roulette au cercle, préliminaire à tout calcul.

Comme les ordonnées à l'axe se décomposent en ordonnée et arc du demi-cercle-roue, le calcul de la somme triangulaire ci-dessus revient à ceux de deux sommes triangulaires, dont une d'arcs.

La somme triangulaire des ordonnées à l'axe d'un demi-cercle est facile, puisqu'on connait le centre de gravité du demi-cercle. Cette première somme triangulaire est réconciliée après coup avec son sens originel!

Quant à la deuxième, celle des arcs d'un demi-cercle, elle est le point de départ d'un voyage dans les Traités. Cela démarre par un ennui : le demi-cercle n'est pas un triligne, il faut donc tout remettre dans un quart de cercle. En toute rigueur à l'époque de Pascal il aurait fallu passer alors par le *Traité des Sommes simples, triangulaires et pyramidales*, dont la fonction est de résoudre ces problèmes de linéarité (un arc plus grand qu'un quart de cercle est le complément d'un arc plus petit etc). Le résultat est que la somme est coupée en quatre morceaux, dont un facile et deux assez semblables.

L'un des morceaux est une somme d'arcs, un autre est une somme triangulaire d'arcs. Le *Traité des Trilignes* transforme les sommes d'arcs (les différentielles sont des dy) en sommes de sinus (les différentielles sont des ds), les sommes simples restent simples, les sommes triangulaires se changent en sommes de carrés et réciproquement. On est donc renvoyé dans le *Traité des Sinus*, pour le calcul d'une somme de sinus, et celui d'une somme de carrés de sinus. Le *Traité des Sinus* est un Traité de fin de calcul.

Quant au dernier c'est aussi une somme triangulaire d'arcs, mais pas à partir du bon sommet. Encore un problème de linéarité, plus lourd que difficile.

Au total, 5 traités ont été nécessaires.

Le schéma pascalien est très analogue à l'actuel procédé de calcul : transformer une intégrale par des méthodes générales (changements de variable, intégrations par parties) jusqu'à ce qu'elle figure dans le tableau de primitives qui donne enfin sa valeur. Le tableau de primitives ici, c'est le quart de cercle, car le *Traité de Sinus* du quart de cercle (ainsi d'ailleurs que le *Traité des Arcs de cercle*) achève les calculs.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Chapitre III - Un calcul à la manière de Pascal

Rien de ce qui est étudié dans les six premiers traités n'est inutile au septième et dernier dit «Traité général de roulette». Celui-là, vers lequel tous les autres concourent, met un point final à une cascade de conditions suffisantes ; pour le premier groupe de problèmes, ceux *touchant la dimension et le centre de gravité du triligne et de ses demi-solides*, Pascal nous rappelle que

> « *Il a été démontré à la fin de la lettre à Monsieur de Carcavi que, pour résoudre tous ces problèmes, il suffit de connaître la dimension et le centre de gravité tant du triligne COS que de ses deux doubles onglets sur l'axe et sur la base . et il a été démontré dans le traité des trilignes que, pour connaître la dimension et le centre de gravité de ce triligne et de ses doubles onglets, il suffit de connaître ces six choses (...)*
>
> *1. La somme des ordonnées ZY*
> *2. La somme de leurs carrés*
> *3. La somme de leurs cubes.*
> *4. La somme triangulaire des mêmes lignes ZY.*
> *5. La somme triangulaire de leurs carrés.*
> *6. La somme pyramidale des mêmes lignes ZY.* »

Mais la roulette est un triligne bien particulier, en quelque sorte "deux fois un cercle" du point de vue de ses ordonnées à l'axe, puisque l'égalité $ZY = \overset{\frown}{CM} + ZM$ la relie deux fois à son cercle générateur. Les six sommes, au prix d'une certaine complication, se voient transformées en sommes de grandeurs liées au cercle ; par exemple, pour 3. , il s'agira de calculer $\Sigma \overset{\frown}{CM}^3 + 3\,\Sigma \overset{\frown}{CM}^2\,ZM + 3\,\Sigma\,\overset{\frown}{CM}\,ZM^2 + \Sigma\,ZM^3$ (sans oublier de multiplier par ZZ comme l'indique assez le mot «ordonnée»...)

Rappelons que Pascal, épris de méthode plus que de résultat n'achève *jamais* les calculs, et c'est au prix d'un patient jeu de piste à travers la jungle des six premiers traités que le lecteur calculera effectivement la valeur de la somme. En eux-mêmes, les calculs n'ont pas beaucoup d'intérêt, mais les

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France   Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

faire permet de découvrir la structure de ce tout que forment les 7 traités : c'est celle d'un roman policier où aucun détail n'est gratuit, car, on s'en rend compte à la deuxième lecture, tous n'étaient là que pour le dénouement.

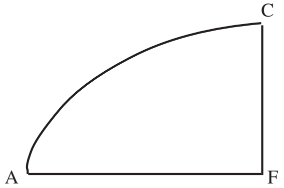
Nous nous proposons, pour donner une idée de l'extrême articulation de ce traité de géométrie calculante, de résumer le calcul du « solide de la roulette autour de la base », qui donne à voir une utilisation inattendue des sommes triangulaires. Le calcul de la position du centre de gravité du demi-solide (jamais fait auparavant) est malheureusement beaucoup trop long pour être donné ici.

1 - Calcul du solide de la roulette tourné à l'entour de la base

Il s'agit de calculer le volume engendré par une rotation de la roulette autour de sa base AF. Le *résultat* n'est pas nouveau, Roberval l'avait déjà donné, avec beaucoup moins de calculs,

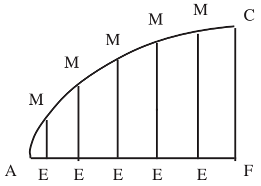
c'est $\frac{5}{2}\frac{\pi^2}{R^3}$.

La *méthode* de Pascal est complètement inédite.



En faisant tourner la roulette autour de sa base, il se crée un solide de révolution ; soit V son volume.

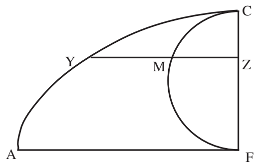
Pour ce solide de révolution, le volume est la somme des carrés des *ordonnées à la base*, multipliée par π.



$$V = \pi \sum ME^2\, EE$$

Mais ce sont les *ordonnées à l'axe* qui sont adaptées à la nature de la roulette : elles seules la ramènent à son cercle générateur grâce à l'égalité :

$$ZY = \overset{\frown}{CM} + ZM$$



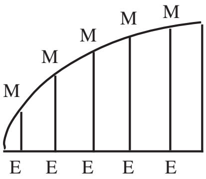
L'égalité de roulement sans glissement $\overset{\frown}{CM}$ = MY exprime la nature de la roulette.

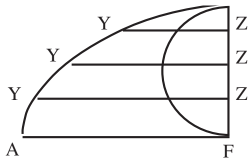
Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Heureusement tout est prévu : il y a dans le *Traité des trilignes* un théorème dont la mission est de transformer la somme des carrés des ordonnées à la base en une expression des ordonnées à l'axe :

> *«La somme des carrés des ordonnées à la base est double de la somme triangulaire des ordonnées à l'axe, à commencer par la base.»*

(*Traité des trilignes*, corollaire de la proposition II)





La proposition II, valable pour un triligne quelconque, s'écrit :

$$\sum ME^2\ EE = 2 \sum_{\text{triang A}} ZY\ ZZ^2$$

La première somme a lieu sur les E, «pour un nombre indéfini de divisions égales de la base»

La deuxième a lieu sur les Z, «pour un nombre indéfini de divisions égales de l'axe».

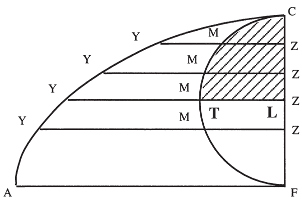
Il est intéressant de remarquer que les sommes triangulaires ne servent pas seulement à calculer des centres de gravité, elles servent aussi à *renvoyer sur l'axe les ordonnées à la base* ; nées de la statique et de l'arithmétique, destinées à calculer cet attribut géométrico-statique qu'est le centre de gravité, les voilà investies d'un rôle purement calculatoire ; un pas vers l'abstraction s'accomplit.

Donc, grâce à cette proposition II le volume devient :

$$V = 2\pi \sum_{\text{triang AF}} ZY\ zz^2$$

et, comme

$$\sum_{\text{triang AF}} ZY\ zz^2 = \sum_{\text{triang AF}} \underset{1}{ZM\ zz^2} + \sum_{\text{triang AF}} \underset{2}{\overset{\frown}{CM}\ zz^2}$$

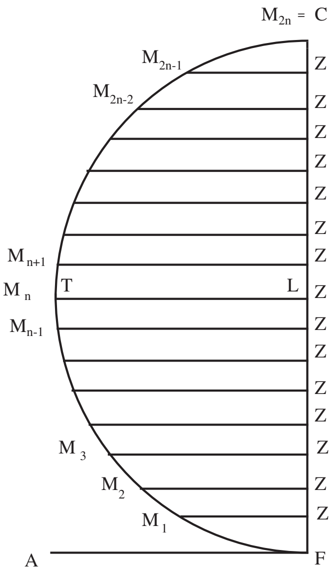


(égalité de roulement sans glissement), le calcul de V se ramène à deux calculs de sommes triangulaires d'éléments du demi-cercle. Et nous allons voir que l'idée directrice va être maintenant de tout ramener dans le quart de cercle (ombré sur la figure).

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

INTERMÈDE



Comme la «somme triangulaire à partir de ...», « $\sum_{\text{triang} \dots}$ » est une notion qui n'a plus cours, au risque de nous répéter, essayons de dire clairement ce qu'il faut entendre par là.

Prenons par exemple $\sum_{\text{triang F}} CM \ ZZ^2$.

Pour y voir plus clair, imaginons n points Z, n très très grand, donc une image finie de « l'axe-CF-subdivisé-en-un-nombre-indéfini[1]-de-parties-égales »... le calcul infinitésimal est ainsi à ses débuts! Appelons M_1, M_2, M_3, ..., M_n, ..., M_{2n} les points M correspondant à ces points Z. Faire la somme triangulaire **à partir de F** des CM , c'est faire toutes les sommes simples suivantes :

1) La somme simple de tous les CM (en n'oubliant pas de multiplier par ZZ !)

2) La somme simple de tous les CM **sauf celui qui est le plus proche de F**

3) La somme simple de tous les CM **sauf les deux qui sont les plus proches de F**

4) La somme simple de tous les CM **sauf les trois qui sont les plus proches de F**

... jusqu'à n'avoir plus que CM_{2n-1}, tout seul dans la dernière "somme"

puis sommer toutes ces sommes simples (en n'oubliant pas de multiplier chacune par ZZ...!, d'où ZZ^2 en facteur). Une somme triangulaire est une somme double, et le facteur ZZ^2 garantit qu'elle reste finie.

1 - Indéfini veut dire infini, Pascal réserve «infini» à ce qui est en rapport avec Dieu.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

On a ainsi :

$$\sum_{\text{triang F}} \widehat{C}M\, zz^2 = ZZ\,((\widehat{C}M_1 + \widehat{C}M_2 + \ldots + \widehat{C}M_{2n})\, ZZ + (\widehat{C}M_2 + \ldots + \widehat{C}M_{2n})\, ZZ$$

$+ (\widehat{C}M_3 + \ldots + \widehat{C}M_{2n})\, ZZ + \ldots (\widehat{C}M_{2n-1})\, ZZ))$ ou, en réagençant

$$\sum_{\text{triang F}} \widehat{C}M\, zz^2 = ZZ^2\,(CM_1 + 2\,\widehat{C}M_2 + 3\,\widehat{C}M_3 + \ldots 2n\,\widehat{C}M_{2n})$$

Lorsqu'on écrira en abrégé $\sum_{\text{triang F}} \widehat{C}M\, zz^2$, il y aura donc trois sous-entendus :

on ne dit pas que l'on somme sur tous les M, ni sur quel domaine varient ces M, ni qu'il y a ZZ^2 en facteur, cela pour ne pas trop alourdir la notation ; il vaut mieux en effet indiquer prioritairement que la somme est triangulaire et de quel côté on laisse tomber progressivement les termes (ici F).

Ainsi $\sum_{\text{triang F}} ZM$ est $(ZM_1 + 2\,ZM_2 + 3\,ZM_3 + \ldots 2n\,ZM_{2n})\,ZZ^2$,

puisqu'on abandonne progressivement les termes **du côté de F** (on pourrait aussi bien écrire,

$\sum_{\text{triang AF}} ZM$, le côté de F est aussi le côté de la droite AF...)

et $\sum_{\text{triang C}} ZM$ est $(ZM_{2n} + 2\,ZM_{2n-1} + 3\,ZM_{2n-2} + \ldots 2n\,ZM_1)\,ZZ^2$,

puisque le lâchage progressif des ZM a lieu **à partir de C**.

Calcul de ① $= \sum_{\text{triang F}} ZM\, zz^2$

Il n'y a pratiquement rien à faire, puisque cette somme triangulaire est justement égale à la surface du demi-cercle multipliée par son bras sur AF (la distance du centre de gravité à AF) ; c'est une application immédiate de la *Méthode générale* des centres de gravité[2] exposée dans la *Lettre à Carcavi* (premier Traité).

$$① = \pi \frac{R^2}{2} \times R$$

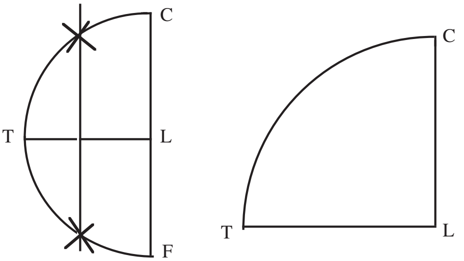
2 - Notre théorème de l'abscisse du centre de gravité.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

La somme triangulaire est employée dans un sens très proche de ce qui lui a donné naissance : un calcul de centre de gravité, le poids pèse d'autant plus qu'il est plus loin.

Calcul de ② $= \sum_{\text{triang } F} \overset{\frown}{CM}\, zz^2$

Il s'agit de calculer une somme triangulaire des arcs d'un demi-cercle, figure qui *n'est pas un triligne* car un triligne est tel que sa ligne courbe est coupée une seule fois par une verticale (est un graphe au sens actuel du terme). Les théorèmes du Traité ne sont vrais que pour des trilignes, il faudra donc toujours ramener les sommes dans le quart de cercle CTL.



Le demi-cercle n'est pas un triligne, le quart de cercle comme la roulette sont des trilignes.

En reprenant la figure "finie" auxiliaire ci-dessus, écrivons :

② $= (\overset{\frown}{CM}_1 + 2\,\overset{\frown}{CM}_2 + \ldots + n\,\overset{\frown}{CM}_n) + ((n+1)\overset{\frown}{CM}_{n+1} + (n+2)\overset{\frown}{CM}_{n+2} + \ldots + 2n\,\overset{\frown}{CM}_{2n}),$

en sous-entendant ZZ^2. Jusqu'à $\overset{\frown}{CM}_n$, les arcs débordent du quart de cercle, seul triligne habilité ; il s'agit donc de remettre dans le quart de cercle tout ce qui figure dans la première parenthèse, par exemple en écrivant

$$\overset{\frown}{CM}_k = \overset{\frown}{CF} - \overset{\frown}{FM}_k$$

② devient une somme de quatre termes :

* $\overset{\frown}{CF}\, \frac{n(n+1)}{2}\, ZZ^2$
* $n\,(\overset{\frown}{CM}_{n+1} + \overset{\frown}{CM}_{n+2} + \ldots + \overset{\frown}{CM}_{2n})\, ZZ^2$
* $(\overset{\frown}{CM}_{n+1} + 2\,\overset{\frown}{CM}_{n+2} + \ldots + n\,\overset{\frown}{CM}_{2n})\, ZZ^2$
* $-\,(\overset{\frown}{FM}_1 + 2\,\overset{\frown}{FM}_2 + \ldots + n\,\overset{\frown}{FM}_n)\, ZZ^2$

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Le premier est facile à calculer, puisque n ZZ = (n+1) ZZ (le nombre de divisions égales est indéfini..., ainsi va le calcul infinitésimal à ses débuts...) = R ; il vaut

$$\frac{R^2}{2} \times \pi R.$$

Le deuxième, toujours grâce à n ZZ = R, est la somme simple des arcs du quart de cercle :

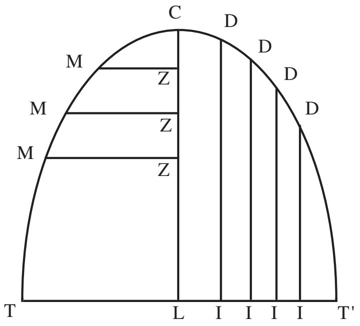
$$R \sum_{\text{simple}} \widehat{CM}\ ZZ\ .$$

Un théorème est prévu pour égaler les sommes simples d'arcs à une somme de sinus dans le cas général ; un autre très simple et pourtant l'une des clés de tout le Traité, la fameuse proposition I du *Traité des sinus*, calcule la somme des sinus dans le cas particulier où le triligne est un quart de cercle. Le quart de cercle est toujours le lieu où convergent tous les calculs pour s'y résoudre enfin.

Donc, pour faire le calcul, on applique tout d'abord :

«La somme des arcs de la courbe compris entre le sommet et chaque ordonnée à l'axe est égale à la somme des sinus sur la base»

Traité des trilignes, propos. VI



Le triligne CTL est quelconque… il est doublé pour rendre la figure plus lisible. Les divisions ZZ sont égales et «en nombre indéfini», ainsi que les DD. La proposition VI énonce :

$$\sum_{\text{simple}} CM\ ZZ = \sum_{\text{simple}} DI\ DD$$ [3]

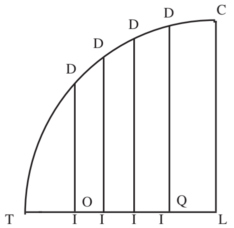
3 - Il s'agit d'une intégration par parties : ∫ y ds) = ∫ s dy , pour que le terme tout intégré disparaisse, il est indispensable que M décrive tout l'arc CT (et I tout l'axe LT').

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

puis pour CTL quart de cercle, la proposition qui est le pivot du plus célèbre des sept Traités :

«La somme des sinus d'un arc du quart de cercle est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon»

Traité des sinus, propos. I [4]



Le triligne CTL est un quart de cercle de rayon R. Les divisions DD sont égales et «en nombre indéfini» . La proposition I dit que, pour I variant entre O et Q :

$$\sum DI\ DD = R \times OQ,$$

d'où, si O = T et Q = L :

$$\sum DI\ DD = R^2 .$$

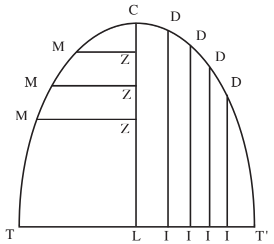
Le deuxième terme vaut donc $R \times R^2$.

Le troisième terme n'est autre que $\sum\limits_{\text{triang } T} CM$

Dans un premier temps, la somme triangulaire est égalée à une somme simple de sinus carrés

«La somme triangulaire des arcs CM, à commencer par T , est égale à la moitié de la somme des carrés des sinus sur la base»

Traité des trilignes, propos. IX[5]



Le triligne CTL est quelconque. Les divisions d'arc DD sont égales et «en nombre indéfini», ainsi que les divisions ZZ de l'axe. La proposition IX énonce :

$$2 \sum_{\text{triang } T} CM\ ZZ^2 = \sum_{\text{simple}} DI^2\ DD$$

4 - C'est notre formule $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha\, d\alpha = \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2$. Pascal l'a montrée par une intégrale curviligne.

5 - C'est la formule d'intégration par parties $\int ys\, dy) = 1/2 \int y^2\, ds)$

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

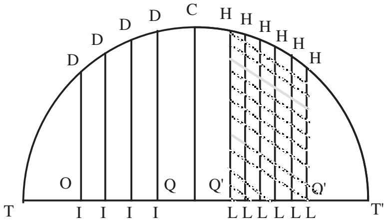
Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Dans un deuxième temps, la nouvelle somme est effectivement calculée pour le cas particulier où le triligne CLT devient un quart de cercle. Ainsi le schéma pascalien est très analogue à l'actuel procédé d'intégration par parties, dans les deux cas une intégrale est égalée par parties à une autre ; cette dernière est effectivement calculée, *le quart de cercle jouant dans le calcul pascalien le rôle que joue la primitive dans le calcul actuel* (actuel, c'est à dire depuis Leibniz et Newton), l'un et l'autre sont chargés de dénouer le calcul.

Voici ce deuxième temps :

«La somme des carrés des sinus sur la base est égale à la somme des ordonnées au quart de cercle, qui seraient comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon»

(*Traité des sinus*, proposition II)



CLT est un quart de cercle dédoublé. Les divisions DD sont égales et «en nombre indéfini», ainsi que les LL. Les sommes sont prises pour I entre O et Q d'une part, L entre O' et Q' d'autre part ; La proposition II énonce :

$$\sum DI^2\ DD \ = R \sum HL\ LL$$ [6]

égalant ainsi la somme des sinus carrés à l'aire ombrée.

Cette dernière somme est facile à calculer, puisque c'est l'aire du quart de cercle, multipliée par le rayon R, soit : $\dfrac{\pi R^2}{4}$ R.

En définitive, $\sum\limits_{\text{triang T}} \widehat{CM}\ ZZ^2$ n'est autre, pour le quart de cercle, que la moitié de son aire multipliée par son rayon.

$$\frac{\pi\ R^3}{8}$$

6 - Là il s'agit, pour nous toujours, d'un changement de variable :
$\int \sin^2\alpha\ d\alpha\ ) = \int \sin\alpha\ d(\cos\alpha)$

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Le troisième terme vaut donc .

Le quatrième terme ressemble au troisième, mais il ne lui est pas égal ; plus précisément si l'on ramène les arcs FM dans le quart de cercle CTL :

$$(\widehat{FM}_1 + 2\,\widehat{FM}_2 + \dots n\,\widehat{FM}_n = \sum_{\text{triang C}} \widehat{CM}$$

(l'abandon des termes un à un a lieu du côté de C, et non pas de T, M varie dans le quart de cercle CTL) ;

mais le passage de $\sum_{\text{triang T}} \widehat{CM}\,ZZ^2$ à $\sum_{\text{triang c}} \widehat{CM}\,ZZ^2$ est pratiquement immédiat ; en effet si l'on additionne les deux, tous les arcs se voient multipliés par n et il vient :

$$\sum_{\text{triang T}} \widehat{CM} + \sum_{\text{triang C}} \widehat{CM} = \sum_{\text{simple}} n\,\widehat{CM}\,ZZ^2 = R \sum_{\text{simple}} \widehat{CM}\,ZZ = R^3$$

Le calcul, tant de la somme triangulaire des arcs à partir de T, que de leur somme simple est fait plus haut, il vient pour la valeur du quatrième terme : $R^3 - \frac{\pi R^3}{8}$

Et par addition des quatre :

$$V = \pi\left(\frac{R^3}{2} + R^3 + \frac{\pi R^3}{8} + \left(R^3 - \frac{\pi R^3}{8}\right)\right) = \frac{5\,\pi R^3}{2}\ .$$

2 - Conclusion

Pour calculer le volume du solide de la demi-roulette tourné autour de la base, la méthode pascalienne consiste

1 – à transformer l'expression initiale du volume en une expression d'éléments géométriques du quart de cercle ;

2 – à transformer une somme d'arcs (simple ou triangulaire) en une somme de sinus éventuellement carrés (le *s* de l'arc devient le *ds* de la somme de sinus, par une intégration par parties géométrique), de façon à

obtenir une formule générale, valable dans tout triligne ;

3 – à calculer la somme de sinus en question par une formule qui, elle, n'est valable que pour le triligne-quart-de-cercle.

Les autres problèmes, même s'ils conduisent à des calculs nettement plus compliqués, se résolvent sur ce schéma ; les sommes pyramidales sont elles aussi dé-géométrisées, pour devenir un instrument de calcul. Leur rôle est alors de *renvoyer sur l'axe la somme des cubes des ordonnées à la base*.

Il s'agit d'une véritable "géométrie calculante"[7], analogue dans ses deux étapes (transformation, puis lecture dans le catalogue) au futur calcul analytique, et où le quart de cercle joue le rôle d'un tableau de primitives.

7 - Suivant l'expression de J. Chevalier dans la préface aux oeuvres mathématiques de Pascal (La Pléiade).

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

CHAPITRE IV

LE QUART DE CERCLE COMME ESPACE MYSTIQUE ET COMME ESPACE CLOS

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Résumé du Chapitre IV

Si Pascal a pu résoudre les problèmes de roulette, c'est parce qu'il a vu la roulette comme sa roue. Les arcs, les ordonnées à l'axe, et – Pascal le sait depuis que Wren le lui a dit – les cordes de la roue contiennent suffisamment d'informations pour faire tous les calculs mis au concours.

Le *Traité de la roulette* est un travail immense, démesuré à l'aune de l'intérêt du propos. Pascal avait-il des raisons particulières de s'intéresser au cercle ?

Les sommations diverses faites dans le cercle n'en sortent pas. Une somme de sinus sur la base est un sinus sur l'axe (Proposition I). Une somme de tels sinus est un sinus sur la base… Ainsi sommes triangulaires et sommes pyramidales d'éléments du cercle restent à chaque étape du calcul dans le cercle. Pour une autre figure géométrique elles sortiraient. Le cercle est clos, il se suffit à lui-même, n'incite pas à chercher des méthodes plus générales. Peu infinitésimal, il est la perfection géométrique par excellence. Un système clos pour une œuvre fermée.

L'œuvre la plus achevée de calcul intégral par empilement a totalement lieu dans le cercle, la roulette n'est qu'un prête-nom. Elle préfigure un avenir différent, comme les cercles de Ptolémée, trop nombreux pour avoir encore de l'avenir au XVII[e] siècle.

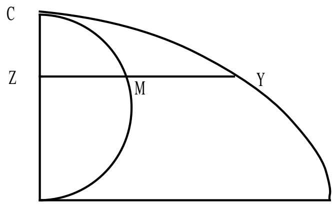
Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : / /presses-ufc.univ-fcomte.fr

Chapitre IV - Le quart de cercle comme espace mystique et comme espace clos

1 - Roulette et cercle

Engendrée mécaniquement par le roulement sans glissement d'un cercle, géométriquement liée à son cercle générateur, la roulette est un cercle superlatif : ses ordonnées, comme ses arcs, se lisent en trois relations sur le cercle qui lui donne naissance. Tout le propos du Traité consiste à reformuler les problèmes de roulette en problèmes de cercle et à résoudre ceux-ci, plus nombreux, mais plus simples.



La connaissance des ordonnées à l'axe ZY de la roulette est équivalente, par l'égalité

$$ZY = \widehat{CM} + MZ$$

à celle des arcs $\widehat{CM}$ et des ordonnées MZ du cercle générateur.

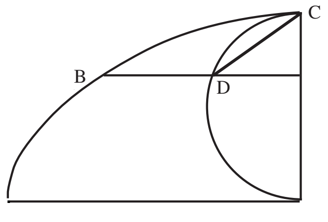
Cette égalité relie doublement la roulette à son cercle générateur.

La connaissance de l'arc de la roulette est équivalente, par l'égalité

$$\widehat{CB} = 2\ CD$$

à celle de la corde du cercle générateur.

Cette autre réduction de la roulette au cercle, découverte par Wren, est beaucoup moins évidente.



2 - Pascal et le cercle

Il y a une grande disproportion entre l'énergie déployée dans le Traité et l'intérêt objectif de la roulette ; les recherches sur cette courbe ne sont pas encore impulsées, comme elles le seront un peu plus tard, par des questions

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

de physique comme la recherche d'un pendule isochrone et il est permis de se demander quelle force a pu pousser Pascal à élaborer une théorie d'une telle perfection pour résoudre un problème aussi particulier. La *Méthode des fluxions* que Newton entreprend d'écrire six ans plus tard, en 1664, est une œuvre indiscutablement bien plus tournée vers l'avenir, puisqu'elle met en position centrale le lien entre quadrature et dérivée, mais elle est d'une certaine façon moins élaborée techniquement que le *Traité général de roulette* de Pascal.

Dans sa phase ultime, le système de Ptolémée comprenait 79 cercles pour sauver les phénomènes sans entamer le dogme des cercles parcourus à vitesse uniforme, et celui de Copernic en comportait 48 pour les mêmes raisons ! Au XVII^e siècle la révolution anti-scolastique était loin d'être achevée même chez les esprits les plus novateurs. Galilée n'a jamais admis les ellipses planétaires, il a “démontré” de façon convaincante un principe d'inertie circulaire : un corps abandonné à lui-même suit un mouvement circulaire uniforme... C'est Kepler qui a accompli la vraie révolution anti-cercle : des ellipses parcourues à vitesse variable, voilà qui n'était pas dans l'air du temps ! Les deux premières lois de Kepler parurent en 1606 et Galilée est mort en 1642. Quant à Pascal, dans la *Préface pour le traité du vide* (de 1647), il ne souffle pas mot des deux lois ; la préface est pourtant un chef-d'œuvre sur la démarcation entre la science et la théologie, et quel meilleur exemple Pascal aurait-il pu trouver pour illustrer son propos que les ellipses planétaires ?

Comme Pascal, dans les dernières années de sa vie, insiste sur la supériorité de la quête de Dieu sur la recherche mathématique et physique, il n'est pas impossible que la roulette, par ses multiples liens au cercle ait exercé une certaine fascination sur lui.

3 - Le quart de cercle comme espace clos par rapport aux opérations de sommation[1]. Pourquoi les problèmes s'y résolvent si bien

C'est surtout le *Traité des sinus* qui est intéressant à cet égard[2]. Il faut relire la proposition I :

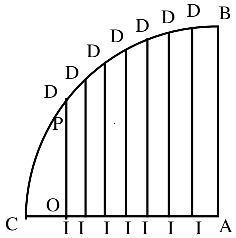
1 - Ce paragraphe 3 fait référence au paragraphe 3, intégrales double et triple, du Chapitre II, *Un Traité très technique*.

2 - Se reporter aux paragraphes 1, 2 et 3 de ce même Chapitre II.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

PROPOSITION I

La somme des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon.

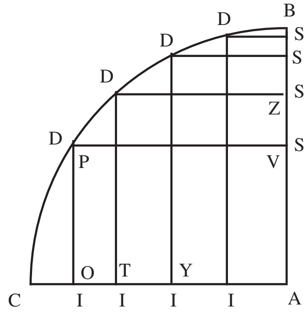


La somme des sinus DI est égale à AO × R.

Tout se passe comme si la somme des lignes DI, qui a en réalité la dimension d'une surface, était une ligne de la même nature, perpendiculaire : l'intégrale des sinus sur la base est un autre sinus (sur l'axe), à une simple constante multiplicative près ; le quart de cercle est un lieu où les sommes de lignes sont repérables par une ligne analogue, alors que la dimension a augmenté ! Mathématiquement le cercle est clos par rapport aux opérations de sommations successives de sinus[3], aussi vrai que la perpendiculaire d'une perpendiculaire est parallèle! En effet, en réitérant l'opération de la proposition I, on rencontre un peu plus loin deux des plus jolies propositions de tout le traité, à la lecture desquelles on peut se plaire à rêver qu'il s'agit des premiers énoncés d'intégrale double et triple. Relisons-les en les épurant au maximum[4]

PROPOSITION VII

La somme triangulaire des sinus sur la base d'un arc quelconque terminé au sommet, à commencer par le moindre des sinus extrêmes, est égale à la différence d'entre les sinus extrêmes sur la base, multipliée par le carré du rayon.



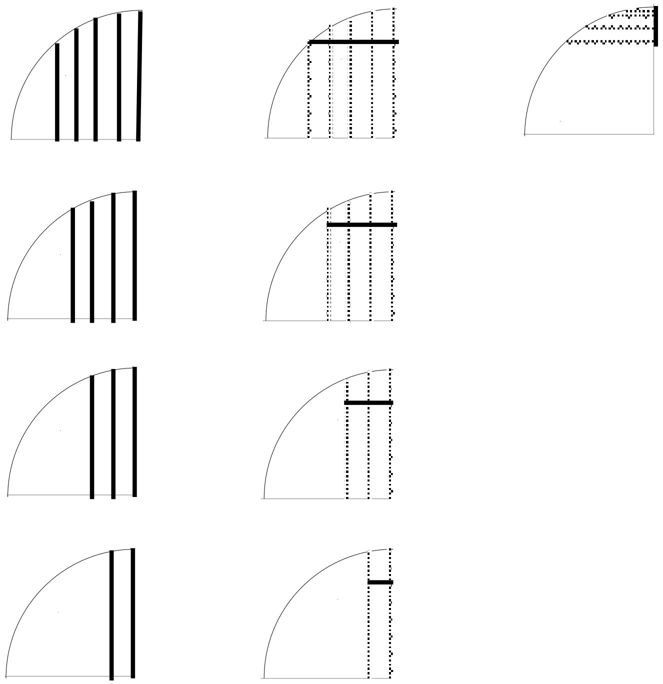
La somme des sommes des sinus DI (jusqu'à DO, jusqu'à DT, jusqu'à DY...) est égale à BV x R^2.

3 - Nous savons bien que l'intégrale d'un sinus (par rapport à l'arc !) est un cosinus, et que l'intégrale d'un cosinus est un sinus... on ne sort pas de l'ensemble { sinus, cosinus } en intégrant.

4 - Pour le détail du contenu de ces deux propositions se reporter au § 3 du chapitre II.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Les stades de l'empilement réitéré que constitue une somme triangulaire de sinus sont dessinés dans les trois colonnes qui suivent.



La somme triangulaire est (par définition) la somme de toutes les lignes verticales de la première colonne. La proposition I permet d'effectuer des sommations partielles, à savoir celles des lignes qui appartiennent à un même cercle ; d'où les horizontales en traits gras figurant dans la deuxième colonne, chacune est somme des lignes pointillées dessinées dans le même cercle ; mais, toujours par la proposition I , la somme de ces horizontales en traits gras de la deuxième colonnne n'est autre que l'unique ligne verticale en traits gras qui figure dans la troisième colonne. C'est donc elle la somme triangulaire cherchée, «différence d'entre les sinus extrêmes sur la base» (en faisant R = 1).

Telle est la quintessence de la proposition VII, une somme de sommes de sinus est du genre sinus[5]...

5 - R (1 - sinus) plus précisément

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : / /presses-ufc.univ-fcomte.fr

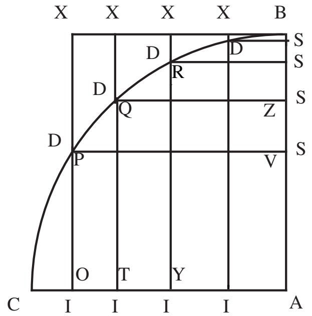
Géométriquement cela veut dire que prendre la perpendiculaire deux fois revient à ne rien faire. La lecture de textes périmés met parfois en lumière d'étonnantes connivences.

Il faut remarquer qu'on ne sort pas du cercle : cette somme triangulaire de lignes du cercle (être mathématiquement élaboré) est encore de manière très simple une ligne du cercle, ce qui ne serait pas du tout le cas pour la somme des ordonnées d'une parabole...

Quant à la proposition VIII, elle exprime aussi l'aspect clos du cercle.

PROPOSITION VIII

La somme pyramidale des sinus d'un arc quelconque terminé au sommet, à commencer par le moindre, est égale à la somme des sinus verses du même arc multipliée par le carré du rayon ou, ce qui est la même chose,à l'excès dont l'arc surpasse la distance entre les sinus extrêmes, multipliée par le cube du rayon.



La somme pyramidale des sinus DI (jusqu'à PO) est égale à

$(BP – AO) x R^3$

Il faut sommer trois fois de suite, la première fois on obtient une horizontale, on somme les horizontales en décalant progressivement le point d'arrêt, on obtient une verticale, on re-somme les verticales de manière analogue et on obtient pour finir une horizontale : une somme de sommes de sommes de sinus est du genre cosinus...(«la distance entre les sinus extrêmes»)

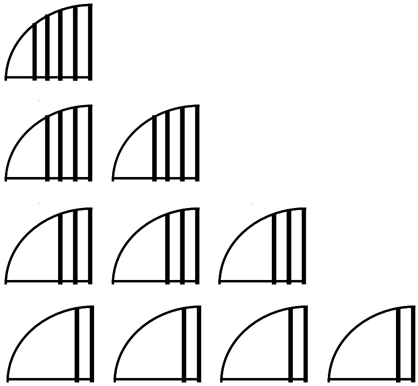
Remarque : pour être plus précis, le résultat de la deuxième sommation n'est pas "sinus" mais "R x (1 – sinus)" ; c'est cela qui introduit l'arc dont parle la proposition VII : il est égal à la somme Σ R x DD.

Un deuxième schéma fera peut-être mieux comprendre ce jeu de verticales et d'horizontales, purement interne au cercle, jeu qui se fait au cours des "sommations par paquets" inhérentes aux sommes pyramidales. Comme pour la somme triangulaire l'infinité de divisions égales de l'arc BP sera matérialisée par le nombre fini cinq.

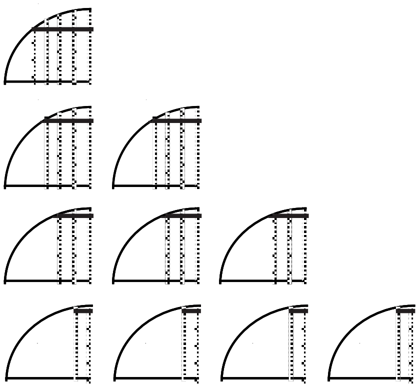
Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

A chaque niveau de calcul on est enfermé dans le cercle.

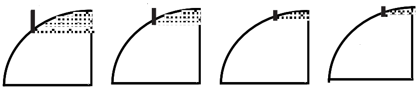
Voici donc, mise en dessins, la somme pyramidale des sinus d'un arc quelconque terminé au sommet :



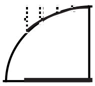
La somme pyramidale des sinus DI est la somme de toutes les verticales en traits gras. L'aspect "doublement triangulaire" de la somme pyramidale est visible sur une lecure en colonnes.



Chaque horizontale en trait gras est la somme des verticales en pointillé du même cercle (par la proposition I). Une première sommation partielle est effectuée.



Une deuxième sommation partielle se fait : à leur tour les horizontales des cercles d'une même colonne sont sommées (par la proposition I, toujours). On obtient des sinus verses ce qui va compliquer un peu la chose pour la dernière étape.



Et voilà la somme finale : la différence entre l'arc et l'horizontale figurés en traits gras.

La quintessence géométrique de la proposition VIII est semblable à celle de la proposition VII : prendre trois fois la perpendiculaire, c'est la prendre une seule fois.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

4 - L'absence de lien quadrature-dérivée : le quart de cercle comme frein, car tout s'y passe trop bien

On peut dire, très schématiquement, que la découverte simultanée par Newton et Leibniz du fait que le problème des quadratures est le problème inverse des tangentes prend deux formes : «$d(\Sigma) = Id$» et «$\Sigma d = Id$», (ou les deux formes $(\int f)' = f$ et $\int f' = f$), la première reposant sur l'idée que quand on dérive la surface on retombe sur l'ordonnée et la seconde sur l'idée que lorsqu'on ajoute les différences de termes successifs presque tout se détruit et il ne reste que le dernier terme (moins le premier). Newton a mis la première formulation en position centrale dans la Méthode des fluxions, et Leibniz a eu l'idée de la deuxième en lisant le *Traité du triangle arithmétique* de Pascal.

Le *Traité du triangle arithmétique* est comme le *Traité de la roulette* une recherche de méthode générale ; et ce en vue d'applications très variées : problème des partis, ordres numériques, sommations des puissances, tout ce qui a à voir avec les combinaisons de n objets p à p. On dit souvent que Pascal n'a pas senti le lien de réciprocité entre quadratures et tangentes ; ce n'est pas tout à fait vrai ; en effet dans une des applications du Triangle arithmétique, écrite en latin, «La somme de puissances numériques», Pascal dit qu'il a une méthode générale (encore une fois) pour calculer la somme des puissances n-ièmes de nombres entiers régulièrement espacés ; et cette méthode «plus générale que celle des anciens qui ne savaient le faire que pour les carrés et les cubes», dit-il, consiste à retrouver x^{n+1} à partir de sommes de différences du genre $(p+1)^k - p^k$. Il remarque que dans le cas de grandeurs continues seul $k = n$ est à prendre en compte (ordres d'infiniment petits) et c'est cela qui lui permet de conclure.

Pourquoi Pascal n'a-t-il pas cherché à faire la même chose ici, alors qu'il a tracé une tangente dans le lemme du *Traité des Sinus* ? Sans doute parce que tout se passe trop bien dans le quart de cercle : tout y est facile, puisque cet espace est clos par rapport aux opérations de sommations curvilignes répétées. Il n'était alors pas nécessaire pour résoudre les problèmes de roulette de chercher dans la voie générale tracée dans «La somme de puissances numériques», où elle n'est générale, soit dit en passant, que pour le cas particulier des x^n... Les problèmes de roulette sont d'ailleurs aussi des problèmes particuliers traités avec une méthode générale *relative à eux*, dans leur ensemble, et pas aux *autres* problèmes qui mettraient en jeu d'autres fonctions que les trigonométriques. Trouver une méthode mieux dégagée des particularismes, c'est ce que sauront faire Newton et Leibniz peu de temps après.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

5 - Conclusion

Le cercle représentait déjà au yeux des classiques la perfection. S'il est de surcroît divisé en parties égales, il acquiert une harmonie supplémentaire. Il est le lieu de résolution de tous les calculs du *Traité de la Roulette* (nous avons vu sur un exemple que le quart de cercle joue le rôle de tableau de primitives, c'est vrai aussi pour les autres calculs). Les opérations successives de sommation tournent en rond puisqu'il est fermé en sinus-cosinus. Se suffisant à lui même comme tout objet clos, il n'a pas incité Pascal à explorer d'autres voies.

Le *Traité de la Roulette* est un traité du cercle, très nouveau, très articulé, un joyau du cercle traduisant (peut-être) les préoccupations mystiques de son auteur. On ne peut s'empêcher de penser aux systèmes du monde à la fin du moyen-âge, il y avait des dizaines de cercles en tous genres au moment où tout a basculé.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Chapitre V

Divisions égales

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Résumé du Chapitre V

Les « petites portions » par lesquelles il faut multiplier les éléments géométriques que l'on somme naissent toujours chez Pascal de divisions *égales* (en nombre indéfini).

Lorsque deux lignes sont ainsi découpées, Pascal exige même que les divisions égales de la première soient égales aux divisions égales de la deuxième ("double égalité").

Il y a peu de nécessité strictement mathématique à toutes ces égalités. La double égalité est même étrangement illogique. Le sens est à chercher ailleurs et on le trouvera dans une multitude de sens.

Il y a un sens formel indéniable — expliqué à de nombreuses reprises par Pascal — au découpage d'*une* ligne en petites portions égales. C'est celui d'indiquer la "variable d'intégration". Mais Pascal tient trop aux divisions égales pour que ce soit la seule raison.

Le calcul de la somme des sinus se révèle être plutôt un *non-calcul*. Au lieu de fabriquer des sommes algébriques calculables, comme cela s'est toujours fait, la régularité des divisions ne sert à rien! Tout se passe comme si Pascal était prisonnier des méthodes anciennes au moment où il donne, dans les avertissements, ce qu'il faut pour s'en passer. Un deuxième sens est le souvenir.

En toute logique l'égalité des divisions est une condition trop forte pour les sommes simples — il suffirait que le "pas" tende vers 0 —. En revanche, elles sont indispensables au concept même de somme triangulaire (ou pyramidale). Car la valeur de ces sommes multiples dépend de la loi de subdivision et plus seulement du pas. Le sens le plus *logique* des divisions égales est à chercher dans ces sommes triangulaires.

Cette formulation de l'intégrale double n'est pas assez invariante ; c'est pourquoi elle n'a pas résisté, on ne trouvera pas trace des sommes triangulaires ou pyramidales dans le Nouveau Calcul.

Quant à la double égalité, il est difficile, nous semble-t-il, d'y voir autre chose qu'un souvenir, coupé de son substrat, des paradoxes de la méthode des indivisibles. La pléthore d'égalité n'est plus qu'une conduite magique. Le sens, enfoui, est d'éloigner les paradoxes en restituant des épaisseurs égales d'une figure à l'autre. Comme chez Pascal il n'y a jamais qu'une figure, la logique mathématique s'est évanouie, laissant place à un vestige étrange. Le sens est dans la logique psychologique, celle du souvenir transformé.

Le *Traité* est écrit à une époque charnière. La présence insistante des divisions égales révèle ce qu'elles étaient vraiment pour les sommes simples : une confusion des nécessités du calcul avec celles de la logique. Tel est après coup le sens des avertissements.

Nécessité formelle trop forte pour les besoins de la démonstration, nécessité conceptuelle dans des sommes triangulaires sans avenir, nécessité de calcul en train de disparaître, les divisions égales rattachent Pascal au passé alors qu'il en sort avec les avertissements. Leur polysémie révèle l'instabilité du calcul intégral de ces années 1660.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

CHAPITRE V - DIVISIONS ÉGALES

On l'a remarqué, les seuls infinitésimaux que considère Pascal sont ceux qui sont produits par des divisions égales. Cette égalité est-elle nécessaire, quand et pourquoi ? C'est ce que nous nous proposons de voir maintenant, en distinguant soigneusement le cas des sommes simples d'avec celui des sommes triangulaires ou pyramidales. Le calcul de sommes simples précède Pascal de plus de 20 siècles, en revanche le calcul reposant sur des sommes triangulaires est du XVII^{e} siècle, il n'a ni passé ni avenir.

I - Multiplicité des significations revêtues par l'égalité des divisions dans le *Traité de Roulette*

1 - Les divisions régulières dans l'histoire du calcul intégral avant Pascal. Rupture produite par le contenu des avertissements dans cette histoire. La somme des sinus est un non-calcul

Dans ce paragraphe nous ne parlons que des sommes simples. Pascal ne conçoit pas d'intégrer autrement qu'à l'aide de divisions égales. Celles-ci ont lieu sur la base, sur l'axe, ou sur la courbe. Mais, à la différence de ce qui se passe avec ses prédécesseurs, cette régularité du découpage n'est pas chargée de produire des sommes calculables.

Modes de calculs antérieurs. "Régularité".

Archimède, pour le calcul de la première révolution de spirale, divise l'angle correspondant, 2π, en n parties *égales* ; le calcul de la somme des aires des petits secteurs de spirale se ramène alors algébriquement à la connaissance de la somme

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$ [1]

l'égalité des divisions a une fonction calculatoire.

1 - B. Bettinelli *Le trésor d'Archimède*.

Le même Archimède quarre le segment de parabole en divisant la sécante successivement en 2, 4, 8, … parties *égales*. La loi de subdivision ramène encore la quadrature à la connaissance d'une somme algébrique, à savoir

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}$$ [2]

Thabit-Ibn-Qurra (IX[e] siècle) pour sa quadrature de la parabole $y^2 = x$ subdivise l'intervalle $[0 ; a]$ en n parties qui, quoique inégales, obéissent à une loi. Les abscisses des points de subdivision sont proportionnelles à la suite des carrés des entiers. La loi, ingénieusement adaptée à la forme de la courbe, ramène le calcul de la quadrature à la connaissance de la somme des carrés des nombres impairs

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2$$ [3]

Grégoire de Saint Vincent démontre que «Si les abscisses d'une hyperbole équilatère croissent en *progression géométrique*, les aires des surfaces découpées entre l'hyperbole et son asymptote par les lignes ordonnées correspondantes croissent en progression arithmétique» [4]

Quant à Wallis, ce qui justifie *a posteriori* les calculs de l'*Arithmetica infinitorum*, c'est bien que la ligne d'intégration est subdivisée en parties *égales*, c'est pour cela que la connaissance du rapport

$$\frac{0^p + 1^p + 2^p + 3^p + \ldots n^p}{n + n + n + n \ldots + n}$$

permet la quadrature de la parabole généralisée $y = x^p$. [5]

Au delà de la diversité des lois de découpage et des endroits où il se fait, il y a deux faits permanents : les découpages ont toujours lieu selon une loi, et ces découpages sont chargés, par leur forme, du calcul. Appelons "régularité" le fait qu'il y ait une loi sur le découpage, quelle que soit sa forme. L'égalité des subdivisions n'est qu'un cas particulier de la régularité.

Ces exemples ne sont pas isolés, il semble que pour les calculs antérieurs à celui de la *Somme des sinus* chez Pascal, le modèle soit toujours

2 - Ibidem.
3 - M. Hallez et M. F. Jozeau in *La figure et l'espace.*
4 - J. P. le Goff in *La démonstration mathématique dans l'histoire.*
J. Dhombres in *Histoire d'infini.*
5 - Anne Chevalier in *Histoire d'infini.*

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

celui-là [6] . C'est cette régularité qui joue le rôle qui sera bientôt dévolu à la primitive : calculer. Pour le dire avec des termes ultérieurs, avant la méthode "algorithme du calcul intégral", c'était la méthode "somme de Riemann", avec divisions égales, qui régnait.

Que se passe-t-il chez Pascal ? A quoi sert l'égalité des divisions sur le cercle dans le calcul-clé qu'est celui de la somme des sinus ? [7]

La somme des sinus. Il n'y a aucun calcul. Rôle des avertissements. Pascal reste en deçà de ses propres idées.

Dans le *Traité de la Roulette*, nous n'avons relevé un rôle calculatoire explicite aux divisions égales que dans la proposition IX [8] (Pascal considère le calcul comme connu). Ailleurs l'égalité des divisions ne sert *jamais* à fabriquer des sommes algébriquement calculables (nous parlons des sommes simples).

C'est que Pascal a pris la peine d'exprimer clairement dans deux de ses avertissements d'une manière intuitive et magnifiquement juste ce qui permet de se passer de la régularité.

Ne différer que d'une quantité moindre qu'aucune donnée

> *Chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD (...) encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude est indéfinie (...)*[9]

Voilà les expressions-clés qui permettent à Pascal de sortir *dans les faits* le calcul intégral des progressions arithmétiques et géométriques, en un mot de la *régularité*. Le calcul de la somme des sinus ne se fait pas par l'intermédiaire d'une expression algébrique, il n'est pas dans la tradition d'Archimède. Ni dans celle de Cavalieri. Il est une absence de calcul. Il joue sur un autre registre, celui du triangle caractéristique.

---

6 - Les résultats obtenus par la méthode des indivisibles n'infirment pas ces propos ; une grandeur est égalée à une autre, laquelle a été calculée via des divisions régulières. Nous verrons plus loin qu'une autre régularité est présente, dite ou non dite, pour légitimer la méthode.

7 - Voir le chapitre II *Un Traité très technique* §1.

8 - La démonstration contient cette phrase : «puisque tous les arcs ensemble BD sont égaux à la moitié de l'arc entier BP parce qu'il est divisé en parties égales»

Comme il s'agit du calcul de $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$ $\left(= \frac{n^2}{2}\right.$ pour n indéfini$\left.\right)$

la régularité de la subdivision est effectivement prise en compte.

9 - Pour le texte entier voir le *Traité des sinus* ; cité dans le chapitre II *Un Traité très technique* § 1.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

La rupture présente dans les avertissements est très importante puisque la forme particulière de la courbe n'intervient plus ; une méthode générale est amorcée : pour que la somme de toutes les touchantes EE ne diffère de l'arc entier BP *que d'une quantité moindre qu'aucune donnée*[10] il n'est plus du tout nécessaire que les DD soient égales, seul compte le fait que toutes ces DD ne diffèrent de 0 *que d'une quantité moindre qu'aucune donnée*, seul compte le "pas", peu importe la régularité, peu importe la forme de la courbe…

Dès lors, le découpage en un nombre indéfini de parties *égales* n'a plus vraiment de sens, la requête de Pascal est beaucoup trop forte pour ce dont il aurait réellement besoin. Pascal est prisonnier d'une nécessité qui a cessé d'en être une, puisqu'il donne d'autres moyens de découverte.

La suite atténuera cette assertion. Il arrive dans l'œuvre de Pascal ce qui arrive souvent : quelque chose qui apparaît dépourvu de sens a en réalité son sens ailleurs.

2 - *Les divisions égales et les sommes triangulaires. Le concept de somme triangulaire continue requièrt l'égalité des divisions*

Les avertissements donnent un moyen de se passer des divisions égales dans les sommes simples. Le problème des sommes triangulaires est plus compliqué.

La *Méthode générale*[11] pour résoudre tous les problèmes de roulette, méthode dont Pascal est très fier, repose sur un concept, celui de somme triangulaire. Née du cas discret, la somme triangulaire ne se formule dans ce cadre qu'avec des divisions égales. Le passage au continu change un peu les choses, car une somme triangulaire s'égale à une somme simple, pour laquelle l'égalité des divisions n'est pas une nécessité logique.

Les deux formulations ; elles ne sont pas équivalentes quoi qu'en dise Pascal

Pascal remplace constamment, dans la formulation de ses théorèmes, une « somme triangulaire » par une autre «somme», simple celle-là, en séparant les deux formulations par «ou, ce qui est la même chose» ; par exemple

10 - Cf. la note précédente
11 - La *Méthode générale* des centres de gravité est la formule actuelle de l'abscisse du centre de gravité. Pascal a créé les sommes triangulaires pour la formuler. Voir le chapitre I *Les sommes chez Pascal* § 2.

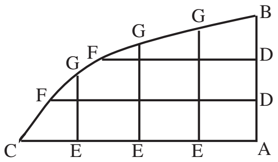
Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Je dis que la somme des solides de tous les EG carré en EA est égale à la somme des solides de tous les DF carré en DA.

Ou, ce qui est la même chose[12] :

Je dis que la somme triangulaire de tous les EG carré est égale à la somme triangulaire de tous les DF carré, en commençant du côté de A.

Du point de vue des divisions égales, *cela n'est pas la même chose* : nous verrons plus bas que, pour parler de somme triangulaire, il faut que les divisions soient égales, mais nous savons bien que, pour la traduction en somme simple, cette condition est superflue.



Les EE sont des divisions égales, ainsi que les DD.

«Somme des EG^2 en EA » est une abréviation pour «Somme des EG^2 EA EE» **La valeur ne change pas si les EE ne sont pas égales.**

«Somme triangulaire des EG^2 » est une abréviation pour «Somme triangulaire des EG^2 EE^2 » **La valeur change si les EE ne sont pas égales.**

Nous remarquons que la première somme se laisse écrire dans le formalisme Leibnizien : c'est $\int xy^2\,dx$. Mais la somme triangulaire n'y a pas d'équivalent direct. Une pensée parallèle nous fait constamment traduire l'ouvrage de Pascal en langage leibnizien, c'est elle qui sert de guide dans ce lourd enchevêtrement géométrique ; c'est elle aussi qui nous fait dire immédiatement que les divisions égales sont une condition superflue dans les hypothèse du théorème.

la somme des solides de tous les EG carré en EA est égale à la somme des solides de tous les DF carré en DA

en effet nous traduisons immédiatement

$$\int x\,y^2\,dx = \int y\,x^2\,dy$$

et les dx, dy ne sont pas les ultimes résidus de divisions égales...

12 - Souligné par nous.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Le calcul leibnizien rend caduques à la fois les hypothèses et les concepts qui s'y rattachent. Qui d'entre nous a entendu parler de somme triangulaire à propos de calcul intégral ?

Si l'on veut faire effectivement les calculs de la roulette (contrairement à Pascal qui n'en fait pas un seul jusqu'au bout) on s'aperçoit que les divisions égales sont parfois essentielles au calcul, sinon à la formulation finale. Par exemple, au chapitre III, *Un calcul à la manière de Pascal*, nous avons dû calculer $\sum_{\text{triangF}} \widehat{CM}\, zz^2$ et nous avons dû utiliser pour cela l'expression arithmétique $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, conséquence directe de l'égalité des divisions. Dans le cas des sommes triangulaires, on est dans une problématique de type archimédien.

Quel que soit l'énoncé où figurent les mots «somme triangulaire», il y en a un autre où l'on peut s'en passer, cela est visible pour un lecteur averti du formalisme leibnizien.

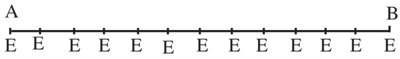
En revanche les divisions égales jouent un rôle effectif dans le calcul lorsque celui-ci fait intervenir des sommes triangulaires, comme elles le faisaient auparavant dans le calcul des sommes simples. Ce simple fait justifierait que Pascal les requière. Mais ne seraient-elles pas plus profondément nécessaires ? La réponse est oui, c'est en fait le seul moment où les divisions égales sont justifiées dans le Traité.

Appuyons ce propos en montrant que, comme nous l'avons affirmé ci-dessus, la somme triangulaire *change* si les EE sont les ultimes résidus de divisions *inégales.*

Il suffira du contre-exemple que voici : la même barre AB est divisée en un nombre indéfini de divisions égales aux points E et en le “même nombre indéfini” de parties inégales aux points E de manière qu'un segment [E E] sur deux soit le double de l'autre.

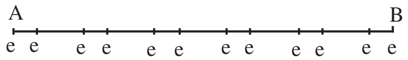
On peut considérer que la limite est atteinte avec 1000 points de subdivision. Prenons donc 1000 pour fixer les idées.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4



Il y a 1000 points E

Les EE sont égaux



Il y a 1000 points e
Un ee sur deux est double de l'autre
Appelons ee les petits, les grands seront alors 2 ee

Entre ee et EE (du dessin de gauche) il y a la relation $ee = \frac{2}{3} EE$

A l'intérieur du signe $\sum_{triang2} ee^2$, ee continuera à désigner aussi bien les petits ee que les grands. Cet abus de langage disparaîtra lorsque nous étalerons la somme, plus bas.

Soient $\sum_{triang1} EE^2$ la somme triangulaire des EE^2 correspondant aux 1000 divisions égales représentées sur le schéma de gauche, et $\sum_{triang2} ee^2$ la somme triangulaire des ee^2 correspondant au même nombre 1000 de divisions inégales représentées sur le schéma de droite.

La première somme triangulaire $\sum_{triang1} EE^2$ est la somme des sommes

$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$
	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$
		$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$
			$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$
				$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$
					$EE^2 +$	$EE^2 +$	$EE^2 +$
						etc…	

Le triangle a 1000 lignes et 1000 colonnes.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

La deuxième somme triangulaire $\sum\limits_{\text{triang2}} ee^2$ est la somme des sommes

$ee^2 +$	$4ee^2 +$	$ee^2 +$	$4ee^2 +$	$ee^2 +$	$4ee^2 +$	$ee^2 +$	$4ee^2 +$
	$4ee^2 +$	$ee^2 +$	$4ee^2 +$	$ee^2 +$	$4ee^2 +$	$ee^2 +$	$4ee^2 +$
		$ee^2 +$	$4ee^2 +$	$ee^2 +$	$4ee^2 +$	$ee^2 +$	$4ee^2 +$
			$4ee^2 +$	$ee^2 +$	$4ee^2 +$	$ee^2 +$	$4ee^2 +$
				$ee^2 +$	$4ee^2 +$	$ee^2 +$	$4ee^2 +$
					$4ee^2 +$	$ee^2 +$	$4ee^2 +$
						etc…	

Le triangle a 1000 lignes et 1000 colonnes.

A cause de la deuxième somme triangulaire, regroupons les termes deux par deux dans les deux sommes triangulaires (pour n'avoir que des termes égaux). Il apparaît chaque fois deux triangles identiques de 500 lignes et 500 colonnes, en prenant une ligne sur deux. Ce sont

Pour la première somme

$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$
	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$
		$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$
			$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$
				$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$
					$2EE^2 +$	$2EE^2 +$	$2EE^2 +$
						etc…	

Pour la deuxième somme

$5\ ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$
	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$
		$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$
			$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$
				$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$
					$5ee^2 +$	$5ee^2 +$	$5ee^2 +$
						etc…	

(à très peu près, du genre 1 000 ee^2).

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Ces sommes triangulaires ne peuvent être égales : il faudrait pour cela que

$$5\ ee^2 = 2\ EE^2$$

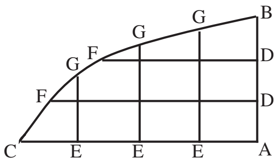
Or

$$ee = \frac{2}{3} EE$$

Contrairement à ce qui se passe pour les sommes simples, la valeur de la somme triangulaire dépend de la forme de la subdivision et pas seulement de son “pas”. Donc, si l’on veut une valeur univoque en accord avec la loi du levier, le seul moyen est d’imposer l’égalité des divisions dans la définition.

Et pour reprendre l’exemple donné plus haut, lorsque l’on écrit

$$\sum EG^2\ AE\ EE = \sum_{\text{triang}A} EG^2\ EE^2$$



* La somme (simple) écrite à gauche ne requièrt pas l’égalité des divisions EE

* La somme (triangulaire) écrite à droite requièrt l’égalité des divisions EE

* Le signe = n’est juste que si les divisions sont égales

Quant à leurs conditions de validité les deux formulations ne sont pas équivalentes

Résumé des paragraphes 1 et 2. Pourquoi les sommes triangulaires ont disparu.

– Les divisions égales ne sont pas nécessaires au *concept* de somme simple en revanche elles le sont au *calcul* tant qu’on ne peut pas mettre en oeuvre l’algorithme de la primitive. Ce dernier est bien présent dans la Proposition I, quoique Pascal ne le dégage pas. Triangle caractéristique et notion intuitive de limite se conjuguent pour introduire de nouvelles façons de penser. Ainsi le calcul (le non-calcul) de la somme des sinus rompt avec une inféodation aux divisions régulières. En ce sens le contenu des avertissements est un moment important dans l’histoire du calcul intégral.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

– En revanche les divisions égales sont nécessaires au *concept* de somme triangulaire, il ne suffit plus que le pas tende vers zéro pour assurer une valeur univoque.

– Une somme triangulaire continue est toujours égale à une somme simple chez Pascal[13], mais il arrive que la somme triangulaire soit plus facile à calculer dans le mode pascalien, car à nouveau surgit la régularité si pratique, en l'absence de mieux ; tout se passe comme si ce concept de somme triangulaire, éphémère comme on le sait, n'était qu'un « concept-calcul » il n'est là que pour permettre le calcul, et c'est précisément pour cela qu'il aura une durée de vie très brève. Après Leibniz et Newton, le calcul de la somme simple égale à la somme triangulaire étant automatisé, cette dernière disparaît sans laisser de trace. Le nouveau calcul rejette les sommes triangulaires et les divisions égales avec elles, mais ce n'est pas à dire que tout cela n'ait eu son rôle, en son temps.

– Pascal a transféré aux sommes triangulaires ce dont il avait donné le moyen de se passer dans les sommes simples : la nécessité des divisions égales. Cette nécessité n'est pas de même nature dans les deux cas, elle est plus forte dans le cas des sommes triangulaires car nécessaire à leur formulation même.

– Le *Traité de la Roulette* est un moment isolé dans l'histoire du calcul intégral, un heureux moment où un concept semi-général a fonctionné pour un problème particulier / général auquel il est parfaitement adapté.

3 - Les raisons pour lesquelles Pascal a été obligé à la fin du Traité des trilignes de reformuler les sommes triangulaires en sommes simples

Supposons l'axe d'un triligne divisé en un nombre indéfini de parties égales ZZ donnant naissance aux ordonnées MZ (fig. 1). Alors les sommes, simples ou triangulaires, d'ordonnées ou de carrés d'ordonnées, expriment une aire plane, un volume de révolution, des positions de centre de gravité...

Si le triligne est divisé en un nombre indéfini de parties égales YY sur sa partie courbe, d'où sont issus les sinus YZ (fig. 2), la somme des sinus est à 2π près la surface extérieure d'un volume. Mais il y a un problème pour formuler le bras sur l'axe de cette surface en terme de somme triangulaire, et même un interdit relativement aux conventions pascaliennes.

13 - Précisément parce que les divisions sont égales : il suffit, pour s'en convaincre, d'essayer de mettre la somme triangulaire n°2 ci- dessus sous forme d'une somme simple !

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

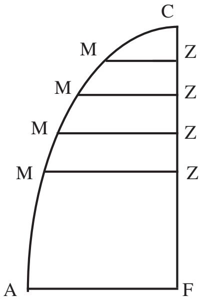


Figure 1

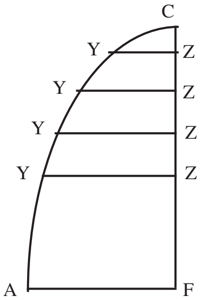


Figure 2

Les ZZ sont égales :

les MZ sont des ordonnées.

La somme des MZ (Σ MZ ZZ) calcule l'aire plane ACF.

La somme triangulaire des MZ calcule le bras sur la base de cette aire plane.

La somme des MZ^2 calcule le volume autour de l'axe.

La somme triangulaire des MZ^2 calcule le bras sur la base de ce volume.

Les YY sont égales :

les YZ sont des sinus.

La somme des YZ (Σ YZ YY) calcule l'aire courbe du volume autour de l'axe.

CF n'est pas une balance, car les ZZ sont inégales.

Comment exprimer le bras sur la base de cette aire ?

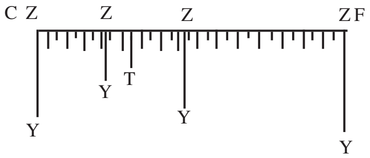
sûrement pas par une somme triangulaire !

En effet, pour pouvoir employer le formalisme des sommes triangulaires, il est indispensable (voir le paragraphe précédent) que les "poids" que sont les éléments de surface 2π ZY YY pendent en des divisions régulièrement espacées ZZ ; mais si les ZZ sont égales les YY ne peuvent plus l'être! Il y aurait un moyen de s'en sortir, ce serait de revenir à la fig.1 et d'écrire que le bras sur la base est donné par la somme triangulaire des MZ MM ZZ ; cette solution n'est pas envisageable par Pascal : il ne peut pas écrire des sommes où les infinitésimaux sous-entendus ne soient pas les ultimes résidus de divisions égales, il est sourd au fait que l'on peut renoncer à l'égalité des YY (en faire des MM) sans altérer la justesse du raisonnement. Il met sur le même plan la nécéssaire égalité des ZZ et l'égalité des YY aisément remplaçable par une condition moins forte (Les ZZ égales et en nombre indéfini, par exemple...).

Pascal se sort de la difficulté par un raisonnement aussi intuitif que profondément rigoureux ; raisonnement qui va l'amener à remplacer la somme triangulaire qu'il ne peut pas écrire par une somme simple où les

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

éléments infinitésimaux sont les YY “égaux”. Pour cela il décrit une balance générale FC “divisée en parties égales ou inégales aux points Z” où pendraient des poids ZY. La balance est subdivisée de nouveau en divisions égales assez fines pour tomber presque aux points Z.



Même si ceux-ci ne sont jamais atteints exactement on peut toujours resubdiviser plus finement de façon que l’erreur soit moindre qu’aucune quantité donnée, voilà en substance ce que dit Pascal. Puis il suffit d’imaginer que des poids nuls sont accrochés aux points de la subdivision qui ne sont pas des Z, ceux-là gardant bien sûr leurs poids ZY du début. La somme triangulaire des poids, prise à partir de F est alors de manière évidente égale à la somme simple des FZ ZY. Le raisonnement de Pascal est discret jusque là, c’est pourquoi le choix d’appeler ZY les poids n’est pas très heureux. En réalité, Pascal a démontré que dans l’expression en discret de sa méthode générale on peut remplacer la somme triangulaire par la somme des poids multipliés chacun par la distance à l’origine[14]. Ces raffinements de subdivisons visent seulement à faire disparaître les problèmes liés à l’incommensurabilité des distances FZ. Si nous revenons au problème du début, continu, ce sont les poids 2π ZY YY qu’il faut accrocher en les points Z irrégulièrement espacés. En définitive Pascal a montré la formule

$$2\pi\, \Sigma \ FZ \quad ZY\, YY = \text{Bras sur la base x Poids total}$$

le poids total étant, bien entendu, la surface courbe. La somme est cette fois admissible dans la logique pascalienne puisque les YY sont égales.

Une fois de plus le tribut payé aux divisions égales est lourd.

4 - Les divisions égales comme indicateur de “variable d’intégration”

Revenons aux sommes simples, dans lesquelles les divisions égales ont perdu leur fonction calculatoire d’antan. Ces divisions égales acquièrent chez Pascal une autre signification pour laquelle elles sont trop riches. Cette signification est clairement exposée dans l’avertissement qui traite de la méthode des indivisibles[15].

14 - Ou si l’on préfère, il a démontré notre formule actuelle de l’abscisse du centre de gravité, qui comme chacun sait n’utilise pas le formalisme contraignant des sommes triangulaires.

15 - *Lettre à Carcavi,* p. 233. D’autres passages de cet avertissement sont cités dans le chapitre I.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

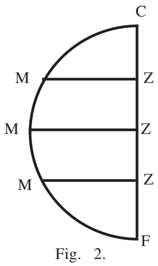


Fig. 2.

De sorte que quand on parle de la somme d'une multitude indéfinie de lignes[16], *on a toujours égard à une certaine droite, par les portions égales et indéfinies de laquelle elles soient multipliées. Mais quand on n'exprime point cette droite (par les portions égales de laquelle on entend qu'elles soient multipliées), il faut sous-entendre que c'est celle des divisions de laquelle elles sont nées, comme en l'exemple de la figure 2, où, les ordonnées ZM du demi-cercle étant nées des divisions égales du diamètre, lorsqu'on dit simplement* la somme des lignes ZM, *sans exprimer quelle est la droite par les portions de laquelle on les veut multiplier, on doit entendre que c'est le diamètre même, parce que c'est le naturel : si on les voulait multiplier par les portions d'une ligne, il le faudrait alors exprimer.*

Il faut entendre la même chose quand toutes les lignes seraient courbes, tant celles dont on considère la somme que celles par les portions de laquelle on les multiplie : ou quand les unes sont droites et les autres courbes, comme, par exemple en la figure 2, si l'on dit simplement ainsi, la somme de tous les arcs CM , *compris entre le point C et chacune des ordonnées, on doit entendre la somme des rectangles compris de chacun de ces arcs CM, étendus en ligne droite, et de chacune des petites portions égales du diamètre ZZ , ZZ , etc.*

Ainsi en la figure 4, où l'arc de 90° BC est divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points D, d'où sont menés les sinus droits DE, si on dit simplement ainsi, la somme des sinus DE, on entendra par là la somme des rectangles compris de chaque sinus DE et de chacun des petits arcs égaux DD (considérés comme étendus en ligne droite) ; parce que ces sinus sont nés de divisions égales de l'arc. (...)

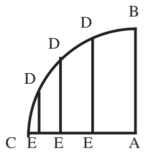


Fig. 4.

16 - C'est Pascal qui souligne, de même que plusieurs fois ci-dessous.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Pascal ne conçoit pas d'intégrer autrement que par rapport à des divisions égales ; dès lors l'observation de la figure ("où sont les divisions égales ?") permet

– de lire automatiquement la "variable d'intégration"

– et, par conséquent, de la sous-entendre dans les énoncés : pour voir si Σ DE signifie Σ DE DD ou Σ DE EE , il suffit de savoir si ce sont les DD ou les EE qui sont égales.

Le signifiant devient largement arbitraire : regarder de quelles divisions égales naissent les grandeurs indique comme un panneau routier par quel infinitésimal (les EE sont en nombre indéfini) il faudra multiplier chaque ligne. L'obligation à respecter est très forte, suffisamment pour obliger Pascal à d'acrobatiques re-subdivisions après la destruction de l'égalité par un changement de variable ou un passage des ordonnées aux contre-ordonnées.

Cependant, de même que le panneau routier n'est pas tout à fait sans rapport avec ce qu'il désigne, l'égalité des divisions n'est pas entièrement arbitraire dans ce cas ; puisque les deux conditions ensemble «la multitude des divisions devient indéfinie» et «les divisions sont égales» impliquent que chaque division devient arbitrairement petite... Pascal n'en fait jamais la remarque. Il y a une déperdition de contenu dont il ne parle pas.

Dans la proposition II du *Traité des sinus,* Pascal finit par égaler une aire à une somme écrite à l'aide de divisions inégales[17], montrant par là, mais sans le dire, que la condition suffisante n'est pas nécessaire ; Il ne semble pas qu'il y ait d'autre endroit où Pascal prenne une telle liberté vis-à-vis de ce qui apparaît être une très forte contrainte pour sa pensée. Il semble aussi que Pascal ne se soit pas clairement formulé à lui-même en termes de divisions *inégales* ce qu'il venait de démontrer.

A l'appui de cette dernière assertion citons cet étonnant passage qui clôt le sixième traité dit *Petit traité des solides circulaires*

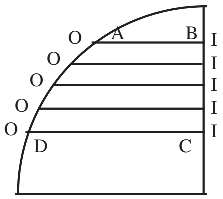
> *Toutes ces choses viennent de ce que les droites OI sont des ordonnées, c'est à dire qu'elles sont également distantes, et partent des divisions égales et indéfinies du diamètre ; ce qui fait que la simple somme des ordonnées est la même chose que l'espace compris entre les extrêmes.*

17 - Voir chapitre I, *Un Traité très technique*, paragraphe 1. C'est le puissant argument "weierstrassien" de l'avertissement qui est mis en oeuvre.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

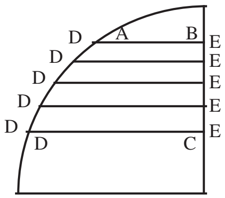
Jusque là, rien d'extraordinaire, l'égalité des divisions est simplement une hypothèse trop forte pour la conclusion ; poursuivons la lecture

> *Mais cela ne serait pas véritable des sinus, parce que les distances d'entre les voisins ne sont pas égales entre elles et qu'ainsi la somme des sinus n'est pas égale à l'espace compris entre les extrêmes ; à quoi il ne faut pas se méprendre.*



Les OI sont des ordonnées (II égales, et donc OO inégales)

La somme Σ OI II est bien l'aire ABCD



Les DE sont des sinus (DD égales, donc EE inégales)

L'inégalité des EE serait responsable du fait que

Σ DE EE ≠ Aire ABCD !

Ainsi pour Pascal ce n'est pas le fait que les DD sont obliques qui empêche la somme des sinus d'être égale à l'aire (l'espace) ! Il y a glissement, les DD ne contreviennent pas par leur situation géométrique (ils sont non-perpendiculaires), mais parce que leurs projections sont inégales (*les **distances** d'entre les sinus voisins ne sont pas égales entre elles*) ! Par le mot **distance Pascal** ramène à juste titre la perpendicularité – indispensable au calcul d'aire plane – sur le devant de la scène, mais il redonne immédiatement après la parole à l'égalité (les sinus ne sont pas équidistants) ; faisant ainsi porter à une inégalité de distances un défaut qui appartient à une erreur dans le choix de la variable d'intégration.

Nous sommes loin, dans cet exemple précis, de la rigueur dont fait preuve Pascal dans l'avertissement ci-dessus où le rôle des divisions égales est presque purement nominal : indiquer par rapport à quelle ligne on intègre, donner le nom de la variable d'intégration. Nous sommes loin aussi de la rigueur dont Pascal fait preuve pour démontrer la proposition II[18] ; il est vrai que c'est sa méthode $\alpha - \varepsilon$ intuitive qui lui a permis de s'en sortir alors que le passage des sinus aux ordonnées avait détruit l'égalité des divisions.

18 - *Un Traité très technique* § 1

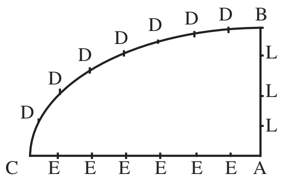
Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Dans cette fin du *Petit Traité des solides circulaires*, il y a comme un curieux non-sens : l'aire d'un trapèze infinitésimal ne peut être confondue avec le produit de la base par le petit côté oblique ; ceci est indépendant de la manière dont est obtenu l'ensemble des trapèzes, aucune égalité de subdivision n'a rien à voir là dedans.

5 - Hypothèse sur l'origine de la double égalité. Conduites magiques lisibles dans les pléthores de divisions égales

A plusieurs reprises dans le *Traité de la roulette*, Pascal exige que deux (ou même trois) séries de divisions égales (effectuées sur deux (ou trois) lignes différentes) soient de plus formées de divisions égales entre elles d'une série à l'autre, donnant lieu à une "mutiplication d'égalité" . Appelons de telles paires de divisions égales "divisions doublement égales". Voici trois de ces étonnants passages

– Dans la définition que donne Pascal à la page 240 de la Lettre à Carcavi les EE sont égales entre elles ainsi que les LL, et les DD. Pascal exige de plus EE = LL = DD.



Soit un triligne rectangle ABC, composé des deux droites AB, AC, dont celle qu'on voudra, comme AB, sera l'axe et l'autre la base, faisant angle droit et de la courbe quelconque BC. Soient divisées en un nombre indéfini de parties égales tant AB aux points L que AC aux points E, et encore la courbe même BC aux points D. ***Et que chacune des parties de AB soit égale à chacune des parties de AC, et encore à chacune des parties de la courbe BC****.*

– Dans l'Avertissement qui commence au bas de la même page, Pascal insiste

On suppose ici toujours que le triligne est une figure plane, et que la courbe est de telle sorte que tant les sinus que les ordonnées ne la rencontrent qu'en un point. Et les portions de l'axe, de la base et de la courbe sont toutes égales ***tant entre elles que les unes aux autres***[19].

19 - Souligné par nous, de même que plus bas.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

– Cette définiton reste abstraite en tant que telle, plus étonnant est le passage ci-dessous qui concerne la démonstration du *Lemme général* (celui qui engendre les formules d'intégration par parties) laquelle repose sur le calcul du volume d'un même solide par deux découpages – via des plans parallèles et équidistants – différents[20]. Pascal exige les deux équidistances *et* l'égalité des équidistances entre elles. Il est étonnant que Pascal ait pu penser que les deux calculs du même volume étaient liés en tant que calculs !

> *Or il est visible que les sommes de sections faites par chacun de ces ordres de plans sont égales chacune au solide, et par conséquent entre elles (**puisque** les portions indéfinies AE, EE, etc. de la base sont égales **tant entre elles qu'aux portions égales et indéfinies AD, DD** etc, de l'axe)*

Le «puisque» prouve que la condition EE = DD est très importante pour Pascal. Pourtant cette condition est complètement indépendante de ce qu'elle prétend inférer.

Comment Pascal a-t-il pu penser qu'il fallait cette profusion d'égalités dans les subdivisions pour conclure que le volume était égal à lui-même !

Il y a là un paralogisme sans conséquence. Pourtant chez un esprit aussi logique, aussi critique que Pascal, ce deuxième non-sens pose sérieusement question. Nous choisissons de la formuler ainsi :

Comme ces divisions doublement égales sont irréelles mathématiquement, elles doivent avoir leur sens ailleurs. Quel est cet ailleurs qui n'est pas de nécessité logique ?

Serait-ce que d'autres endroits du *Traité* où les divisions égales sont utiles déteignent sur ces passages par une contagion involontaire ? Nous avons relevé deux passages et deux seulement qui vont dans ce sens, encore le premier n'est-il pas très probant

– Celui de la lettre à Carcavi dans lequel Pascal nous dit que le centre de gravité est tel que les sommes triangulaires de part et d'autre sont égales[21]. Il est nécessaire que les divisions soient égales entre elles à droite, égales entre elles à gauche et que les divisions égales de droite soient égales aux divisions égales de gauche.
– Celui qui concerne la "figure rectifiante". Les divisions égales sont transférées "en l'état" d'une ligne courbe à une ligne droite. Le fait que le transfert soit isométrique est essentiel au propos de Pascal :

20 - Se reporter au § 4 du chapitre II *Un Traité très technique*.
21 - Voir la note précédente.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

la double égalité a sa place ici[22]. Remarquons que, dans ce cas, il ne s'agit pas, comme dans le cas du *Lemme général*, de faire le calcul d'un même élément géométrique deux fois, mais de transformer un résultat déjà connu en un autre, c'est très différent.

Cette remarque, alliée à un passage de Pascal concernant Wallis (ci-dessous), nous met sur une piste. En effet, il y a un lieu où l'on rencontre des divisions doublement égales de façon complètement naturelle et obligatoire, c'est celui du calcul par la méthode des indivisibles avec épaisseurs restituées. Souvenons nous par ailleurs que Pascal a résolu des problèmes très difficiles par des techniques sautant à pieds joints sur l'algorithme du calcul intégral encore inconnu (pas pour longtemps). Il est seul à avoir déployé cette inventivité et à être parvenu à la résolution juste. Les solutions aux problèmes nouveaux des participants au concours sont toutes fausses. Celles du mathématicien anglais Wallis, par exemple

> *On jugea aussi que ses erreurs n'étaient point de calcul, mais de méthode et proprement des paralogismes : parce que les calculs qu'il donne sont très conformes à ses méthodes, mais que ces méthodes mêmes sont fausses . Et on remarqua qu'une de ses erreurs les plus considérables consiste de ce qu'il raisonne de certaines surfaces indéfinies en nombre,* ***et qui ne sont pas également distantes entre elles comme si elles l'étaient*** *; (...) il n'en trouve que de fausses mesures, ses méthodes n'allant point aux véritables.*

Seulement le fait, à lui tout seul, qu'elles ne soient pas équidistantes ne peut suffire à produire des résultats faux (on le sait aujourd'hui et Pascal le sent). Alors ? Continuons

> *C'est ce qui le mène à* ***comparer****,* ***comme nombre à nombre*** *des quantités qui sont entre elles comme des arcs de cercle au diamètre, (...)*[23]

Sans être à même de rentrer dans le détail[24], «comparer comme nombre à nombre» évoque très fortement la première méthode des indivisibles : pas celle de Pascal, celle de Cavalieri, celle des comparaisons ligne à ligne pour calculer une surface à partir d'une autre, connue ; la comparaison a lieu ligne

22 - Idem
23 - **Récit de l'examen et du jugement. Des écrits envoyés pour les prix proposés publiquement sur le sujet de la roulette où l'on voit que ces prix n'ont point été gagnés, parce que personne n'a donné la veritale solution des problèmes**. Edition de la Pléiade P. 208
24 - Nous n'avons pas le texte de Wallis.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

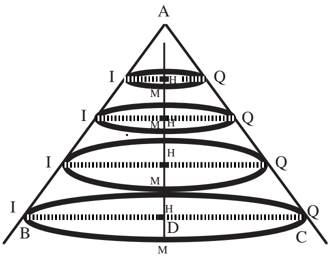
Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

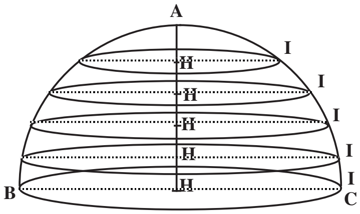
à ligne comme nombre à nombre et le rapport constant des nombres se retrouve dans le rapport des surfaces. Or nous savons que c'est cette méthode des indivisibles de Cavalieri qui engendre des paradoxes, contrairement à celle de Pascal. En effet une manière de ne pas avoir de paradoxe est de restituer une épaisseur aux lignes et la comparaison «nombre à nombre» se transmettra à la grandeur entière **pourvu que les épaisseurs restituées soient égales d'une figure à l'autre**, qu'il y ait *double égalité*.

Les paradoxes de la méthode des indivisibles sont tous basés sur le fait que les divisions égales de la grandeur G_1 sont

– ou bien traduites en divisions égales sur la grandeur G_2, mais sans double égalité, comme dans le calcul de la surface du cône ci-dessous
– ou bien traduites en divisions inégales sur la grandeur G_2, et il y a "encore moins" de double égalité..., comme dans le cas de la surface de la sphère ci-dessous.

Les deux paradoxes de Tacquet cités par Jean Louis Gardies[25] ressortissent à ces deux cas





S_1 est connue, c'est la surface du triangle ABC
S_2 est inconnue, c'est la surface du cône

Les lignes de S_1 sont les diamètres IQ
Les lignes de S_2 sont les cercles IMQ
"Ligne à ligne" le rapport est π, constant.
Donc (méthode des indivisibles)

$$S_2 = \pi S_1$$

ce qui est manifestement faux, puisque

$$S_2 = \pi S_1 K$$

avec $K = AB / AD$

S_1 est connue, c'est la surface du demi-grand cercle ABC
S_2 est supposée inconnue, c'est la surface de la demi-sphère
Les lignes de S_1 sont les diamètres
Les lignes de S_2 sont les cercles
"Ligne à ligne" le rapport est π,constant

Donc (méthode des indivisibles)

$$S_2 = \pi S_1$$

ce qui est manifestement faux, puisque

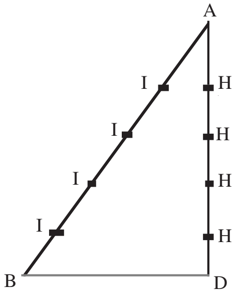
$$S_2 = 4/3 \ \pi S_1$$

25 - *Pascal entre Eudoxe et Cantor*. J.L. Gardies.

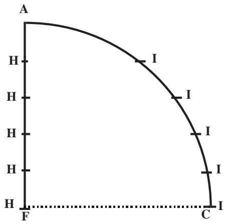
Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Restituer les largeurs lève immédiatement le paradoxe : le cône est constitué de rectangles de largeur I I et non HH comme le triangle ; les HH sont des divisions égales, les I I aussi, mais les I I ne sont pas égales aux HH, il n'y a pas *double égalité* .

Restituer les largeurs ne peut suffire à lever le paradoxe : Les HH sont des divisions égales, mais n'entretiennent plus de rapport simple avec les I I.
L'absence de double égalité n'est plus récupérable comme elle l'était dans le cas du cône, car il n'y a pas d'équidistance (à la surface, c'est la seule équidistance pertinente) des lignes-cercle entre elles.



Le facteur K = I I / HH se retrouve dans le résultat final, l'erreur locale se conserve globalement.



Les largeurs restituées doivent être les II dont le rapport avec les HH est variable. Il n'y a pas d'issue et la méthode des indivisibles est inapplicable.

Les deux trilignes ci-dessus ne vérifient pas les conditions que Pascal exige et que nous avons citées au début de ce paragraphe.

– Le premier porte bien des divisions égales sur deux de ses côtés, mais contrevient à la double égalité ; avec un léger réaménagement de la méthode des indivisibles il est cependant apte à fournir un résultat juste ;

– Quant au deuxième, il est tel que la loi de changement des divisions est trop "différentielle", la méthode des indivisibles n'est plus aménageable.

Les divisions doublement égales protègent contre tous les paradoxes de la méthode des indivisibles, dont la philosophie est qu' "il n'y aura pas d'erreurs pourvu qu'on puisse restituer des épaisseurs de telle sorte que celles restituées à la première grandeur soient égales à celles restituées à la deuxième grandeur". Dans la double égalité, le plus important c'est que les découpages de la première ligne L1 soient égaux aux découpages correspondants de la deuxième ligne L2 … C'est l'égalité *transversale* qui compte, les deux autres sont là de surcroît.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Ainsi, à notre avis, la double égalité requise par Pascal pour démontrer le *Lemme général* est un souvenir, coupé de son substrat, de la résolution des paradoxes des indivisibles[26]. Séparé de son origine qui lui conférait son sens, le souvenir a pris une forme étrange, illogique. Pascal n'a pas vu que la situation du *Lemme général* était fort différente de celle d'un calcul par la méthode des indivisibles, en effet

> Cavalieri avait **deux** grandeurs, **une** méthode, reposant sur la comparaison terme à terme des sections de dimension un de moins ; le résultat est **inconnu** au départ, **la comparaison a lieu à l'intérieur du calcul**
>
> tandis que
>
> Pascal a **une** grandeur, **deux** méthodes (sections par des plans perpendiculaires à l'axe, section par des plans perpendiculaires à la base) ; le résultat est **connu** d'avance, les calculs sont menés indépendamment (quoi qu'en dise Pascal) et **la comparaison a lieu à l'extérieur du calcul,** à la fin elle aboutit à égaler non pas deux grandeurs, mais deux formules.

Cela n'a donc rien à voir.

Dès lors que l'origine est perdue, tout se passe comme si Pascal se protégeait des redoutables raisonnements faux de la méthode des indivisibles en mettant des divisions égales à tout hasard et partout, jusque dans l'égalité d'égalités, espérant par là éloigner magiquement les paralogismes. Ces surcharges de divisions égales, ces hypothèses superflues de double égalité, produisent un effet incantatoire, sans d'ailleurs gêner le moins du monde le fond du raisonnement.

Pour résumer ce paragraphe I nous dirons, en mettant de côté ce qui concerne les sommes triangulaires que, chez Pascal :

1. L'*égalité des divisions égales, **entre elles*** est une survivance de la méthode des indivisibles (calcul d'une grandeur par comparaison avec une déjà connue).

26 - Pascal a lu Tacquet, il en parle dans l'avant dernier avertissement de la *Lettre à Carcavi* (le premier Traité).

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

2. L'*égalité des divisions **sur chacune des lignes*** est une autre survivance de la méthode des anciens pour lesquels cette égalité avait une fonction calculatoire.

Les deux types d'égalité, de significations très différentes, ont ceci en commun d'être des survivances de notions que Pascal a largement contribué à dépasser par le contenu des avertissements puisque

1. Dans sa méthode des indivisibles, les épaisseurs sont signifiées, et donc le calcul d'une grandeur n'est plus basé sur la comparaison avec une autre.

2. Le calcul n'est plus confié à des expressions algébriques issues de la loi de découpage.

II - Une "vraie" application des divisions égales

Revenons au calcul intégral. Nous avons passé en revue les inconvénients des divisions égales par une critique qui peut se résumer ainsi :

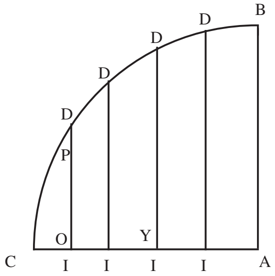
– Ou bien Pascal continue à s'en servir alors qu'il a fait tout ce qu'il fallait pour les rendre caduques.

– Ou bien elles ont leur utilité, mais pour un concept qui deviendra très vite caduque puisqu'il n'admet pas de contrepartie dans le formalisme leibnizien.

– Ou bien elles ne sont que le souvenir dénué de tout autre sens et - qui plus est - déformé de la résolution des paradoxes des indivisibles.

La vision d'un lecteur moderne est assez négative!

Voici une note positive, une fort jolie démonstration où Pascal utilise les divisions égales de manière très inventive. Il s'agit de la proposition V du *Traité des Sinus* du quart de cercle.



PROPOSITION V

Le centre de gravité de tous les sinus d'un arc quelconque, placés comme ils se trouvent, est dans celui qui divise en deux également la distance entre les extrêmes.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

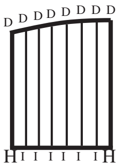
L'énoncé est mystérieux : que sont ces sinus «placés comme il se trouvent» ? Mais la lecture de la démonstration ne laisse aucun doute : chaque sinus DI est accroché à la barre AC et pèse DI DD (imaginer le dessin retourné pour que les DI soient la tête en bas). Pascal affirme que le centre d'équilibre de la barre est alors Y milieu de AO.

Les I I ne sont pas égales, Pascal ne peut donc écrire AY sous forme de somme triangulaire. Il va faire mieux.

> *Car si l'on entend que AO soit divisé en un nombre indéfini de parties égales, d'où soient menées des ordonnées,* ***et que l'on considére chaque somme de sinus qui se trouve entre deux ordonnées voisines***[27]*, il est visible que toutes ces petites somme particulières de sinus seront toutes égales entre elles, puisque les distances d'entre les ordonnées voisines sont prises toutes égales entre elles et que chaque somme de sinus est égale au rectangle fait de chacune de ces distances égales, multipliées par le rayon.*

Pascal subdivise a priori AO en HH, divisions égales (rôle que ne sauraient jouer les I I)

et re-subdivise chaque HH en divisions (inégales) aux points I qui sont les projections de ceux des sinus DI qui sont situés entre les deux points H considérés, conformément au schéma suivant



La somme de ces sinus DI est HH multiplié par le rayon (par la proposition I)[28] ; ce qui permet à Pascal de conclure immédiatement puisque les parties égales en nombre indéfini de la droite AO

> *sont toutes chargées de poids égaux entre eux (qui sont les petites sommes de ces sinus, comprises entre les ordonnées voisines).*

que

> *(…) le centre de gravité de tous ces poids, c'est à dire de tous les sinus placés comme ils sont, se trouvera au point du milieu Y.*

---

27 - Souligné par nous.
28 - Qui revient, rappelons le, à dire que l'intégrale de sina da entre a_1 et a_2 est $\cos a_1 - \cos a_2$.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Les HH étaient déjà «en nombre indéfini», et entre deux H consécutifs il y a encore un nombre indéfini de I, comme l'indique la partie soulignée par nous ! La répartition des I est du deuxième ordre : Pascal a sub-subdivisé. L'égalité des divisions en H est plus pertinente pour la démonstration que celle des divisions en D.

III - Conclusion

La polysémie des divisions égales dans le *Traité de la roulette* est grande. Nous avons pu y voir du souvenir déformé jusqu'à l'illogisme, du nominalisme pour pallier l'absence de symboles, de la nécessité dans les sommes triangulaires et pyramidales.

Mais Pascal n'a pas écrit que le *Traité de la Roulette* et il est notoire que son œuvre est une : mysticisme, apologétique, mathématiques, physique, tout y est intimement mêlé, se renforce mutuellement.

Risquons une idée : Pascal serait assujetti aux divisions égales en calcul intégral non seulement pour les multiples raisons données au paragraphe précédent mais aussi parce que la simple prise en compte d'une *situation d'égalité* lui a réussi dans la difficile résolution du problème des partis.

Et risquons encore cette idée : Pascal est un esprit classique attiré par la symétrie, l'équilibre. On a dit que Pascal avait écrit, à son insu car ce génie littéraire ne cherchait pas la littérature, des alexandrins dans sa prose, et quoi de plus symétrique que l'alexandrin divisé par la césure en ses deux hémistiches égaux ?

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

CHAPITRE VI

LES PROBLÈMES D'OCTOBRE

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Résumé du Chapitre VI

Le résultat de Wren sur la longueur de l'arc de la roulette a non seulement permis à Pascal de mettre au concours un deuxième groupe de problèmes dits d'Octobre, mais encore a obligé les mathématiciens à une refonte de leurs idées sur l'impossibilité d'égaler une courbe à un segment. Avec la "rectification géométrique" de la parabole semi-cubique, Fermat apporte un sérieux démenti à ce remaniement même.

Les *problèmes d'Octobre* sont le calcul des surfaces courbes engendrées par la rotation de la roulette autour de l'axe et de la base, et de leurs centres de gravité. Grâce à Wren ces problèmes peuvent être traduits en problèmes de cercle . C'est une figure quadruple — composée de la roulette, de la roue, d'un quart de cercle de rayon double et d'une parabole — qui se charge de la traduction. Son rôle est, entre autres de "rectifier" les arcs de la roulette en abscisses de cercle.

Nous donnons en détail le calcul du bras sur l'axe de la surface autour de la base, en suivant les indications que donne Pascal à la fin du septième traité (dont c'est la finalité). Le calcul fait visiter les sept traités. En faisant abstraction des problèmes de linéarité (*Traité des sommes simples, triangulaires…*) et des retours labyrinthiques on trouvera successivement : une somme d'arcs égalée — par le *Traité des Trilignes* — à une somme de sinus (fin de calcul) ; une somme pyramidale d'arcs égalée — par le *Traité des Trilignes* — à une somme de cubes de sinus, égalée — par le *Traité des Sinus* — à une somme de carrés d'ordonnées, calculée par le *Petit Traité des Solides Circulaires* ; une somme triangulaire d'ordonnées à l'axe égalée — par le *Traité des Trilignes* — à une somme de carrés d'ordonnées à la base ; une somme de puissances quatrièmes d'ordonnées du cercle transformée grâce à une parabole changeuse de variable en une somme de carrés d'ordonnées de parabole, calculée grâce à Pascal et Archimède réunis…

Puis nous donnons en détail aussi une partie du calcul du bras sur l'axe de la surface du solide autour de l'axe : la partie qui correspond au double produit lorsque le problème a été réduit à un problème de cercle. Ceci dans le but de voir comment on pouvait calculer à l'époque de Pascal une somme aussi difficile que $\int \alpha \sin\alpha \cos^2\alpha \, d\alpha$ sans recourir à la primitive. C'est sous la forme « somme curviligne de portions circulaires multipliées par leur bras sur la base », ce à quoi l'égale le *Traité des Trilignes* que cette intégrale se laisse calculer (dans le *Traité des Arcs*)… Les bras sur la base deviennent les éléments d'une somme triangulaire de sinus. Le formalisme géométrique est à son faîte, on est en train de calculer un centre de gravité réel avec un centre de gravité formel, une somme triangulaire complètement déconnectée. La géométrie géométrise la géométrie.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Chapitre VI - Les problèmes d'octobre

Les Problèmes d'Octobre sont des problèmes curvilignes, l'élément différentiel géométrique est courbe et oblique. Leur cadre naturel semble donc être celui des sommes de sinus plutôt que d'ordonnées. Mais dans ce creuset à métamorphoser les différentielles qu'est le *Traité de la Roulette*, celles-ci vont se voir rectifiées. Le rôle du résultat de Wren est essentiel dans la mise à plat des différentielles géométriques inscrites sur l'arc de la roulette. Après quoi le *Traité des Trilignes* entre en scène pour d'autres métamorphoses d'éléments infinitésimaux.

Avant de rentrer dans les détails il est bon de parler des contextes dans lesquels Pascal a posé ces problèmes.

1 - Contextes

Wren envoie en août à Pascal un résultat non demandé dans les *Problèmes de Juin*, parce que Pascal n'était pas en possession de sa démonstration. La découverte de Wren fit sensation. La voici

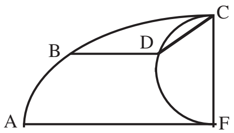


Figure 1

L'arc CB de la roulette est le double de la corde CD de la roue, BD étant parallèle à la base.

La roulette entière a donc pour longueur le double du diamètre de sa roue.

Une ligne courbe se voit égalée à un segment de la figure.

Pascal en profite pour poser les *Problèmes d'Octobre*[1] : longueur et centre de gravité de l'arc, surface et centre de gravité des solides autour de la base, autour de l'axe ; neuf problèmes en tout, comme en Juin. Pascal est ravi

1 - Pour les relations entre les deux groupes de problèmes, voir l'annexe 2.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

du cadeau de Wren : c'était la seule chose qui manquait pour que sa méthode générale lui permette de résoudre ce nouveau groupe de problèmes. En même temps son orgueil est piqué au vif, ce n'est pas lui qui a trouvé la longueur de la roulette. Voilà donc un autre effet du cadeau, Pascal se met au travail, généralise le résultat de Wren en montrant que toutes les roulettes allongées, ordinaire, accourcies[2] ont leur ligne courbe égale à celle d'une ellipse[3]. Le petit axe de l'ellipse mesure le défaut de roulement sans glissement, aussi pour la roulette ordinaire l'ellipse est-elle réduite à un segment.

Pour nous, vivant au XXe siècle, disposant d'un ensemble de nombres assez grand pour que les arcs de courbe s'y voient représentés, le résultat de Wren a perdu sa faculté de stupéfier. Mais au XVIIe siècle, rectifier une courbe, ce n'était pas trouver un nombre, c'était exhiber un segment, concrètement, sur le dessin par une construction tacitement autorisée. D'étonnantes idées à propos de ce que nous appelons aujourd'hui la rectification régnaient alors. Descartes pensait que la proportion entre les droites et les courbes était à jamais inconnue des hommes. La découverte de Wren n'infligea pas de démenti au fantasme de Descartes. Au contraire, conjuguée avec la généralisation de Pascal, elle le renforça ; en effet, Sluse et Pascal articulèrent de façon remarquable ces trois faits : la croyance de Descartes, la rectification de la roulette par Wren et l'égalité des lignes des roulettes généralisées à des lignes d'ellipses démontrée par Pascal. Pour Sluse la seule manière qu'une courbe soit rectifiable est que dans sa génération même une autre courbe soit déjà égale à un autre segment ; preuve : pour la roulette ordinaire le segment AF est égal à l'arc de cercle CF et pour les autres roulettes où cette égalité n'a plus lieu, la ligne n'est plus un segment. Chez Pascal on lit entre les lignes un argument "probabiliste", cette «égalité par accident », comme il dit, de la ligne de la roulette à une droite n'est-elle pas un événement de mesure nulle, comme l'est l'ellipse aplatie ? Descartes sort intact : la roulette n'est pas *géométrique*, elle est une courbe *mécanique* qui a payé déjà un certain prix d'incommensurabilité de par sa nature même. A ce point la croyance de Descartes est seulement affinée : aucune courbe géométrique n'est rectifiable (Sluse) et même pour les autres le risque est faible (Pascal). Grâce à l'appui d'un seul exemple la croyance primitive est à ce point d'élaboration lorsque Fermat annonce qu'il

2 - Voir l'annexe 1 pour la définition des différentes sortes de roulettes
3 - Ce résultat, objet d'une lettre à Huygens, est extérieur au *Traité de la Roulette* ; ce dernier ne traite que de la roulette ordinaire.

a rectifié une courbe parfaitement présentable, une vraie courbe admise par *La Géométrie* de Descartes : la parabole semi-cubique. Le segment est là, présent sur la figure, il est facile à construire, il ne requiert aucune égalité préalable d'une autre ligne courbe à un autre segment! [4]

4 - Voici les passages auxquels ce paragraphe a fait référence

" (...) à cause que la proportion qui est entre les droites et les courbes n'étant pas connue, et même, je crois, ne le pouvant être par les hommes, on ne pourrait rien conclure de là qui fut exact et assuré"

Descartes *La géométrie,* éd. Gabay, page 32.

"Si je ne connaissais pas d'ailleurs l'excellence de votre esprit, j'aurais du sujet assez de l'apprendre par les productions que j'en reçus hier qui m'ont semblé très rares, puisque leur difficulté ne cède en aucune façon à celle des problèmes que l'on a proposés touchant la cycloïde. J'ai admiré l'ordre de la nature que j'avais reconnu en d'autres occasions, qui ne permet point de trouver une ligne droite égale à une courbe, si ce n'est que premièrement on n'en suppose une autre déjà trouvée, comme il est évident dans la cycloïde primaire, de la quelle à cause que la base est prise égale à la circonférence du cercle, la coubure est égale à une ligne droite. Mais dans les autres cas où il n'y pas la même supposition, elle dégénère en demi-ellipse."

Sluse (chanoine de Liège) *Lettre à Pascal du 13 septembre 1658,*
éd. J. Mesnard, tome IV, page 256.

"(...) plus la base de la roulette approche d'être égale à la circonférence du cercle générateur, plus le petit axe de l'ellipse qui lui est égale devient petit à l'égard du grand axe ; et que quand la base est égale à la circonférence, c'est à dire quand la roulette est simple, le petit axe de l'ellipse est entièrement anéanti ; et qu'alors la ligne courbe de l'ellipse (laquelle est toute aplatie) est la même chose qu'une ligne droite, savoir son grand axe. Et de là vient qu'en ce cas la courbe de la roulette est aussi égale à une ligne droite. Ce fut pour cela que je fis mander à ceux à qui j'envoyais ce calcul que les courbes des roulette étaient toujours, par leur nature égales à des ellipses et que cette admirable égalité de la courbe de la roulette simple à une droite n'était pour ainsi dire qu'une égalité par accident, qui vient de ce qu'en ce cas l'ellipse se trouve réduite à une droite. A quoi Monsieur de Sluse ajoute cette belle remarque, dans sa réponse du mois de Septembre dernier, qu"on devait encore admirer sur cela l'ordre de la nature, qui ne permet point que l'on trouve une droite égale à une courbe qu'après que l'on a déjà supposé l'égalité d'une droite à une courbe. Et qu'ainsi dans la roulette simple, où l'on suppose que la base est égale à la circonférence du générateur, il arrive que la courbe de la roulette est égale à une droite."

Pascal *Lettre à Huygens* février 1659, éd. J. Mesnard, tome IV, page 530.

"Jamais encore que je sache, une ligne courbe purement géométrique n'a été égalée par les géomètres à une droite donnée. Ce qu'en effet un subtil mathématicien anglais a récemment découvert et démontré, que la cycloïde primaire est quadruple du diamètre du cercle qui l'engendre, paraît devoir se limiter, d'après l'avis des plus savants géomètres. Ils pensent en effet que c'est une loi et un ordre de la nature qu'on ne puisse trouver une droite égale à une courbe, à moins de supposer d'abord une autre droite égale à une autre courbe, et prenant cet exemple de la cycloïde ils montrent qu'il en est ainsi dans ce cas. Je ne le nie pas ; il est clair en effet que le tracé de la cycloïde suppose l'égalité d'une autre courbe avec une droite, à savoir celle de la circonférence du cercle générateur de la cycloïde avec la droite qui est la base de la cycloïde. Mais on va voir ci-dessous ce qu'il en est de cette loi de la nature qu'ils établissent, et combien il est dangereux sur un ou deux faits d'expérience de conclure aussitôt à un axiome. Je vais en effet démontrer l'égalité à une droite d'une courbe véritablement géométrique et pour la construction de laquelle on n'a à supposer aucune égalité semblable d'une autre courbe avec une droite, (...)"

Fermat. De la comparaison de lignes courbes avec les lignes droites.
Dissertation géométrique, page 181, tome III de l'édition Henry et Tannery.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

L'impossibilité de construire à la règle et au compas un segment égal à la circonférence d'un cercle n'a été démontrée que bien plus tard ; cependant elle ne faisait aucun doute pour Descartes ou Pascal. A cette intuition juste, ils en ont rajouté une autre moins juste, en étendant l'impossibilité à toute courbe. On sait que Descartes a trouvé les tangentes à la cycloïde en voyant celle-ci comme une infinité de petits arcs de cercle. En définitive la croyance en l'impossibilité d'avoir un segment égal à une courbe quelle qu'elle soit ne repose-t-elle pas sur le sentiment qu'une courbe est plutôt du genre cercle que du genre droite ? Ainsi assimilée au cercle plutôt qu'à la droite la courbe serait ressentie comme incomparable avec tout segment.

2 - Énoncés

Les énoncés des Problèmes d'Octobre sont redonnés dans le septième traité ou *Traité général de Roulette* à l'exception des trois problèmes de ligne[5]

L'arc de la roulette est divisé en un nombre indéfini de divisions égales aux points B. BB désignera l'arc (et non pas la corde).

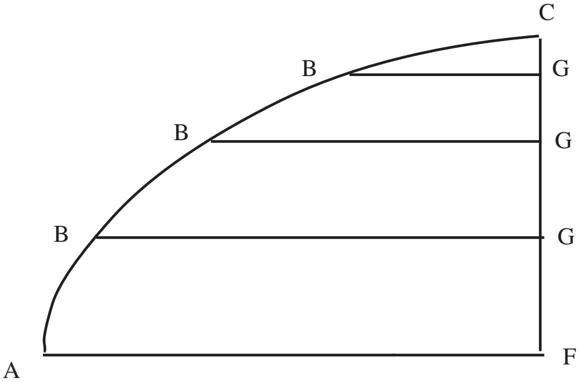


Figure 2

5 - Il s'agit d'une allégeance de Pascal à Roberval. Pour ce que dit P. Costabel à ce propos on pourra se reporter à l'annexe 2.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Calculs demandés	Signification (à π ou S_1 ou S_2 près)
Σ GF BB	Surface autour de la base : S_1
Σ BG BB	Surface autour de l'axe : S_2
Σ GF^2 BB	Bras sur la base de la surface autour de la base (il faut diviser par S_1)[6]
Σ BG^2 BB	Bras sur l'axe de la surface autour de l'axe (il faut diviser par S_2)
Σ BG GF BB	Bras sur la base de la surface autour de l'axe (il faut diviser par S_2)[7]

Il est à noter que Pascal écrit : la somme des sinus BG, la somme des GF carrés, la somme des rectangles BG en GF sans préciser l'élément différentiel par lequel ces lignes doivent être multipliées... Pascal écrit très bien, ce n'est pas une négligence, ni un oubli ; il a énoncé une règle de façon précise une fois pour toutes, dans la lettre à Carcavi : il faut regarder où il y a des divisions égales sur la figure et multiplier par les infiniment petits qui en naissent. Pascal se tient toujours à cette règle. Par exemple, la somme des droites GD, dans la figure 3 ci-dessous n'est certainement pas l'aire du demi-disque CDF…

Il a fallu un certain travail à Pascal pour voir des *bras* dans les trois dernières sommes, car les divisions égales n'ont pas lieu sur les balances que sont l'axe ou la base, du fait même de l'égalité des BB ; ce travail a été fait à la fin du *Traité des Trilignes*[8].

Nées de divisions égales *sur la courbe*, ces sommes sont des sommes de sinus, de carrés de sinus... mais ne renvoient pas pour autant au *Traité des Sinus* du Quart de cercle de manière immédiate, auparavant il faut soigneusement réduire la roulette à des cercles. Comme le dit Pascal dans ce dernier "Traité-synthèse" :

---

6 - En effet Σ GF^2 BB = Σ GF × [GF × BB], et GF est la distance à la base de l'élément de surface (ou de poids) π GF × BB. C'est toujours la formule de l'abscisse du barycentre qui dit que Σ GF × π GF BB = distance du centre de gravité à la base × Poids total (S_1).
7 - Parfaitement symétrique en abscisses et ordonnées de la roulette, ce calcul est double : en divisant le résultat par S_1, on aurait le bras sur l'axe de la surface autour de la base.
8 - Voir le paragraphe 3 du chapitre V *Divisions égales.*

Donc tous les problèmes des surfaces des demi-solides de la roulette (...) se réduiront aux problèmes suivants où l'on ne parlera plus de roulette, et où l'on ne considérera qu'un seul demi-cercle.

Ed. J. Mesnard T.IV P. 519

Trois lignes figurent dans les énoncés : BG, GF, et BB. Sont-elles dans le demi-cercle-roue ? Oui, car

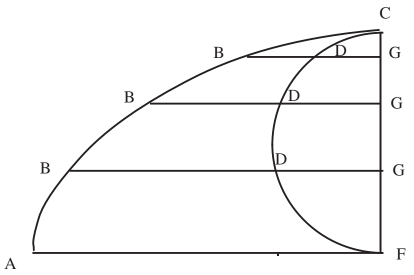


Figure 3

* BG est bien réductible à la roue, puisque le roulement sans glissement s'exprime par

$$BG = \text{Arc } CD + DG$$

* FG est déjà dans la roue

* Quant à BB il semble extérieur à cette dernière, mais il est la "différence" des cordes CD, intérieures, elles, ceci par le résultat de Wren. Pascal va arranger cette "différentielle de CD", peu pratique !

En réalité pour ces Problèmes d'Octobre, Pascal utilise deux cercles, d'une part la roue, et d'autre part un cercle de rayon double qui joue un rôle "rectifiant" ; sans compter une parabole pour les problèmes où la base seule est en cause (surface du solide autour de la base, bras sur la base du solide autour de la base)...

Il réunit le tout en une figure spécifique de ce deuxième groupe de problèmes.

3 - La figure des Problèmes d'Octobre

Elle est un assemblage de 4 figures

- La roulette : CBA
- Un petit cercle : CDF (la roue)
- Un grand cercle : CNE (dont le rayon est double)
- Une parabole : CHK, d'équation

$$IH = \frac{1}{CF}\ CI^2$$

Nous noterons R et R′ = 2R les rayons respectifs de la roue et du grand cercle.

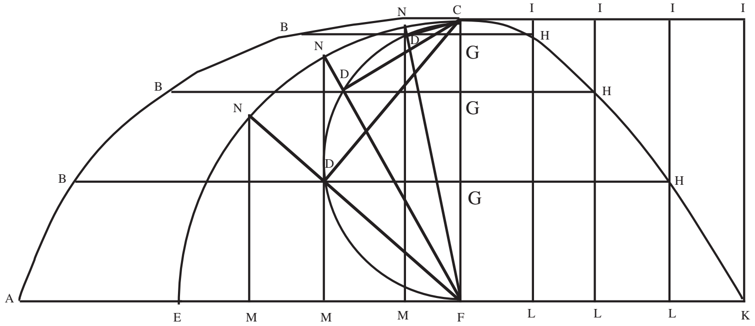


Figure 4

Les cordes CD sont en progression arithmétique (de premier terme la raison), car les BB sont égales et

$$\text{arc } CB = 2\ CD \quad \text{(Wren)}$$

D'autre part, on a les résultats de géométrie élémentaire assurant le passage du petit cercle dans le grand

$$CD = FM$$
$$FD = NM$$
$$\text{Arc } CN = \text{Arc } CD$$
$$DG = \frac{1}{CF} FM\, NM$$
$$FG = \frac{1}{CF} NM^2$$
$$GC = \frac{1}{CF} FM^2$$

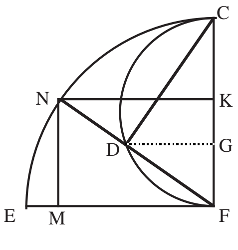


Figure 5

Moyennant le fait que CD = CI («chacune à la sienne») la relation

$$CD^2 = CF\ CG$$

conduit à la parabole, dessinée à droite, d'équation

$$IH = \frac{1}{CF}\ CI^2$$

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Les divisions aux points M, I, L sont égales et égales entre elles, celles au points B sont doubles :

$$MM = II = LL = \frac{BB}{2} \ .$$

En effet MM est la différence de deux cordes CD consécutives et BB en est le double de par le résultat de Wren.

Les différentielles “courbes” BB ont été rectifiées. Les cordes CD ou DF “en étoile” de la roue étaient d’un emploi malaisé dans les sommations ; elles sont devenues abscisses et ordonnées du grand cercle.Tout est prêt pour que l’on puisse utiliser ce grand Traité du Cercle qu’est en réalité le *Traité de la Roulette*.

Pascal qui ignore évidemment les indices a une expression pour les remplacer

> *(...) toutes les droites FM seront égales à toutes les droites CD chacune à la sienne (...)*

4 - En résumé

* Le petit cercle ramène les lignes BG à lui.

* Le grand cercle rectifie les BB en MM et met les cordes du petit cercle en ordonnées.

* La parabole est là pour résoudre les problèmes ne contenant que des GF, et rectifie pour ces problèmes-là les BB en LL.

* Quel que soit le problème à résoudre il faudra :

– Avant toute chose sortir de la roulette par la roue

– Choisir entre deux façons de sortir de la roue. La roue commande a priori le double-aiguillage parabole - grand cercle. De deux choses l’une

– Ou bien il n’y a que des GF et il faut passer du côté de la parabole, c’est à dire du côté de calculs *anciens* . C’est le cas de deux des calculs.

– Ou bien il y a au moins une ligne BG et il faut passer du côté du grand cercle, outil qui rectifie les éléments BB et met en ordonnées les cordes de la roue. Les 3 calculs sont pascaliens et nécessitent à fond l’usage du *Traité de la Roulette* (et un parti pris de non découragement).

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Par exemple voici la traduction dans le grand cercle du dernier groupe de calculs

Calculs demandés	Traduction de ces calculs dans le grand cercle
Σ BG BB	$2\,\Sigma\,(CN + \frac{1}{CF} FM\,NM)\ \ MM$
Σ BG GF BB	$2\,\Sigma\,(CN + \frac{1}{CF} FM\,NM)\ \ (FC - \frac{1}{CF} FM^2)\ MM$
Σ BG² BB	$2\,\Sigma\,(CN + \frac{1}{CF} FM\,NM)^2\ MM$

Laissons au lecteur le soin de calculer, via la parabole, les deux sommes Σ GF BB et Σ GF^2 BB, et donnons à voir le calcul de Σ BG GF BB qui a l'avantage de faire visiter l'ensemble des sept traités, puis celui de Σ BG^2 BB comme apothéose de complication.

5 - Un voyage dans les sept traités : le calcul du bras sur l'axe de la surface autour de la base

Nous suivrons de près la démarche indiquée dans ses grandes lignes par Pascal tout à la fin du dernier Traité[9], à l'ordre près toutefois pour éviter les cascades de conditions suffisantes. Ceci constituera la colonne de gauche.

Dans la colonne de droite nous ferons un commentaire des calculs pascaliens en langage moderne, avec des coordonnées, des signes intégrale, des concepts (intégration par parties, changement de variable) présents dans le calcul pascalien à défaut d'être repérés comme tels.

FM (la corde CD) sera x, MN (la corde FD) sera y, l'arc CN (ou l'arc CD, en abrégé CD) sera s. Le contexte permet toujours facilement de choisir entre l'arc ou la corde CD ; CN désigne toujours l'arc.

Dans les résultats de calculs nous commettrons l'anachronisme majeur d'utiliser π ; et beaucoup d'autres anachronismes tant d'écriture que de concepts.

9 - 5° Pour connaître la somme des rectangles compris de chaque ligne mixte CDG et de GF.

C'est le dernier paragraphe du *Traité général de Roulette*

La connaissance de la somme Σ BG GF BB équivaut à celle des deux sommes a = Σ CD GF MM et b = Σ GF DG MM car

$$\Sigma \text{ BG GF BB} = 2a + 2b$$

La présence de l'arc CD oblige à prendre l'aiguillage "grand cercle" plutôt que l'aiguillage "parabole" (On sait que FG peut s'exprimer aussi bien dans l'un que dans l'autre). CD est remplacé par CN.

Calcul de a = Σ CN GF MM

Pascal remplace FG par FC – GC
FC est une ligne constante et

$$GC = \frac{1}{CF} CD^2$$

CD est FM, abscisse dans le grand cercle

Pascal ne veut pas utiliser la relation métrique

$$FG = \frac{1}{CF} FD^2$$

car elle conduirait à une intégrale du genre $\int y^2$ s dx plus compliquée que celle qu'il a à partir de GC : $\int x^2$ s dx où le carré a lieu sur la même ligne que le découpage différentiel.

La connaissance de la somme a = Σ CD GF MM revient à celle des deux sommes

a′ = Σ CN MM et a″ = Σ CD^2 CN MM car

$$a = R'a' - \frac{1}{R'} a''$$

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Calcul de a′

a′ = Σ CN MM =

Σ (EC – EN) MM

a′ est du genre ∫ s dx Pascal va tranformer cette somme par parties, mais ici s et x ne sont pas nuls en alternance : le terme “tout intégré” serait non nul. C'est pouquoi Pascal réenracine l'arc en E au lieu de C car Σ EN MM, elle, est du ressort de ses nombreuses formules d'intégration par parties, toutes à terme tout intégré nul.

Σ EC MM est immédiate, c'est

$$\frac{\pi}{2}\,R'^2.$$

En effet EC est constant et la somme des MM est R′, rayon du grand cercle

Σ EC MM est le “terme tout intégré”, mais Pascal ne l'isole pas ainsi.

La somme d'ordonnées Σ EN MM est, via le *Traité des Trilignes*, une somme de sinus

PROPOSITION VI

La somme des arcs de la courbe compris entre le sommet et chaque ordonnée à l'axe est égale à la somme des sinus sur la base.

$$\int s\,dx = \int x\,ds$$

Une des propositions les plus simples de ce Traité d'intégration par parties que constitue le *Traité des Trilignes* .

Il y a changement d'élément différentiel puisque dans «somme des arcs», l'élément différentiel naît de divisions sur l'axe, tandis que dans «somme des sinus» il naît de divisions sur l'arc.

Cette somme de sinus est, par le *Traité des sinus*, proposition I

> *la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon*

$$\int x\, ds = \Delta(\text{cosinus})$$

La formule révolutionnaire du Traité de la roulette, pur produit du triangle caractéristique, non-calcul absolu, et base de tout l'édifice.

Ainsi Σ EN MM = R'^2

($x = \sin\alpha$, $ds = d\alpha$, au rayon près)

$$\text{Finalement} \quad a' = \frac{\pi}{2} R'^2 - R'^2$$

Calcul de a″

a″ = Σ CD^2 CN MM

Pascal remplace CD par FM

Les cordes de la roue sont les abscisses du grand cercle, « chacune à la sienne »

Σ FM^2 CN MM est la somme pyramidale des arcs CN.

C'est FM^2 qui signale qu'il s'agit d'une somme pyramidale. En effet le carré a lieu sur la ligne dont on prend les différences (d[FM] = MM).

Pascal renvoie au *Traité des sommes simples, triangulaires, pyramidales* dont la Propriété II énonce que connaître une somme pyramidale équivaut à connaître la somme pyramidale des mêmes grandeurs auxquelles on ajoute une longueur constante.

C n'est pas le bon sommet, encore une fois : les calculs tout faits que Pascal a en vue d'utiliser correspondent à l'autre sommet E du quart de cercle. Pascal ré-enracine donc les arcs en E.

Ce problème de "linéarité" est traité soigneusement. Cela marche parce que (depuis Archimède) l'aire sous la parabole est connue (en langage pascalien : la somme pyramidale d'une constante est connue).

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Σ FM² CN MM s'obtiendra en ôtant Σ FM² EN MM de Σ FM² EC MM

Le fait qu'il s'agisse ici d'un complément à la constante, et non pas d'une somme avec la constante ne semble pas gêner Pascal.

EC Σ FM² MM est facile et sa valeur simplement mentionnée dans le *Traité des sommes simples*...Elle vaut

$$EC \frac{R'^3}{3}, \text{ soit } \pi \frac{R'^4}{6}$$

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

Pascal n'emploie même pas l'expression «Par Archimède» à propos de ce résultat hors Traité de la Roulette.

Quant à Σ FM² EN MM, elle est deux fois la somme pyramidale des arcs EN à commencer par C.

Pascal renvoie au *Traité des Arcs de cercle*. A la proposition I 6 précisément.

La première partie du *Traité des Arcs de cercle* généralise l'application du *Traité de Trilignes* au *Traité des sinus du quart de cercle*, lorsque le quart de cercle est remplacé par une de ses parties, via une parallèle à la base.

A quoi sert le *Traité des Arcs de cercle* ? Il faut se souvenir que Pascal posait les problèmes, non pas pour la roulette entière, mais pour ses parties, délimitées par une parallèle à la base. Ce Traité est utile pour résoudre le problème général : celui du bras sur la base d'une surface engendrée par un arc quelconque tournant autour de l'axe. Dans ce cas le quart du grand cercle auxiliaire serait aussi tronqué, et les caculs feraient apparaître de nombreuses sommes de diverses natures d'éléments constants.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : / /presses-ufc.univ-fcomte.fr

NOUS NOUS CONTENTERONS DE LA ROULETTE ENTIÈRE…

Passons donc directement au *Traité des Trilignes*

PROPOSITION X

La somme pyramidale des arcs EN à commencer par C est égale à la sixième partie des cubes des mêmes sinus FM

Rappelons que Σ FM² EN MM est **la moitié** de la somme pyra-midale des arcs.

TANT PIS POUR LES INTÉGRALES INDÉFINIES…

Le *Traité des Trilignes,* transforme l'intégrale par la formule

$$\int x^2 s\, dx = \frac{1}{3} \int x^3\, ds$$

La proposition X est une formule d'intégration par parties, qui fait passer d'une intégrale ordinaire à une intégrale curviligne. Pascal ne voit pas la première intégrale comme *ordinaire,* mais comme *somme pyramidale des arcs s.*

Puis au *Traité des sinus du quart de cercle,* pour finir le calcul "numériquement".

Les Traités qui ont pour sujet le cercle sont les "tableaux de primitives" du calcul pascalien, c'est par eux que les calculs s'achèvent.

PROPOSITION III

La somme des cubes des mêmes sinus est égale à la somme des carrés des mêmes ordonnées com-prises entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon.

$$\int x^3\, ds = R' \int x^2\, dy$$

Rappelons que ceci exprime tout simplement le fait que $\cos\alpha\, d\alpha = d(\sin\alpha)$; x est cos α, s est α, et y est sin α au rayon du cercle près.

Ce résultat est difficile pour Pascal, car le changement de variable détruit l'égalité des divisions.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Pascal rappelle en passant dans le *Petit Traité des Solides Circulaires* qu'il s'agit d'un résultat connu

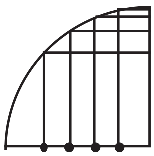
> *J'ai supposé encore que les solides des espaces tour-nés autour du dia-mètre sont encore donnés; ce qui a été démontré par Archimède*

Le calcul est terminé car la somme des carrés des ordonnées d'un quart de cercle est connue depuis l'antiquité, c'est, à π près, le volume de la demi sphère.

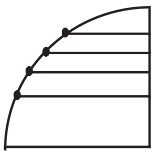
En définitive

$$\Sigma\ FM^2\ EN\ MM = \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ R'^{\,4}$$

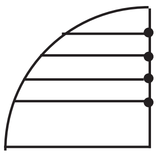
Remarquons dans les métamorphoses de Σ FM² EN MM le jonglage avec les différentielles MM = dx, ds, dy ; en noir les extrémités des éléments différentiels, dans la succession des calculs.



Au début



Après passage dans le traité des trilignes



Après passage dans le traité des sinus

Finalement

$$a'' = \pi\,\frac{R'^4}{6} - \frac{2}{9}R'^4 \quad \text{et, comme} \quad a = R'a' - \frac{1}{R'}a'' \ ,$$

$$a = R'^3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{7}{9}\right)$$

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Calcul de b = Σ DG GF BB

Σ FG DG MM

A cause de DG, Pascal va passer de la roue dans le grand cercle.

b = Σ (CF – CG) DG MM

Il y a donc deux calculs à effectuer

b′ = Σ CF DG MM et

b″ = Σ CG DG MM

Il vaut mieux, vu que l'élément différentiel MM est un dx, avoir des x que des y, c'est à dire avoir CG qui va nous renvoyer sur les abscisses du grand cercle, plutôt que FG qui aurait renvoyé sur ses ordonnées.

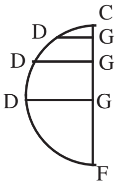
Le même phénomène s'était produit au début du calcul de a.

Calcul de b′

Pascal dit que cette somme est connue

> *puisqu'on connait tant la droite CF que la somme des droites GD.*

Attention le style elliptique est trompeur : « la somme des droites GD » ne désigne pas l'aire de la demi-roue, car l'élément différentiel sous entendu n'est pas GG mais MM.



Pascal dit que la somme des droites GD est connue parce qu'il a déjà donné les grandes lignes du calcul de la surface du solide autour de l'axe. Reportons nous donc là.

S'il y a un avantage certain aux divisions égales, c'est bien celui d'indiquer la différentielle géométrique (la variable d'intégration), et elle peut être fort éloignée spatialement de la ligne à intégrer…

Comme ,

$$DG = \frac{1}{CF} FM\ NM$$

b′ = Σ FM NM MM

$$b' = \int x\ y\ \ dx$$

On pense à de l'intégration par parties, mais apparemment Pascal n'aiguille pas sur le *Traité des Trilignes*

Pascal a déjà parlé de cette somme dans son 3°[10].

Le *Traité des solides circulaires* est spécialisé dans les troncatures, comme le *Traité des arcs de cercle.*

Il est évident que la somme des rectangles FM en NM est donnée (par le Traité des solides circulaires)

N'ayant en vue que les calculs sur la roulette entière, nous ne séjournerons pas dans ce Traité. Huygens a parlé du Traité de la Roulette comme d'un labyrinthe, et le propre d'un labyrinthe n'est il pas de faire retourner sur ses pas ?

b′ = Σ FM NM MM est la somme triangulaire des ordonnées à la base du quart de cercle, et, d'après le *Traité des trilignes* (Proposition II)

La somme des carrés des ordonnées à la base est double de la somme triangulaire des ordonnées à l'axe et de sa distance à la base.

Après l'échange base-axe

$$\int x\ y\ \ dx = \frac{1}{2} \int x^2\ dy$$

La somme des carrés des ordonnées à la base (ou à l'axe, c'est pareil pour un quart de cercle) est connue «par Archimède», c'est à π près le volume de la demi-sphère

$$\mathbf{b' = \frac{1}{3}\ R'^{\,3}}$$

10 - 3° *Pour connaître la somme des lignes mixtes GDC* Voir ci-dessous.

Calcul de b″

$b'' = \Sigma\, CG\, DG\, MM$

$$b'' = \frac{1}{CF^2}\Sigma\, CF\, CG\, CF\, DG\, MM$$

$$b'' = \frac{1}{CF^2}\Sigma\, FM^3\, MN\ \ MM$$

b″ est l'intégrale

$$\frac{1}{R'^2}\int x^3\, y\ \ dx$$

Pascal renvoie au *Traité des Solides Circulaires*, mais, pour la roulette entière il suffit d'aller directement dans le Traité très général dit *des Trilignes* pour transformer la somme.

Comme plus haut, cette étape intermédiaire n'a d'utilité que pour les problèmes de parties de roulette.

Pascal va une fois de plus transformer "par parties" la somme.

Appliquons la Proposition IV

La Proposition IV dit

$$\int y^4\, dx = 4\int y^3\, x\ \ dy$$

On démontrera de même que la somme des carrés-carrés des ordonnées à la base est quadruple de la somme des ordonnées à l'axe, multipliée chacune par le cube de sa distance de la base

Base et axe sont interchangeables, comme Pascal prend soin de le dire dans un avertissement juste après. Donc

$$b'' = \frac{1}{R'^2}\int x^3\, y\, dx = \frac{1}{4\,R'^2}\int x^4\, dy$$

Cette proposition est pour un triligne général. Le fait d'être dans un triligne particulier va permettre d'achever le calcul : b" sera connu si l'on sait effectuer la somme des puissances 4èmes des ordonnées d'un quart de cercle.

Ce ne sont pas ici les traités spécialisés dans le cercle qui vont achever le calcul, mais un habile mélange entre les résultats d'Archimède et les méthodes proprement pascaliennes.

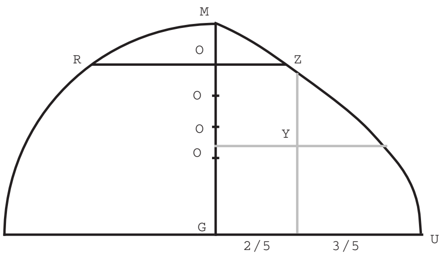
Comment effectuer cette somme de puissances 4èmes d'ordonnées, qui n'est pas du ressort d'Archimède ?

Réponse : en faire une somme de carrés d'ordonnées d'une autre figure mettant le problème sous la coupe des résultats d'Archimède.

Pascal introduit une parabole. Même pour le quart de cercle entier il faut passer dans le *Traité des Solides Circulaires*. La première figure représente un quart de cercle, avec, accolée à sa droite une parabole dont les ordonnées à l'axe sont les carrés des ordonnées à l'axe du quart de cercle.

La parabole est chargée de faire le "changement de variable"

$$X = x^2$$



Les Z tels que $OR^2 = OZ\ GM$ dessinent une parabole.

X, abscisse de la parabole est reliée à x, abscisse du cercle par

$$X = \frac{1}{GM} x^2$$

(GM, le rayon, rétablit les dimensions).

(Le point Y (centre de gravité du triligne-parabole sera nécessaire bientôt.)

Pascal qui avait ramené le calcul de b″ à celui de la somme des OR^4 (Σ OR^4 OO) vient de ramener ce dernier à la somme des OZ^2 (Σ OZ^2 OO).

$$\int x^4\, dy = GM^2 \int X^2\, dy$$

et

$$b'' = \frac{1}{4} \int X^2\, dy$$

Il *voit* dans cette Σ OZ^2 OO le bras sur MG de l'aire du morceau de parabole MGU

> *Il est visible que, puisque tant le plan MGU que son centre de gravité sont donnés le solide MGU autour de MG sera aussi donné ; et partant aussi la somme des carrés OZ*

(Article 4. du *Petit Traité des Solides Circulaires*, avec changement des lettres désignant la parabole)

Archimède connaissait le bras sur MG de l'aire MGU : $\frac{2}{5}$ MG (l'abscisse de Y sur la figure)[11]

Mais c'est la méthode proprement pascalienne qui fait *voir* à Pascal dans cette somme de X^2 dy le bras sur MG de l'aire MGU. Le style est très elliptique, mais on peut supposer qu'il y a deux temps

* 1) Une intégration par parties (spécialité du *Traité des Trilignes*)

* 2) La *méthode générale* des centres de gravité (lettre à Carcavi)

* 1)

> *la somme des carrés des ordonnées à l'axe est double de la somme triangulaire des ordonnées à la base, à commencer par l'axe*

(Corollaire de la Proposition II du *Traité des Trilignes*, en échangeant les mots « base »et « axe »)

* 1)

$$\int X^2\, dy = 2 \int X\, y\, dX$$

(somme triangulaire des y)

11 - Archimède avait calculé le volume du solide autour de GU, mais pas autour de MG. Fermat qui a résolu ce dernier problème le considère comme difficile.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

La proposition est valable pour un triligne quelconque, et Pascal va l'appliquer à la parabole pour achever le calcul via sa *Méthode générale*

Pascal applique la formule générale d'intégration par parties ci-dessus au cas où X et y sont les abscisse et ordonnée de la parabole MGU. Le deuxième membre est l'abscisse du centre de gravité multipliée par l'aire du segment de parabole, connues.

* 2)

C'est à dire, d'après la *Méthode générale* de la *Lettre à Carcavi* (premier traité), le bras sur l'axe multiplié par l'aire du morceau de parabole.

$$\int X\, y\, dx =$$

Bras sur MG × Aire MGU =

$$\frac{2\ MG}{5} \times \frac{2\ MG^2}{3}$$

Or $\qquad b'' = \frac{1}{2}\int X\, y\, dx$

d'où $\qquad b'' = \frac{2}{15} R'^3$

$$b'' = \frac{2}{15} R'^3$$

$$b = b' - b'' = \frac{1}{5} R'^3$$

$$\Sigma\ BG\ GF\ BB = 2a + 2b = 2\ R'^3 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{7}{9}\right) + \frac{2}{5} R'^3$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Sigma\ BG\ GF\ BB = R'^3 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{52}{45}\right)}}$$

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Pour avoir le bras sur l'axe (resp. sur la base), il suffit de diviser par Σ BG BB (resp.Σ GF BB). Le calcul de Σ BG BB est une partie du calcul qui vient d'être effectué, tandis que celui de Σ GF BB se fait à la manière des anciens en passant dans la parabole.

Ce long calcul de b″ appelle une remarque, concernant sa longueur, justement.

Remarque (en métalangage anachronique)

En 1658 les mathématiciens dominent parfaitement les intégrales de fonctions puissance ; d'ailleurs Pascal a lui-même **re**-démontré, que

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

c'est une des applications du *Traité du Triangle arithmétique*.

D'autre part, Pascal sait très bien mettre en mots (car il n'a pas de notations algébriques)

* le fait que dans un cercle $x^2 + y^2 = R^2$

* l'identité remarquable *carré de la somme* (Il utilise même celle du *cube* dans le *Traité des solides circulaires*)

* la linéarité de l'intégrale (tout le temps ; c'est cela même qui fait du *Traité de la roulette* un immense Traité du cercle : chaque intégrale *de roulette* est somme de plusieurs intégrales *de cercle*)

Pascal avait donc tout pour dire en langue française ce que résument les égalités

$$\int x^4 \, dy = \int (R^2 - y^2)^2 \, dy = \int R^4 \, dy - 2R^2 \int y^2 \, dy + \int y^4 \, dy =$$

$$R^5 - 2R^2 \frac{R^3}{3} + \frac{R^5}{5} = \frac{8}{15} R^5$$

Ce qui est bien le résultat ci-dessus, obtenu cette fois sans effort.

En toute logique, l'absence de formalisme algébrique n'empêche pas de faire ce calcul, mais il ne favorise pas l'idée… et nous voyons Pascal passer par le centre de gravité d'une parabole-changeuse-de-variable, intégrer par parties, utiliser la formule élaborée de l'abscisse du centre de gravité… plutôt que développer un carré et utiliser des résultats connus de longue date et redémontrés par lui-même.

6 - Aux limites extrêmes de la géométrie calculante : le bras sur l'axe de la surface autour de l'axe

Il s'agit de la somme $\Sigma\ BG^2\ BB$ dont nous avons vu qu'elle était, traduite dans le grand cercle

$$2\ \Sigma\ (CN + \frac{1}{CF} FM\ NM)^2\ MM$$

somme qui se divise en trois morceaux. Nous ne regarderons que la partie qui correspond au double produit, à savoir

$$\Sigma\ CN\ FM\ NM\ MM$$

autrement dit

$$\int s\ x\ y\ dx$$

qui est (à l'échange $x \leftrightarrow y$ près) l'une des intégrales les plus élaborées du *Traité de roulette*, sous la coupe de la proposition XIV du *Traité des trilignes*[12].

La proposition XIV se démontre aujourd'hui en deux lignes puisqu'elle est une intégration par parties, mais du temps de Pascal, sans technique de primitive, c'était une aventure géométrique et nous avons là un des résultats les plus élaborés de son Traité.

Effectuons ce (tiers de) calcul. La valeur de $\int s\ x\ y\ dx$ dépend de façon simple de celle de $\int s\ x\ y\ dy$ où les divisions infinitésimales ont lieu sur l'axe. Avant de passer dans le cercle, reprenons la proposition générale XIV du *Traité des trilignes* qui égale cette somme à une somme d'espaces multipliés chacun par leur bras sur l'axe, le tout relativement à des divisions égales sur l'arc. Avec les notations de cette proposition XIV

> *(…) La somme de tous les solides AD en DO en OB (…) est égale à la somme de ces portions IRAP du triligne, multipliées chacune par son bras sur AP, c'est à dire par la perpendiculaire menée sur AP du centre de gravité de chaque portion IRAP.*

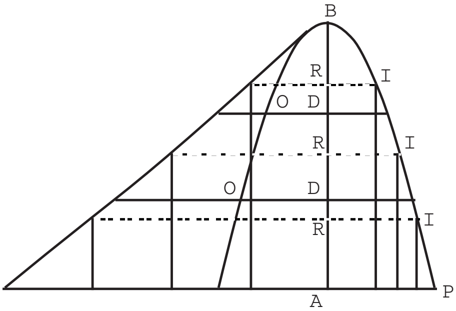
En rétablissant les élément s différentiels sous entendus

$$\Sigma\ AD\ \ DO\ \ \text{arc}\ OB\ \ DD = \Sigma\ IRAP\ x\ (\text{leur bras sur}\ AP)\ II$$

12 - La proposition XIV, l'une des quatre dernières du Traité des trilignes, revient à une formule d'intégration par parties mêlée d'intégrale double : $\int sy\ x\ dy = \int [\int y\ x\ dy]\ ds$. Les quatre dernières propositions du Traité des trilignes ont été étudiées au chapitre II *Un Traité très technique* § 4 du IV.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

La figure est la partie utile de la *figure rectifiante*[13]. Reproduisons-la



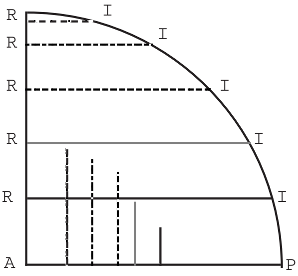
Mais le problème est ici dans le quart de cercle. On sait qu'il faut alors quitter le très général *Traité des trilignes* qui est le seul (avec la *Lettre à Carcavi*) à ne pas être un traité de cercle. Plus précisément, c'est le *Traité des arcs de cercle* qui contient la réponse à notre problème.

Rappelons que les quatre dernières propositions du *Traité des trilignes* ont des seconds membres constitués de sommes d'espaces (intégrales doubles).

Au prix de découpages adaptés, ces seconds membres sont calculables si le triligne est un quart de cercle. Telle est l'unique finalité de la deuxième partie du *Traité des arcs de cercle* : donner les moyens de calculer ces quatre seconds membres.

La figure générale est particularisée[14] ; La méthode de Pascal consiste à calculer pour le quart de cercle

la somme de ces portions IRAP multipliées chacune par son bras sur AP : Σ IRAP x (Bras sur AP) II



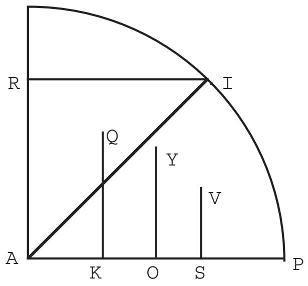
Chaque espace IRAP, né de divisions égales sur l'arc est multiplié par son bras sur AP.

Pour chaque espace ARIP, RI est représenté avec la même intensité de trait que le bras correspondant.

Les II sont en nombre indéfini.

Il s'agit d'une intégrale curviligne de volumes. Le sens géométrique devient fort abstrait… C'est ce qui arrive à la géométrie quand sa fonction n'est plus que de calculer.

13 - Étudiée au chapitre II *Un Traité très technique* § 3 du IV.
14 - Nous reproduirons assez librement les dessins du *Traité des arcs*, en les simplifiant et en changeant leurs lettres.



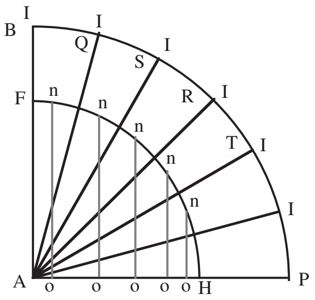
Chaque espace ARIP est composé d'un triangle : ARI et d'un secteur circulaire : AIP. Chacune des deux sous-figures a son propre bras sur AP. Pascal s'est donné la peine de montrer dans un lemme que le bras total YO vérifiait avec les deux bras partiels la relation

YO x ARIP = QK x ARI + YS x AIP

de manière à pouvoir remplacer Σ IRAP x (Bras sur AP) II par Σ ARI x (leur bras sur AP) II + Σ AIP x (leur bras sur AP) II. Puis, armé de cette "formule d'associativité du barycentre", il traite séparément le cas des sommes de secteurs multipliés (…) et celui des sommes de triangles (…).

Somme des secteurs circulaires AIP multipliés par leur bras sur AP

Elle revient à une somme triangulaire de sinus. Pour le montrer Pascal procède ainsi : les centres de gravité des secteurs AIP se feront par le "lemme d'associativité" à partir de ceux de leurs composants que sont les petits secteurs AII. Les AII, assimilables à des triangles, ont leurs centres de gravité n régulièrement espacés sur un quart de cercle réduit dans le rapport 2/3, AFH. Les bras de ces AII sont donc les sinus no du quart de cercle AFH.



Dans la somme

Σ AIP x (Bras sur AP) II

que l'on cherche à calculer, chaque AIP est décomposé en ses atomes AII, et AII apparaitra un nombre de fois égal à son rang à partir de B : ABQ 1 fois, AQS 2 fois, ASR 3 fois etc. puisque ABQ appartient à 1 secteur, AQS à 2 secteurs, ASR à 3 etc.

En transférant ce caractère triangulaire aux bras no, on voit que la somme cherchée n'est autre que

AII x (la somme triangulaire à partir de B des no x II)

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

soit encore, à un facteur constant près

La somme triangulaire à partir de F des no x nn^2

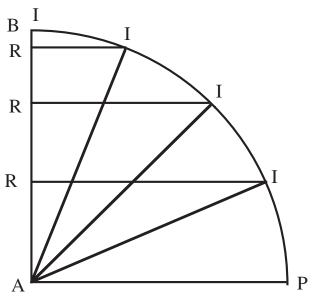
C'est la somme triangulaire à partir de H qui est donnée par le *Traité des sinus*, proposition VII. Celle à partir de B s'en déduit par un passage aux sinus verses. Les sinus verses sont les compléments des sinus au rayon. Pascal qui ne laisse rien au hasard, même pas ces questions faciles de "linéarité" indique précisément comment faire dans le *Traité des sommes simples*…. La synthèse est faite dans la proposition V du *Traité des arcs*. Il sufit de la lire pour savoir qu'en définitive, à un facteur constant près né du rapport entre nn et II, entre AF et AB etc, la somme

Σ AIP x (Bras sur AP) II

est

(arc BP – AB) AB^3

Somme des triangles ARI multipliés par leur bras sur AP



Cette somme est $\frac{1}{3}\Sigma\, AR^2\, RI\, II.$

Par le théorème de Pythagore

$$\Sigma\, AR^2\, RI =$$
$$\Sigma\, [AI^2 - RI^2]\, RI =$$
$$AI^2\, \Sigma\, RI\, II \;-\; \Sigma\, RI^2\, II$$

* Σ RI II est une somme de sinus. Elle vaut AB^2, pour le quart de cercle entier, de par la fameuse proposition I du *Traité de sinus* (l'échange base ↔ axe est non-signifiant).

* Σ RI^3 II, «la somme des cubes des sinus sur l'axe» est donnée aussi par le *Traité de sinus* C'est la somme des carrés des ordonnées à l'axe, résultat connu par Archimède : $\frac{2}{3}R^4$

En définitive la somme cherchée est $\frac{2}{9}R^4$

Par addition des deux résultats partiels le double produit est connu.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Personne n'avait fait ce calcul avant que Pascal n'en donne les moyens dans le cadre du concours. On comprend aisément pourquoi. Seule une systématique d'étapes intermédiaires, résultats stockés sous forme de "ready-made", chacun dans son traité approprié, a permis de réaliser ce que toute personne raisonnable tiendrait pour impossible :

Calculer $\int \alpha \sin\alpha \cos^2\alpha \, d\alpha$ sans recourir à la primitive.

7 - Absence totale de notations algébriques. Ce qui les remplace. Géométrie et "calcul aveugle"

Nous avons reconstitué plusieurs calculs au cours de cette étude du *Traité de la roulette*. Une lecture, même rapide, de leur déroulement permet de se rendre compte d'un certain nombre de choses.

C'est parce que les mots « somme de sinus », « somme d'ordonnées », « somme triangulaire de sinus », « somme pyramidale de … » etc sont beaucoup plus courts que ce qu'ils veulent dire que Pascal a pu écrire son traité.

Raccourcis (tous), vidés le plus souvent de leur sens (sommes triangulaires), déjà vides (sommes pyramidales), ils ont les deux mêmes caractéristiques que les lettres du calcul algébrique

* S'abstraire du sens

* Raccourcir

Le symbolisme est la condition pour les calculs au delà d'une certaine articulation. Pascal n'a comme symbolisme au sens strictement mathématique du terme que les lettres pour désigner des points, exactement comme Archimède. Tout le reste est un symbolisme littéraire, proche de la figure de style. L'ellipse est à l'œuvre pour parler des infiniments petits sans les dire dans *somme de sinus*, *somme d'ordonnées*. Les qualificatifs «triangulaires» et «pyramidales» sont des images géométriques pour finalement dire que l'on multiplie par la variable d'intégration (ou par son carré) ce que l'on somme. Pascal met en place tout un système de notations-symboles littéraires sur lesquelles il effectuera des substitutions en faisant abstraction du sens exactement comme si c'étaient des notations algébriques. Il travaille sur les signifiants sans avoir l'esprit encombré par la signification, accordant la prééminence à la règle sur le sens, à la transformation sur l'objet.

Voilà un exemple étonnant où la géométrie est l'outil d'un "calcul aveugle"[15].

15 - Voir Marc Parmentier *Leibniz Naissance du calcul différentiel*.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Chapitre VII

Le cœur et la raison, les trois ordres, la place du calcul de la somme des sinus dans l'œuvre de Pascal

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Résumé du Chapitre VII

Le calcul de l'infini met en jeu d'autres instances que celles de la raison. Ainsi le calcul de la somme des sinus repose sur un lemme irréfutable, certes, mais aussi sur un avertissement que l'état des mathématiques au XVIIe siècle ne peut permettre de justifier complètement.

Il y a une instance non pas opposée, mais supérieure à la raison, présente dans toute l'œuvre de Pascal, elle prend différents noms et différents aspects. Tantôt elle s'appelle le cœur, tantôt l'esprit de finesse et elle est toujours en opposition avec une autre instance plus grossière qui s'appelle la raison, l'esprit de géométrie.

Ce que dit Pascal du cœur s'applique parfaitement au célèbre avertissement du *Traité des sinus*, c'est lui qui sait avec certitude que lorsque tout s'évanouira, il n'y aura plus aucune erreur à confondre la courbe et la tangente.

L'étanchéité des ordres est une autre conception chère à Pascal. L'ordre de la charité est infiniment supérieur à celui des esprits et celui-là est infiniment supérieur à celui des corps. Cette impossibilité pour un ordre de porter atteinte à l'ordre supérieur trouve son reflet dans les mathématiques, où la justification dernière de l'avertissement semble être la possibilité de négliger un infinitésimal devant un autre d'ordre supérieur. Les termes mêmes de Pascal dans le *Traité du Triangle arithmétique* et dans les *Pensées* sont identiques : «car elles n'y ajoutent ni ôtent».

Les correspondances entre les écrits de calcul infinitésimal et les écrits apologétiques sont grandes, il y est beaucoup question de l'infini.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Chapitre VII - Le cœur et la raison, les trois ordres, la place du calcul de la somme des sinus dans l'œuvre de Pascal

Autant le lemme de la proposition I du *Traité des sinus du quart de cercle* est irréfutable, autant la démonstration de cette proposition (calcul de la somme des sinus) fait appel à d'autres ressorts que ceux de la pure raison. C'est pour justifier cela que Pascal a pris la peine d'écrire l'*avertissement*.[1]

Cet avertissement, sur lequel repose la démonstration de la proposition I et donc tout l'édifice du *Traité de la Roulette* offre de profondes résonnances avec les conceptions les plus fortement ancrées chez Pascal : la prééminence du cœur sur la raison et la théorie des trois ordres. On y retrouve aussi un accord avec la vision paradoxale du monde développée tout au long des *Pensées*.

1 - Le cœur et la raison

Le cœur a ses raisons que la raison ne connaît pas

Pascal, esprit scientifique, est un grand croyant, et un antirationaliste en ce sens qu'il n'accorde pas la primauté à la raison : d'une part la raison a été corrompue par le péché originel, d'autre part on n'accède pas à la foi par la raison.

L'opposition cœur - raison est présente partout dans les *Pensées*, elle s'appelle aussi esprit de finesse - esprit de géométrie. Au cœur le pouvoir de sentir les choses et de les saisir d'un seul regard, à la raison la lourdeur discursive. Au cœur les premiers principes à jamais inaccessibles à la raison, on ne pourra, remarque Pascal, jamais définir *être*

> *car on ne peut définir un mot sans commencer par celui-ci c'est, soit qu'on l'exprime ou qu'on le sous entende. (...) La nature nous a elle-même donné, sans paroles, une intelligence plus nette que celle que l'art nous acquiert par nos explications*[2]

1 - Pour le lemme, l'avertissement et la démonstration de la proposition I, se reporter au premier paragraphe du chapitre II *Un traité très technique.*

2 - Opuscule *De l'esprit géométrique*.

Le cœur s'oppose à la raison comme la simultanéité à la succession, comme l'intuition à la logique, comme la vue au discours

> *Il faut tout d'un coup voir la chose d'un seul regard et non pas par progrès de raisonnement, au moins jusqu'à un certain degré*[3]

Et les connaissances obtenues par le cœur sont tout aussi certaines que celles que nous donne la raison

Nous connaissons la vérité non seulement par la raison, mais encore par le cœur.(...)

> *Nous savons que nous ne rêvons point. Quelque impuissance où nous soyons de le prouver par la raison, cette impuissance ne conclut autre chose que la faiblesse de notre raison, mais non pas l'incertitude de notre raison, comme ils le prétendent*[4].
>
> *Les connaissances des premiers principes, espace, temps, mouvement, nombres, sont aussi fermes qu'aucune de celles que nos raisonnements nous donnent*[5]

Premier principe, simultanéité, certitude, tout cela nous allons le retrouver dans l'*avertissement* qui accompagne la démonstration de la proposition I du *Traité des sinus*.

2 - Les trois ordres

> *La distance infinie des corps aux esprits figure la distance infiniment plus infinie des esprits à la charité, car elle est surnaturelle*

Voilà la forme achevée que prend la répartition de l'humanité en trois ordres chez Pascal ; mais avant d'en arriver là il y a une longue histoire.

Philippe Sellier a montré dans un ouvrage passionnant[6] tout ce que Pascal devait à Saint Augustin, défaisant par là le mythe habituel de Pascal ignorant en théologie, et utilisé par Arnaud et Nicole pour ses qualités

3 - *Les Pensées* Fragment 1. La numérotation des fragments sera toujours celle de l'édition Brunschvicg.
4 - Ce fragment (434) est destiné à contrer les Pyrrhoniens.
5 - *Les Pensées* Fragments .
6 - Philippe Sellier, *Pascal et Saint Augustin.*

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

d'écrivain. Pascal est au contraire nourri de ses lectures augustiniennes, et remodèle inlassablement les idées du Père de l'Eglise en les enrichissant. L'importance du cœur, et la structure de l'humanité en ordres sont au centre de l'œuvre de Saint Augustin, qui lui-même était imprégné de la lecture biblique des Psaumes. Ce qui est le plus important chez Pascal à ses propres yeux vient de très loin. Pascal et Saint Augustin ont en commun un besoin d'ordonner le monde, de le diviser en catégories fortement hiérarchisées dans un but apologétique qui leur est commun. Saint Augustin a passé sa vie à lutter contre les hérésies, donatiste, pélagienne, manichéenne, arienne ; peu de siècles furent aussi féconds en hérésies que le IV^e^... Pascal est en lutte incessante contre les Jésuites, les Molinistes, les Pyrrhonniens, les athées, les indifférents, les libertins... L'un comme l'autre ont besoin d'un système de valeurs très hiérarchisé pour confondre leurs adversaires ; la forme prise s'appelle « ordres ».

Les hommes se répartissent en deux ordres chez Saint Augustin : les charnels et les spirituels, les seconds bien évidemment supérieurs aux premiers. Pascal a, lui aussi, commencé par envisager deux ordres : en 1652 dans une lettre à la Reine de Suède à qui il présente sa machine arithmétique, Pascal parle de deux ordres : l'ordre des corps, et l'ordre des esprits[7]. La répartition diffère déjà sensiblement de celle de Saint Augustin pour qui les valeurs d'esprit temporelles faisaient partie de l'ordre charnel, le mot spirituel étant réservé aux valeurs de charité. Pascal innove par rapport à Saint Augustin en séparant l'ordre des esprits de l'ordre des corps, c'est bien compréhensible car le XVII^e^ siècle connaît un miracle scientifique analogue au "miracle grec" et rien de tel n'a eu lieu à l'époque du Père de l'Eglise.

Mais l'innovation principale a lieu ailleurs : dans les trois ordres de Pascal (ordre des corps, ordre des esprits, ordre de la charité), il y a plus qu'une simple hiérarchie, les ordres croissent à la manière des ordres d'infinis, comme des alephs. Aleph 0 ne compte pas devant aleph 1 qui ne compte pas devant aleph 2 etc. Le fragment 793 est écrit comme un Psaume, il répète avec de légères variations qu'un ordre ne compte pas devant un ordre supérieur : tout se passe comme s'il s'agissait d'ordres d'infinis. Citons en entier cette magnifique psalmodication sur le thème de sa ligne 17 « Car elle n'y ajoutent ni ôtent ».

7 - Dans les *Pensées* les deux ordres ont des noms variables, par exemple, dans les fragments intitulés *raisons des effets*, ils s'appellent effets et causes respectivement, tandis qu'à d'autres endroits on les rencontre dans l'opposition apparence - réalité ou encore figures - sens caché. Figure - sens caché renvoie plutôt à corps - charité.

793 — La distance infinie des corps aux esprits figure la distance infiniment plus infinie des esprits à la charité, car elle est surnaturelle.

Tout l'éclat des grandeurs n'a point de lustre pour les gens qui sont dans les recherches de l'esprit.

La grandeur des gens d'esprit est invisible aux rois, aux riches, aux capitaines, à tous ces gens de chair.

La grandeur de la sagesse qui n'est nulle sinon de Dieu, est invisible aux charnels et aux gens d'esprit. Ce sont trois ordres différents de genre.

Les grands génies ont leur empire, leur éclat, leur grandeur, leur victoire, leur lustre, et n'ont nul besoin des grandeurs charnelles, où elles n'ont pas de rapport. Ils sont vus non des yeux, mais des esprits et c'est assez.

Les saints ont leur empire, leur éclat, leur victoire, leur lustre, et n'ont nul besoin des grandeurs charnelles ou spirituelles, où elles n'ont nul rapport, car elles n'y ajoutent ni ôtent. Ils sont vus de Dieu et des anges et non des corps ni des esprits curieux : Dieu leur suffit.

Archimède, sans éclat serait en même vénération. Il n'a pas donné des batailles pour les yeux, mais il a fourni à tous les esprits ses inventions. Oh qu'il a éclaté aux esprits !

Jésus-Christ, sans biens et sans aucune production au dehors de la science, est dans son ordre de sainteté. Il n'a point donné d'invention, il n'a point régné ; mais il a été humble, patient, saint, saint à Dieu, terrible aux démons, sans aucun péché. Oh qu'il est venu en grande pompe et en une prodigieuse magnificence, aux yeux du cœur qui voient la sagesse.

Il eût été inutile à Archimède de faire le prince dans ses livres de géométrie quoiqu'il le fût.

Il eût été inutile à Notre-Seigneur Jésus-Christ, pour éclater dans son règne de sainteté, de venir en roi ; mais il y est bien venu avec l'éclat de son ordre!

Il est bien ridicule de se scandaliser de la bassesse, comme si cette bassesse était du même ordre, duquel est la grandeur qu'il venait faire paraître. Qu'on considère cette grandeur là dans sa vie, dans sa passion, dans son obscurité, dans sa mort, dans l'élection des siens, dans leur abandon, dans sa secrète résurrection, et dans

> *le reste, on la verra si grande, qu'on n'aura pas sujet de se scandaliser d'une bassesse qui n'y est pas.*
>
> *Mais il y en a qui ne peuvent admirer que les grandeurs charnelles, comme s'il n'y en avait pas de spirituelles ; et d'autres qui n'admirent que les spirituelles, comme s'il n'y en avait pas d'infiniment plus hautes dans la sagesse.*
>
> *Tous les corps, le firmament, la terre et ses royaumes, ne valent pas le moindre des esprits ; car il connaît tout cela, et soi ; et les corps, rien.*
>
> *Tous les corps ensemble et tous les esprits ensemble et toutes leurs productions, ne valent pas le moindre mouvement de charité. Cela est d'un ordre infiniment plus élevé.*
>
> *De tous les corps ensemble on ne saurait faire réussir une petite pensée : cela est impossible et d'un autre ordre. De tous les corps et esprits on n'en saurait tirer un mouvement de vraie charité, cela est impossible et d'un autre ordre, surnaturel.*

Il semble que l'on n'ait pas assez insisté sur un caractère du style de Pascal : l'emploi *pascalien* de la syllepse oratoire[8]. Pascal qui est mathématicien en même temps qu'écrivain, poète et croyant a des ressources qui lui sont propres dans l'art de la rhétorique. Il part d'une image, puis glisse vers un concept mathématique qui communique sa valeur d'irréfutabilité à ce qui n'était au départ qu'une métaphore. Le passage de « la distance infinie des corps aux esprits » à « car elles n'y ajoutent ni ôtent » donne une réalité à ce qui au départ n'était qu'une manière de parler. Les passages les plus forts du *Pari* jouent encore plus nettement et intensément sur ce registre : on peut mettre en formule, grâce à infini, infini au carré, infini au cube, ce qui ne devrait jamais rester que métaphore

> *Et cela étant, quand il y aurait une infinité de hasards dont un seul serait pour vous, vous auriez encore raison de gager un pour avoir deux, et vous agiriez de mauvais sens étant obligé à jouer, de refuser de jouer une vie contre trois à un jeu où d'une infinité de hasards il y en a un pour vous*[9]

8 - Le dérapage du sens figuré au sens propre. L'exemple classique de la syllepse est *brûlé* dans les vers de Racine

> Je soufre tous les maux que j'ai faits devant Troie
> Vaincu, chargé de fers, de regrets consumé
> *Brûlé* de plus de feux que je n'en allumai

9 - Une mise en forme mathématique, par infinis d'ordres un, deux, trois est donnée dans les notes 1. et 2. page 1509 de l'édition J. Chevalier des *Œuvres complètes de Pascal*. Pour une étude approfondie, on pourra lire l'article de T. Harrington *le Pari de Pascal.*

La syllepse oratoire caractérise l'esthétique baroque[10]. Le baroque en art sert à convaincre, ce n'est pas pour rien que cet art qui joue sur la profusion d'images a souvent été baptisé l'art de la contre-réforme. Remarquons au passage l'ordre mis en image dans ces innombrables tableaux baroques où une figure du bien terrasse impitoyablement une figure du mal. La puissance persuasive des images est déjà grande par elle-même, Pascal l'augmente encore en faisant devenir l'image "vraie", par le moyen des mathématiques. L'histoire connait des mathématiciens philosophes mais Pascal semble un exemple rare, peut-être unique – en tous cas c'est notre avis –, de mathématicien littéraire au sens où la littérature est un art. Cet art fondu avec les mathématiques crée cette rhétorique propre à Pascal.

3 - Le rôle du cœur et des ordres dans l'*avertissement* du *Traité des sinus*

Les textes sur le *Pari*, sur les trois ordres ont des échos mathématiques. Inversement, le texte mathématique de l'*avertissement* contient, non dites, les conceptions les plus chères à Pascal : le cœur et les ordres.

La Proposition I, de la «somme des sinus», occupe une place centrale dans l'ensemble du Traité. Car beaucoup d'autres valeurs de sommes en découlent. Les propositions de sommes triangulaire et pyramidale de sinus ne sont jamais que les itérées – d'ordre 2 et 3 respectivement – de cette proposition I à l'intérieur du cercle[11] . Toutes les propositions de sommes simples, triangulaires… d'arcs, de carrés d'arcs… s'y ramènent via le changement "différentielle née de l'axe – différentielle née de l'arc", spécialité du *Traité des Trilignes*.

Il est à peine exagéré de dire que c'est la seule démonstration à la fois nouvelle et autonome de la valeur d'une intégrale dans le Traité.

C'est dire que ce résultat très simple, non-calcul qui plus est[12], vaut la peine qu'on s'y arrête de nouveau.

10 - D'après M. Marcel Raymond, *Baroque et Renaissance poétique*, page 55 ; cité par Ph. Sellier *Pascal et Saint Augustin* page 28.

11 - Voir la mise en image effectuée au chapitre IV, *Le quart de cercle comme espace clos…* paragraphe 3.

12 - Voir le paragraphe I.1 du chapitre V, *Divisions égales*.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

AVERTISSEMENT

> *Quand j'ai dit que (...) chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD, on n'a pas dû en être surpris, puisqu'on sait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude est indéfinie ; parce qu'alors la somme de toutes les touchantes égales entre elles, EE, ne diffère de l'arc entier BP, ou de la somme de tous les arcs égaux DD, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée(...)*

Pour le calcul de la somme des sinus, le rôle du cœur est essentiel ; le principe sur lequel tout repose

$$\Sigma \text{ DI DD } = \Sigma \text{ DI EE}$$

est un premier principe, inaccessible à la raison (DD n'est pas égal à EE!) et pourtant certain ; de plus la vision simultanée est essentielle, il faut voir ensemble tous les DD « en nombre indéfini » pour pouvoir les remplacer par tous les EE. La multitude *est* indéfinie.

Nous sommes dans le domaine du cœur pascalien, ou, pour le dire de façon plus laïque, c'est l'intuition qui est prépondérante dans l'avertissement : la saisie de la limite est immédiate, non développée de façon discursive et elle est aussi certaine que ces premiers principes dont Pascal fait état dans les fragments destinés à contrer les pyrrhoniens.

C'est la simultanéité (apanage de la vue, de l'intuition, du cœur, de l'esprit de finesse) et non la succession (apanage du discours qu'est la raison) qui a oeuvré pour produire ce résultat. Sauf à renoncer à calculer la somme, on ne pouvait faire autrement. Le XVII^{e} siècle mathématique n'est pas le XIX^{e}.

Mais le « cœur » ou « esprit de finesse » n'est pas seul à l'œuvre ici. Les trois ordres englobent les deux ordres que constituent le cœur et la raison ; et, dans leur forme achevée, ils les enrichissent d'une expression mathématique : chacun des ordres est infiniment supérieur à celui qui le précède.

Ce que Pascal a écrit sur les ordres d'infinis de grandeur vaut, à l'envers, pour les infinis de petitesse. Sous jacente au remplacement de DD par EE est l'idée que le deuxième ordre de petitesse (la différence entre DD et EE) s'efface devant le premier (et, si l'on prend *tous* les DD et *tous* les EE, cela revient à dire que le premier ordre de petitesse s'efface devant

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

le fini). Il est vrai que, comme rien n'est exprimé par Pascal à ce sujet dans l'*avertissement,* cela peut sembler gratuit de lui attribuer une intuition prémonitoire de cette grande idée du calcul intégral. Mais d'autres passages mathématiques viennent appuyer notre propos :

– Dans le Traité *De la sommation de puissances numériques* la somme de puissances n-ièmes de x est effectuée par divisions égales à l'aide de la formule du binôme ; des sommes partielles s'effacent devant l'une d'entre elles et la justification que donne Pascal est du type "ordres d'infinis".

– Une somme triangulaire d'éléments s'efface devant une somme pyramidale d'éléments du même ordre (trois) et Pascal donne la même justification, explicitement aussi.

Ce sont donc les autres textes qui nous conduisent à considérer comme raisonnable cette hypothèse : Pascal a l'intuition que la différence entre la courbe et la tangente est du deuxième ordre, et que c'est pour cela qu'elle ne compte pas une fois sommée, puisqu'alors elle produit un infiniment petit du premier ordre.

Car elles n'y ajoutent ni ôtent

écrit-il dans le plus beau passage apologétique sur les trois ordres, tandis qu'il écrit dans le traité de la sommation des puissances numériques

Les points n'ajoutent rien aux lignes, les lignes aux surfaces,
les surfaces aux solides

et que l'on trouve dans la lettre à Carcavi, à propos des sommes pyramidales et triangulaires

> *Car ces carrés étant 1,4 9, etc. il s'ensuit que la somme des ordonnées multipliées chacune par ces carrés, estla même chose que leur somme pyramidale prise deux fois moins leur somme triangulaire prise une fois. Or cette somme triangulaire n'est qu'un indivisible à l'égard des sommes pyramidales, puisqu'il y a une dimension de moins et que c'est la même chose qu'un point à l'égard d'une ligne, ou qu'une ligne à l'égard d'un plan, ou qu'un plan à l'égard d'un solide, ou enfin qu'un fini à l'égard de l'infini ;* ***ce qui ne change point l'égalité***

Une démonstration discursive était impensable en 1658 ; pour oser donner celle là, il fallait être persuadé que l'on peut, même en mathématiques, mettre en oeuvre autre chose que des notions «claires et distinctes» à la manière de Descartes :

– La vision directe et simultanée de tous les EE qui, au moment où ils ne sont plus clairement distincts des DD, fabriquent une démonstration certaine quoique non évidente : Pascal *ne montre pas* que la somme de EE diffère de la somme de DD d'une quantité moindre qu'aucune donnée et il serait bien en peine de le faire .

– L'effacement d'un ordre d'infini (dans la petitesse) devant un ordre supérieur

L' *avertissement* de la proposition I est donc l'effet d'une longue et profonde habitude de penser et repenser l'intuition (le cœur), la raison, les deux infinis, la hiérarchie des infinis.

Une raison d'insister sur cet avertissement qui est l'ossature de la démonstration de la proposition I, c'est que cette démonstration marque un moment important dans l'histoire du calcul intégral : le moment où celui-ci sort de la régularité.

Le calcul intégral des Grecs fait partie des activités de connaissance qui sont du côté de la raison. La méthode d'exhaustion est irréprochable du point de vue de la rigueur logique, or tous ces calculs irréprochables se font par l'intermédiaire des divisions régulières. La régularité peut être arithmétique ou géométrique, mais elle est toujours là. Ceux des mathématiciens du XVII[e] siècle qui ne raisonnent plus par la méthode des indivisibles (première manière, celle de Cavalieri) font toujours des calculs à base de régularité : Fermat, Wallis... Quant à la méthode des indivisibles, elle ne fait pas de calcul autonome, elle égale une intégrale à une autre, connue grâce à la régularité d'une manière ou d'une autre. Le premier calcul autonome et hors régularité est donc là, effectué par Pascal, c'est celui de la somme des sinus. Il est un coup de force, une rupture, l'irruption d'une nouvelle manière de calculer l'infini, l'ouverture vers le calcul intégral des fonctions transcendantes, des courbes mécaniques, calcul refusé par Descartes.

Que Pascal n'en ait pas eu conscience, qu'il ait continué à d'innombrables reprises à s'attacher à la régularité par ces divisions égales rendues caduques par ses propos mêmes, ne change pas le fait : c'est par le "cœur" et par les "ordres" que le calcul intégral est sorti des progressions arithmétiques et géométriques.

Nous sommes au XX[e] siècle, siècle laïque (en Occident) où la Métaphysique, la Foi sont séparées de la Science. Et notre lecture de Pascal mathématicien a tendance à oublier qu'il n'en était pas ainsi *pour lui*, ni pour

Leibniz[13]. La vie de Pascal est jalonnée de conversions déchirantes, de renoncements au monde (donc aux sciences et aux mathématiques) qu'il n'arrive jamais à faire vraiment, mais qui prouvent au moins à quel point l'apologétique est plus importante *pour lui* que son travail scientifique. Le *Traité de la Roulette* écrit quatre ans avant sa mort est sa dernière oeuvre scientifique ; le nom d'auteur qu'il y prend *Amos Dettonville* est l'anagramme de *Louis de Montalte* sous lequel étaient écrites les Provinciales, et aussi celui de *Salomon de Tultie*, projet de nom pour l'auteur de l'*Apologie* (*les Pensées*). "On remarquera que les deux derniers prénoms, Amos et Salomon, offrent un caractère biblique très significatif. C'est dire que, pour Pascal, il existait entre les trois ouvrages une unité plus profonde que celle d'un même auteur : celle d'un même dessein"[14].

D'autres faits : Pascal ne publie pas le *Traité du triangle arithmétique*, pour ne pas faire œuvre mondaine, mais publie le *Traité de la Roulette* sur la demande du Duc de Roannez "Ayant communiqué sa découverte au Duc de Roannez, mais se refusant à en rien publier, pour demeurer fidèle à la résolution du *Mémorial* : « Oubli du monde et de tout hormis Dieu », Pascal fut amené à un autre point de vue par son ami, qui lui représenta l'heureux effet qu'aurait pour le succès de son dessein apologétique, sa plus chère entreprise du moment, la manifestation de son génie scientifique : argument puissant contre l'identité souvent posée entre croyance et faiblesse d'esprit."[15]

Peut on comprendre Pascal en faisant abstraction de ce qu'il considère comme essentiel ? A notre avis, non. L'œuvre mathématique de Pascal est tissée des mêmes fils que son oeuvre apologétique.

4 - L'avertissement et la vision paradoxale du monde qui est celle des Pensées

Lucien Goldmann remarque que la distance est grande entre le texte rationaliste des *Provinciales* (1657) et le texte paradoxal des *Pensées* entrepris à peine plus tard et contemporain du *Traité de la roulette*. Il explique ce changement radical par une conversion de 1657 qui aurait échappé à la

13 - On l'oublie encore plus, car l'œuvre mathématique de Leibniz est monumentale, beaucoup plus importante que celle de Pascal. Le projet de Leibniz est philosophique et religieux.
14 - J. Mesnard, *Blaise Pascal, Œuvres complètes*, T. IV, page 368.
15 - Ibidem, page 168.

plupart des critiques et dont Pascal serait sorti avec une *vision tragique* du monde et de Dieu[16]. En quoi consiste cette vision tragique que Goldmann attribue à Pascal dans les *Pensées* – et à Racine dans *Phèdre* – ? A dire oui et non à la fois. A développer une dialectique statique et sans issue, d'où le tragique. A concevoir Dieu caché, comme présent et absent, à parler du juste pécheur, à refuser le monde tout en étant plongé dedans (Pascal ne s'est jamais retiré comme Barcos). De très nombreux fragments des *Pensées* ont ce caractère paradoxal. L'infiniment petit a ce double caractère de présence et d'absence : sa présence est nécessaire pour faire le calcul, et sa disparition l'est tout autant pour que le dit calcul soit juste ; la contradiction ne sera levée que bien plus tard par un changement de cadre dont le prix sera très cher.

Si l'avertissement n'a bien évidemment pas de caractère tragique, il est en tous cas le signe que son auteur ne craint pas ce paradoxe qu'est la démonstration d'un résultat juste par des considérations fausses du point de vue de la stricte raison. Pascal ne doute à aucun moment de son calcul de l'infini, il semble au contraire mû par une certitude intérieure d'avoir raison *au delà* des apparences. La vision du monde du *Traité de la roulette* est bien davantage celle des *Pensées* que celle des *Provinciales.*

16 - Lucien Goldmann, *Le Dieu caché. Etude sur la vision tragique dans les Pensées de Pascal et dans le Théâtre de Racine*.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

ANNEXE 1

RAPIDE SURVOL DES SEPT TRAITÉS

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Annexe 1 - Rapide survol des sept traités

1 - Lettre de M. Dettonville à M. de Carcavi

Dans ce premier Traité, la *Lettre*, tout est mis en place. Pascal s'adresse directement au lecteur avec le souci d'indiquer les voies par lesquelles il est parvenu à résoudre tous les problèmes de roulette. Ceux-ci sont énoncés en détail et séparés en énoncés de Juin (problèmes d'aires planes et de volumes), d'Octobre (problèmes de lignes et de surfaces courbes), après que Pascal ait longuement disserté, d'une part sur sa *méthode générale des centres de gravité*, d'autre part sur sa *méthode des indivisibles*, très personnelles toutes les deux.

* La *méthode générale des centres de gravité* est d'abord exposée dans le cas discret. C'est une réécriture de la loi du levier d'Archimède qui se fait avec un concept forgé exprès, celui de somme triangulaire, manière pascalienne de dire qu'un poids placé k fois plus loin “pèse” k fois plus. La *méthode générale* revient à notre actuelle formule de l'abscisse du centre de gravité, dans le cas particulier où les poids sont régulièrement espacés.

Les sommes pyramidales, sommes triangulaires de sommes triangulaires, moins immédiatement chargées de sens mécanique par Pascal entrent dans une relation de calcul explicite

$$2 \sum_{\text{pyr A}} A, B, C, D \ldots - \sum_{\text{triangA}} A, B, C, D \ldots = \sum_{\text{simple}} 1^2A, 2^2B, 3^2C, 4^2D \ldots$$

Pour que cette *méthode générale* s'applique au continu, il faut subdiviser celui-ci en éléments infinitésimaux.

* Un célèbre avertissement sur la *méthode des indivisibles* met alors en place tout un système de sommes (simples) de lignes droites ou courbes en précisant que dans les sommes les lignes doivent toujours être multipliées par les éléments infinitésimaux géométriques nés de la subdivision indéfinie en parties égales d'une autre ligne. Quand cette autre ligne est la courbe,

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

les sommes sont de «sinus» ; quand cette autre ligne est un axe, les sommes sont d'«ordonnées» ou d'«arcs». Les justifications données en langage courant sont remarquablement claires et intuitives, revenant toujours à dire que l'erreur faite, lorsque le nombre de subdivisions devient infini, est moindre qu'aucune quantité donnée.

Muni de ces différentielles géométriques, Pascal peut passer les sommes triangulaires et pyramidales au continu. Le huitième des dix avertissements par lesquels Pascal s'adresse au lecteur montre que dans de telles sommes les différentielles géométriques doivent être prises d'ordre 2 et 3 respec-tivement. Le même avertissement transforme les sommes triangulaires en sommes simples, d'autres éléments bien sûr . Et montre – ô surprise – que l'égalité ci-dessus se simplifie.

Pascal dispose dès lors d'un foisonnement de sommes d'expressions aussi composées qu'il le désire, sommes simples d'arcs multipliés par des carrés d'ordonnées, sommes triangulaires de sinus au cube… et d'un code pour sous-entendre les éléments différentiels par lesquels sont multipliées les expressions à sommer. Ce code est mis en place dans le cinquième avertissement (la *méthode des indivisibles*, toujours), avec la rigueur du logicien de Port-Royal rompu à la réflexion sur les définitions de nom.

Le style de la *Lettre* porte la marque de Port-Royal, éclairer plutôt que convaincre. Pascal se satisfait de donner «l'air de la démonstration» en quelques lignes simples et sur des cas particuliers.

La variété des différentielles géométriques est, à notre avis, la clé des solutions, si l'on y ajoute la versatilité, que le Traité suivant va leur conférer.

2 - Traité des Trilignes rectangles et de leurs onglets

Le plus beau, le plus étrange, car le plus impossible des sept.

Le *Traité des Trilignes* est le seul des grands Traités, avec la *Lettre*, à ne pas être un *Traité du cercle*, ni de la roulette, donc… C'est un traité de métamorphoses des différentielles dans lequel d'ingénieuses figures sont chargées des transformations.

Une figure comportant à gauche une partie-triligne fixe mais quelconque, et une partie-triligne variable à droite engendre autant de formules égalant des sommes pascaliennes que de formes assignées à la partie droite. Sans compter un *Lemme* très général quand la partie droite de la figure reste générale elle aussi. Cinq propositions particularisées, où les différentielles dx et dy s'échangent, naissent de cette figure. Ces propositions, nous pouvons les traduire mot à mot aujourd'hui en formules d'"intégration par parties" (IPP) dans une écriture anachronique dont le seul avantage est qu'elle permet d'appréhender sous un même nom les 15 propositions du *Traité des Trilignes*.

La même figure remaniée de sorte que la partie gauche rectifie la partie droite, fournit six copies (géométriquement méconnaissables) des propositions précédentes, avec d'éventuels dédoublements.

Toutes les démonstrations se font en relevant la partie droite de la figure pour créer un volume.

Enfin des doubles calculs de centres de gravité de ce volume fabriquent les plus belles formules égalant des "intégrales" du traité. Ces quatre dernières propositions signifient aussi des échanges entre dy et ds, avec leurs étranges seconds membres, intégrales curvilignes d'intégrales ordinaires. La géométrie est devenue formelle, le sens n'est plus que de calcul. Sur ces formules d'IPP mêlées d'intégrale double s'achève le *Traité des Trilignes*.

La géométrie démontre le calcul dans une démarche inverse de celle de Descartes. Ce sont les beautés secondaires de l'absence d'écriture symbolique de Pascal.

Quel est le rôle de ce Traité général qui ne parle pas de roulette ? C'est d'être un passage obligé des calculs, un stade de transformation des expressions. Quand les problèmes sont posés naturellement avec certaines différentielles et résolubles commodément avec d'autres. Par exemple :

* Les bonnes ordonnées de la roulette sont ses x (dy obligés), le solide autour de la base est une somme de $y^2\,dx$, les propositions d'échange de différentielles $dx \leftrightarrow dy$ trouvent leur emploi dans ce type de «Problèmes de Juin» (aires planes, volumes et leurs centres de gravité).

* Quant aux propositions d'échange abscisse curviligne ↔ abscisse ordinaire, on les voit à l'œuvre dans les Problèmes d'Octobre (aires courbes et leurs centres de gravité) Mais par le jeu des métamorphoses géométriques, le s de la roulette a complètement disparu, rectifié en x de cercle ; cependant que le x de la roulette s'est scindé en deux morceaux, dont un s de cercle (…). C'est là qu'interviennent les quatre dernières propositions du *Traité des Trilignes*, dont les deuxièmes membres sont calculables pour un triligne-quart de cercle.

L'algébrisation est étrangère à ce Traité qui géométrise les problèmes de géométrie.

La géométrie n'est jamais si calculante que dans cette œuvre d'art, posée là hors du temps.

3 - Propriétés des sommes simples, triangulaires et pyramidales

C'est un traité technique qui répond d'avance aux questions que l'on pourra se poser, comme :

– Si l'on connaît une somme triangulaire à partir d'un sommet comment l'avoir à partir de l'autre ?

– Que devient une somme pyramidale lorsqu'on ajoute une constante à tous ses éléments ?

Et à d'autres plus compliquées.

Pour le résumer brièvement, c'est un traité qui exprime la "linéarité de l'intégrale".

4 - Traité des Sinus du quart de cercle

Comme son nom l'indique, c'est un pur traité du cercle.

Les différentielles naissent de l'arc de cercle, c'est pourquoi les expressions à sommer sont des *sinus*, des puissances de *sinus* etc.

Les *sinus sur la base* sont nos actuels sinus.

La proposition I «La somme des sinus est une différence de cosinus» est obtenue sans aucun calcul, par une technique de primitive dont la généralité n'est pas repérée. Elle est la seule de tout le Traité dont on puisse dire cela. Un célèbre avertissement justifie par des arguments intuitifs très audacieux que l'arc de courbe peut être remplacé par le morceau de tangente sans erreur finale à l'infini.

Les propositions II, III, IV transforment les sommes de $\sin^2 \alpha$, $\sin^3 \alpha$, $\sin^4 \alpha$ en sommes d'ordonnées à la puissance inférieure. Pascal dépense beaucoup d'énergie pour les démontrer, il s'agit pourtant d'un simple changement de variable. Mais là où nous n'aurions qu'à écrire $\sin\alpha \, d\alpha = d[\cos\alpha]$, Pascal se heurte à un écueil : le changement ne respecte pas l'égalité des divisions. Même écueil pour les curieuses propositions V et VI : les divisions égales ne peuvent pas être partout à la fois.

Le *Traité des Sinus* se poursuit avec deux propositions, la VII et la VIII sur les sommes triangulaire et pyramidale de sinus. Elles reviennent à calculer une intégrale double et une triple respectivement.

La proposition IX donne la valeur d'une somme curviligne d'espaces circulaires. Elle fait double emploi avec l'ensemble des propositions III et VII du *Traité des Arcs*. Elle calcule, d'avance et sans dire pourquoi, le deuxième membre d'une égalité montrée dans le *Traité des Trilignes*, égalité dont l'utilité apparaîtra au moment de la résolution d'un des Problèmes d'Octobre, tout à la fin !

La proposition X ressemble à la IX, mais calcule une somme triangulaire curviligne d'espaces circulaires… On commence à quitter complètement le terrain de l'intuition. La géométrie se fait calcul, visiblement.

Le *Traité des Sinus* est remarquable par tout ce qui concerne la somme des sinus : le Lemme mettant en évidence un triangle caractéristique, le savant mélange de rigueur et d'intuition de l'avertissement, le lien entre quadrature et dérivée et le sens de l'infini qui sont à l'oeuvre pour trouver $\int \sin\alpha \, d\alpha$ sans l'aide d'aucune expression algébrique, sans l'ombre d'un calcul.

5 - Traité des Arcs de cercle

Comme le *Traité des Sinus*, le *Traité des Arcs* est un traité du cercle. On peut le diviser en deux parties

* Une première, facile, où les différentielles naissent de l'axe et sont transformées en différentielles naissant de l'arc.

* Une deuxième où elles naissent de l'arc.

Seule la deuxième partie achève les calculs.

La première partie

Pascal s'occupe des sommes – simples, triangulaires, pyramidales – d'arcs, de carrés d'arcs etc, et en fait des sommes des trois sortes de sinus, carrés de sinus… Autrement dit des sommes d'expressions du genre $s^n y^m dy$ sont égalées à des sommes d'expressions du genre $y^p s^r ds$. Il n' y a rien à démontrer, mais simplement à lire le *Traité des Trilignes* pour un quart de cercle. La première partie du *Traité des Arcs* consiste tout juste à *voir*, par l'intermédiaire de ce pont qu'est le *Traité des Trilignes*, des sommes d'arcs comme sommes de sinus. A quoi sert-elle? Les ordonnées à l'axe de la roulette sont en partie des arcs de cercle, leurs sommes sont des sommes d'arcs, donc de sinus, donc du ressort du *Traité des Sinus* – cet autre pur traité du cercle, qui, à la différence du *Traité des Arcs* les calcule effectivement.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

La deuxième partie

Les causes finales n'apparaissent pas clairement dans la rédaction, de type formaliste. Pourtant cette deuxième partie – l'essentiel du *Traité des Arcs* – est tout entière tendue vers un seul but restreint et difficile : calculer pour un triligne-cercle les deuxièmes membres des 4 dernières propositions du *Traité des Trilignes*, ces “intégrales curvilignes d'intégrales” que sont

$$\int \int x\,dy\ \ ds,$$

$$\int s \int x\,dy\ \ ds, \qquad \int \int y\ \ x\,dy\ \ ds, \qquad \int \int x^2\ \ dy\ \ ds$$

Pour ce faire, les espaces circulaires sont découpés en secteurs et triangles, multipliés par des bras variés, puis par l'élément d'arc, et enfin sommés. Tout sens géométrique, ou presque, est perdu – quelle signification visuelle accorder à une somme curviligne de secteurs circulaires mutipliés par leur bras sur l'axe ?

C'est ainsi que Pascal calcule **sans primitive**, les intégrales indéfinies, premiers membres des quatre propositions en question

$$\int \alpha \cos^2\alpha\ \ d\alpha, \ \int \alpha^2 \cos^2\alpha\ \ d\alpha, \ \int \alpha \sin\alpha \cos^2\alpha\ \ d\alpha, \ \int \alpha \cos^3\alpha\ \ d\alpha$$

Totalement inféodé au *Traité des Trilignes*, le *Traité des Arcs* n'en a pas la beauté. Mais il est une prouesse technique du calcul sans primitive. Pour s'en convaincre il suffit de s'essayer à ces calculs en s'interdisant l'algorithme !

Comme dans le *Traité des Trilignes*, les objets géométriques abandonnent leur essence. Manipulés comme des symboles, ils remplacent les automatismes que Pascal ne possède pas.

6 - Petit Traité des solides circulaires

C'est un traité du cercle, les solides circulaires étant produits par la rotation d'un arc de cercle.

L'élément différentiel naît de l'axe. Il est question de sommes (simples, triangulaires…) de puissances d'*ordonnées* du cercle, donc.

Beaucoup de résultats déjà établis par Archimède et Guldin sont repris en compte par Pascal et éventuellement remaniés.

Par exemple, Guldin relie le centre de gravité d'un arc de cercle avec celui du secteur circulaire correspondant. Pascal montre alors que les méthodes de calcul qu'il déploie dans le *Traité des Sinus*, alliées à la méthode de Guldin – légèrement généralisée – permet de relier la surface sphérique engendrée par la rotation de l'arc et le secteur sphérique correspondant.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

La somme des puissances quatrièmes d'ordonnées du cercle se fait en utilisant les résultats d'Archimède sur la parabole – aire et centre de gravité –. La parabole en question ayant pour ordonnées les carrés de celles du cercle Pascal en fait un outil de "changement de variable"…

Par Archimède, Guldin, et par ses propres Traités, Pascal donne les moyens de calculer une foule de sommes comme celles de cubes, de puissances quatrièmes d'ordonnées, puis la somme triangulaire des carrés d'ordonnées, la somme pyramidale des ordonnées… toujours dans le cercle.

Ajoutons que ce traité donne le moyen de calculer les mêmes sommes lorsque l'on retranche un terme constant aux ordonnées.

7 - Traité général de roulette

Il faut arriver à ce final de l'œuvre sur la roulette pour repérer la logique de l'ensemble. Les énoncés sont répétés, sauf ceux qui concernent la ligne courbe. Les problèmes de roulette sont soigneusement traduits en problèmes de cercle, beaucoup plus nombreux.

Problèmes de Juin

La réduction de la roulette au cercle vient de l'égalité de roulement sans glissement, $x_{roulette} = x_{cercle} + arc_{cercle}$.

Il y a six sommes à calculer. Pascal donne de façon concise la marche des calculs en indiquant les visites successives dans les sept traités.

Problèmes d'Octobre

Grâce à Wren, Pascal sait que les arcs de la roulette ont deux fois la longueur des cordes à même hauteur de la roue. Il fabrique alors la troisième figure à transmuer les différentielles du *Traité de roulette*, figure particulière, ce que n'étaient pas les deux autres. Cette *Figure des Problèmes d'Octobre* rectifie les différentielles de la courbe-roulette en différentielles de l'axe d'un quart de cercle double de la roue.

Tout d'abord les trois problèmes de surface courbe – les seuls qui restent d'Octobre – sont traduits en cinq problèmes du cercle-roue assez complexes, avec des éléments infinitésimaux nés de différences de cordes en étoile.

Puis la résolution se fait en passant

– soit dans le cercle double, ce qui a pour effet de faire voir sur la base les différentielles "différences de cordes en étoile" (les d(CD) deviennent des MM, plus maniables).

– soit dans une parabole.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Pascal n'a jamais fait aucun calcul et termine par ces mots non dépourvus d'humour involontaire

> *Il sera sur cela facile à tout le monde de trouver les calculs de tous ces cas, par le moyen de ces méthodes.*

Schéma de l'ensemble

Comme on l'a vu dans le chapitre *Un calcul à la manière de Pascal*, le quart de cercle est, dans le *Traité de la Roulette*, le seul lieu où tout se résout. Il est pratique de voir le schéma constructeur de l'ensemble des sept Traités comme ceci :

– Un premier groupe comprend les traités qui démontrent des propositions générales,

– Un deuxième groupe ceux qui démontrent des propriétés ayant lieu dans le cercle ou la sphère,

– Un troisième groupe traduit les questions sur la roulette en questions sur le cercle.

Au premier groupe appartiennent

– La *Lettre*

– Le *Traité des Trilignes* (qui est un traité d'intégration par parties) et dont le seul but est d'égaler certaines intégrales "générales" à certaines autres, sans résoudre

– Le *Traité des sommes* simples, triangulaires…

Au deuxième groupe appartiennent

– Le *Traité des Arcs de cercle*

– Le *Traité des Sinus* du quart de cercle, traité d'intégrale curviligne.

– Le petit *Traité des solides circulaires*

Ces traités font les calculs ou les ramènent à des résultats connus, calculables, c'est même ce qui les caractérise.

Au troisième groupe appartient le dernier traité.

Les deux traités de cercle sont en position médiane : ils dénouent les problèmes que ceux du premier groupe ont posés autrement et, grâce au traité du troisième groupe permettent de découvrir la solution des dix-huit problèmes posés sur la roulette.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Annexe 2

Le traité de la roulette, les problèmes qu'il résout, sa place dans le monde scientifique du XVII^{e} siècle

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Annexe 2 - Le traité de la roulette, les problèmes qu'il résout, sa place dans le monde scientifique du XVII^e^ siècle

Rappelons, comme il est dit dans l'introduction, que le *Traité de la roulette* est l'exposé, en sept petits Traités, écrits en 1658, de méthodes donnant tout ce qu'il faut pour résoudre les dix-huit problèmes que voilà :

I – L'aire de l'espace CZY ; son centre de gravité. (3 problèmes en tout, car celui du centre de gravité est double).

II – Le volume du solide engendré par la rotation d'un demi-tour autour de ZY ; son centre de gravité.

III – Le volume du solide engendré par la rotation d'un demi-tour autour de CZ ; son centre de gravité.

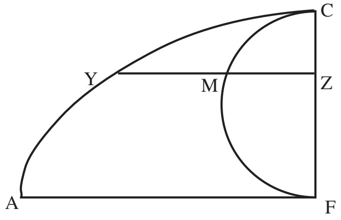
IV – La longueur de l'arc CY ; son centre de gravité.

V – L'aire de la surface courbe engendrée par la rotation d'un demi-tour de l'arc CY autour de ZY ; son centre de gravité.

VI – L'aire de la même surface courbe... autour de CZ ; son centre de gravité.

La roulette est la courbe engendrée par le point C lorsque le cercle de diamètre FC roule sans glisser sur la droite AF.

Le centre de gravité est repéré par ses deux distances, à la *base* YZ, à l'*axe* CF, dites *bras sur la base*, *bras sur l'axe* respectivement.



Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

1 - Les circonstances d'un concours

La soeur de Pascal, Gilberte Périer raconte que le *Traité de la roulette* serait le fruit d'une violente rage de dents et de l'insomnie qui s'ensuivit chez son frère

Ce renouvellement des maux de mon frère commença par le mal de dents qui lui ôta absolument le sommeil. Mais quel moyen à un esprit comme le sien d'être éveillé et de ne penser à rien ? C'est pourquoi dans les insomnies mêmes, qui sont d'ailleurs si fréquentes et si fatigantes, il lui vint en une nuit dans l'esprit quelques pensées sur la roulette. La première fut suivie d'une seconde et la seconde d'une troisième, et enfin d'une multitude de pensées qui se succédèrent les unes aux autres. Elles lui découvrirent comme malgré lui la démonstration de la roulette dont il fut lui-même surpris. Mais comme il y avait longtemps qu'il avait renoncé à toutes ces choses, il ne pensa pas seulement à rien écrire . Néanmoins en ayant parlé à une personne à qui il devait toute sorte de déférence et par respect à son mérite, et par reconnaissance de l'affection dont il était honoré, cette personne forma sur cette invention un dessein qui ne regardait que la gloire de Dieu, et engagea mon frère à écrire tout ce qui lui était venu dans l'esprit et à le faire imprimer[1]

Gilberte n'était pas mathématicienne : le *Traité de la roulette* est beaucoup trop complexe pour avoir été conçu en une nuit ; en revanche il faut retenir que Pascal avait, depuis la nuit de feu de sa seconde conversion (1654), renoncé au monde

Oubli de tout hormis de Dieu[2]

S'il prit le parti de faire connaître au monde son travail mathématique ce fut initialement pour des raisons apologétiques ; il méditait en effet à ce moment la grande oeuvre de sa vie : l'*Apologie pour la religion chrétienne* (plus connue sous le nom de *Pensées*), et le Duc de Roannez réussit à le persuader qu'un ouvrage scientifique donnerait du poids à ses arguments contre l'incroyance. Pascal décide alors de lancer un défi à ses contemporains ; s'appelant lui-même l'Anonyme, il pose des problèmes (dont les énoncés sont parmi ceux cités plus haut et varient avec le temps) et propose de récompenser par un prix les deux premiers qui auront envoyé une solution. Ces solutions doivent être envoyées à Carcavi, avant une date précise, qui, elle aussi, a varié avec le temps. L'Anonyme prévient les concurrents que, au cas où personne n'aurait donné les solutions à la date limite, il publiera les siennes. C'est ce qui s'est passé, du moins aux dires de Pascal, et le *Traité de la Roulette* fut publié en Janvier 1659, sous le pseudonyme d'Amos Dettonville cette fois.

1 - *La vie de Pascal,* par Gilberte Périer, sa soeur. in J. Mesnard t.I p. 623.

2 - Mémorial

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

2 - Les lettres circulaires. Les problèmes de Juin, ceux d'Octobre

Pascal rédigea entre Juin 1658 et Janvier 1659 huit lettres et récits à l'adresse des participants au concours, certaines dans le style du polémiste des Provinciales. Voici leur titre, très parlant lorsqu'il est de Pascal, et leur contenu, résumé :

Problèmes sur la cycloïde
proposés en Juin 1658 [3]

Pascal propose aux « plus éminents géomètres de toute la terre » de résoudre les problèmes I II et III pour une *cycloïde quelconque*. Il précise que les calculs, très difficiles, risquant d'être trop longs à écrire en entier, il suffira de donner les méthodes. Si l'on préfère on pourra donner un calcul complet dans les cas où Z est en F et où Z est au milieu de CF.

La date limite est le mois d'octobre 1658. Les solutions doivent être envoyées à Monsieur de Carcavi. Le premier en date aura quarante pistoles, le deuxième vingt. Si personne ne trouve les solutions Pascal («Anonyme» dans cette première lettre) s'engage à rendre les siennes publiques.

Suit une description de la cycloïde, d'après Torricelli

Pascal fait montre d'une grande indulgence à propos d'éventuelles erreurs de calcul.

Seconde lettre circulaire relative à la cycloïde[4]
19 Juillet 1658

Carcavi ayant signalé à Pascal comme une "incertitude" dans sa première lettre l'emploi du terme *cycloïde quelconque* alors qu'une seule définition de *cycloïde* était présente, Pascal précise qu'il s'agit de la cycloïde ordinaire, celle décrite par Torricelli et dont il a fait état dans sa première lettre. Pascal parle des autres espèces de cycloïdes auxquelles il serait facile d'étendre les solutions obtenues. Ainsi *quelconque* veut dire *comme on la connaît* et ne s'oppose pas à *allongée ou accourcie*[5].

Pascal profite de cette deuxième lettre pour dire qu'il faudra :

– Ou bien donner les démonstrations très abrégées en étant prêt à fournir « leur absolue totalité au premier signe de Monsieur de Carcavi »

3 - La pièce est sans titre ; celui-là est celui de l'édition Bossut.
4 - Même chose ; ce titre est celui de l'édition Brunschvicg
5 - Si le point C au lieu d'être sur le cercle, est *extérieur* ou *intérieur* , la cycloïde est *allongée* ou *accourcie*.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

– Ou bien fournir un calcul, à savoir celui du centre de gravité du demi-solide autour de la base AF.

En réalité il s'agit d'une modification, les problèmes I et III sont complètement éliminés du calcul demandé en alternative ; et ne subsiste du problème II que le centre de gravité.

Il n'est pour le moment pas question des problèmes IV, V et VI, mais seulement des problèmes I, II et III, ceux que l'on appelle les *Problèmes de Juin*.

Reflexions sur les conditions des prix[6] attachés à la solution des problèmes concernant la cycloïde Lettre circulaire du 7 octobre 1658

C'est une réponse au mécontentement de certains concurrents. Le délai est très court et avantage les français ; en effet d'une part ces derniers ont eu les énoncés avant ceux des pays éloignés, d'autre part la date qui fait foi est celle où Carcavi **reçoit** les solutions, ainsi les étrangers ont à tenir compte deux fois du retard dû au courrier. Visiblement c'est le mathématicien anglais Wallis qui est visé dans cette lettre où Pascal s'adonne à l'une de ses activités favorites, la polémique ; l'adversaire est terrassé par une logique implacable, mais personne n'est nommé

> *Certainement si mon intention avait été telle[7] et si les paroles de mon écrit le marquaient, je serais bien suspect d'avoir proposé une chimère en proposant les prix, puisque j'aurais pu ne les donner jamais, et que, quiconque se fût présenté au 1er octobre avec ses solutions, j'aurais toujours pu le remettre, dans l'attente de quelque vaisseau qui ayant eu le vent favorable en portant mes écrits, pouvait l'avoir contraire, ou même être péri, en rapportant les réponses. Et même ceux qui auraient gagné les prix en se trouvant les premiers entre ceux dont on a reçu les solutions au 1er octobre ne seraient jamais en assurance d'en pouvoir jouir, puisqu'ils leur pourraient être toujours contestés par d'autres solutions qui pourraient arriver tous les jours premières en date et qui les excluraient sur la foi des signatures des bourgmestres et officiers de quelque ville à peine connue du fond de la Moscovie, de la Tartarie, de la Cochinchine ou du Japon. Et même il y eût eu trop de tromperies à craindre sur cela ; et il n'y eût eu aucune sûreté à produire ses solutions à l'examen, puisque des plagiaires auraient*

6 - Titre de l'édition Bossut
7 - De prendre en compte la date de départ, du pays étranger.

> *pu les déguiser et les dater d'auparavant, en les faisant venir de quelqu'île bien éloignée.*

Ensuite Pascal met au point de façon magistrale la question des erreurs de calcul : s'il n'y a que le calcul, et pas la démonstration le calcul doit être juste

> *Car ce que les paralogismes sont en démonstration, les erreurs de calcul le sont quand le calcul est seul*

Cette fois, c'est le Père jésuite Lalouvère qui est visé, ridiculisé comme Wallis, et comme lui aussi non nommé...

Il est bon de remarquer que Pascal emploie au début de la lettre le terme de Trochoïde pour la première fois, et que ce terme est celui de Roberval[8].

Histoire de la roulette appelée autrement trochoïde ou cycloïde où l'on rapporte par quels degrés on est arrivé à la connaissance de la nature de cette ligne 10 octobre 1658

Pascal retrace l'histoire de la roulette, courbe inconnue des anciens, remarquée pour la première fois par Le P. Mersenne en 1615 ; Mersenne proposa la recherche de la nature de cette ligne à tous les géomètres d'Europe, entre autres à Galilée, mais tous désespérèrent.[9]

Pascal reconnaît la paternité de Roberval pour le problème I, ainsi que pour les calculs de volume tant autour de la base qu'autour de l'axe (ce qui constitue une partie des questions II et III). Pourquoi des questions déjà résolues ont elles été mises au concours ? Pascal n'en dit mot.

Pascal s'étend beaucoup sur les mérites de Roberval (dont la réputation de caractère n'est pas à faire), accuse Torricelli de plagiat, rend hommage à Wren qui, le premier, a mesuré la ligne courbe de la roulette et

8 - Ce fait est très signifiant. Il a été remarqué par Pierre Boutroux, PASCAL, *Œuvres*, éd. Brunchvicg-Boutroux-Gazier, t. VIII p. 159. Et constitue l'une des pistes qui ont permis à Pierre Costabel de mettre au jour "Les Secrets des Traités de la Roulette" dans son article du même nom.

9 - Galilée aurait pesé la surface, en aurait conclu qu'elle était égale à trois fois celle du cercle.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

de ses parties, et charge le P. Lalouvère, qui n'aurait rien résolu que Roberval n'ait déjà déjà fait depuis longtemps.

Pascal attend pour divulguer publiquement son calcul que toutes les solutions reçues aient été examinées, et il ajoute les problèmes IV, V et VI, dont aucune mention n'avait été faite jusque là ; la date limite pour envoyer les solutions de ces *problèmes d'octobre* est le 31 Décembre. Ce moment expiré, si personne n'a rien trouvé, Pascal divulguera ses propres solutions, ainsi qu'un supplément

> *la dimension générale des lignes courbes de toutes les cyloïdes allongées ou accourcies ; lesquelles ne sont pas égales à des lignes droites, mais à des ellipses.*[10]

Récit de l'examen et du jugement des écrits envoyés pour les prix proposés publiquement sur le sujet de la roulette, où l'on voit que ces prix n'ont point été gagnés, parce que personne n'a donné la véritable solution des problèmes
25 novembre 1658

Ce court écrit raconte que les deux seules solutions examinées sont irrecevables. Les auteurs ne sont pas nommés, mais leur identité ne fait aucun doute, une fois de plus.

Il s'agit tout d'abord de Lalouvère, qui a choisi d'envoyer le calcul (demandé à la fin de la deuxième lettre : celui du centre de gravité du solide autour de la base) et non pas une idée de méthode ; or son calcul est grossièrement faux puisque, dit Pascal

> *Dans un solide aigu par une extrémité et qui va toujours en s'élargisssant vers l'autre, il assigne le centre de gravité vers l'extrémité aiguë, ce qui est visiblement contre la vérité*

Et Pascal répète que dans la mesure où le calcul a été envoyé seul, on ne peut pas savoir si les erreurs sont de calcul ou de méthode. Lalouvère a d'ailleurs reconnu son erreur.

La deuxième partie de la lettre est consacrée à Wallis ; plus mathématicien que Lalouvère, il a choisi d'envoyer une méthode générale pour la résolution de tous les problèmes en 54 articles (de ce point de vue sa démarche est donc voisine de celle de Pascal). S'étant aperçu de quelques

10 - Ces questions ne figurent pas dans le *Traité de la Roulette*, mais dans la *Lettre de M. Dettonville à M. Huygens* (1659)

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

erreurs, il montre une certaine défiance par rapport à ses autres solutions et, chose surprenante, il demande "si l'on ne se contenterait pas d'une solution approchante de la véritable". Comme il indique dans la même lettre qu'à son avis "les défauts qui pouvaient être dans ses solutions n'empêchent pas que la difficulté des problèmes ne fut suffisamment surmontée", on accepte d'examiner ses solutions. Et là Pascal est très sévère : non seulement, dit-il, Wallis s'est trompé dans des problèmes résolus depuis longtemps par Roberval (comme le centre de gravité de la demi-roulette et de ses parties, la dimension des solides autour de l'axe), mais encore ses erreurs dans les seuls véritables problèmes proposés par l'Anonyme (centre de gravité des solides et de leurs parties) ne sont "point de calcul, mais de méthode, et proprement des paralogismes".

Une étude très détaillée des écrits de Wallis par Kokiti Hara montre que le deuxième paralogisme dont Wallis est accusé (à propos du centre de gravité des solides autour de l'axe) n'en est pas un ; c'est Pascal qui n'a pas compris que Wallis négligeait des infinitésimaux d'ordre supérieur[11] .

Suite de l'histoire de la roulette où l'on voit le procédé d'une personne qui s'était voulu attribuer l'invention des problèmes proposés sur ce sujet[12]
12 décembre 1658

Heureusement, commence Pascal, que certains incidents arrivent à rendre divertissantes les matières si sérieuses de la géométrie. La méchanceté de l'entrée en matière de ce réquisitoire contre Lalouvère n'a d'égale que celle de sa conclusion.

Lalouvère est accusé d'avoir connu le résultat de Roberval sur la dimension du solide de la roulette autour de l'axe, vieux de 22 ans[13], avant de l'avoir redémontré par ses propres méthodes (balance d'Archimède). Une nouvelle démonstration d'un résultat, même si l'on n'en a pas eu connaissance auparavant n'a pas de valeur... a fortiori, si l'on en a eu connaissance.

11 - Kokiti Hara *L'Œuvre mathématique de Pascal* p.189.
12 - Ces trois titres sont de Pascal, comme cela se voit...
13 - Que Pascal ne connaissait pas, lorsqu'il posa les problèmes de Juin. Cf. ci-dessous.

Quant aux problèmes nouveaux, Lalouvère a donné un calcul faux et prétend avoir le calcul juste ainsi que tous les autres calculs avec leurs démonstrations. Mais il refuse obstinément de les faire paraître avant que Pascal n'ait imprimé les siennes. Rien n'y fait, pas même la proposition que lui a faite Pascal de les donner en chiffre à défaut de les communiquer au grand jour. Evidemment, ironise Pascal, c'est qu'il n'a pas les solutions véritables et qu'il attend celles de Pascal pour s'en inspirer...

Et Pascal conclut en ajoutant qu'on n'a guère de raison de croire sur parole quelqu'un qui prétend détenir la quadrature du cercle et être prêt à la donner à son premier loisir...

ADDITION À LA SUITE DE L'HISTOIRE DE LA ROULETTE[14]
20 JANVIER 1659

Pascal vient de publier son *Traité de la Roulette*, il en a envoyé les quatre premières pages (renfermant la solution du calcul proposé dans la deuxième lettre) à Lalouvère ; en échange de quoi Lalouvère a donné d'autres calculs à Pascal, des calculs faux ! Pascal en conclut pour la deuxième fois que Lalouvère attendait ses écrits pour corriger ses propres erreurs.

Ces lettres donnent la vision de Pascal.

3 - L'*Essai sur les Secrets des Traités de la Roulette* de Pierre Costabel. Roberval, Wallis, Lalouvère, Fermat, Huyghens, Wren dans le concours

A qui sait lire entre les lignes, les lettres de Pascal apparaissent comme susceptibles d'une double lecture. Il revient à Pierre Costabel[15] d'avoir reconstitué ce qui se joue réellement à travers des indices dont l'importance n'est pas facilement repérable. Il y a une véritable histoire parallèle du concours de la roulette qui dénoue les interrogations d'un lecteur attentif.

Entre la première et la deuxième lettre de Pascal, il s'est passé quelque chose qui est attesté par le début de la troisième ; en effet, à la troisième ligne des *Réflexions sur les conditions des prix*, Pascal emploie **pour la première fois**

14 - Titre de l'édition Brunschvicg
15 - *Essai sur les secrets des Traités de la roulette*. Revue d'Histoire des Sciences 1962 (tricentenaire de la mort de Pascal).

le terme de *Trochoïde*, comme équivalent à ceux de *Cycloïde* ou *Roulette*. Or *Trochoïde* est le terme de Roberval. Pascal a donc rencontré (au moins épistolairement) Roberval, et cette rencontre est récente. Plus précisément il est raisonnable de dire qu'elle a eu lieu entre la première et la deuxième lettre.

En effet "Qui peut avoir signalé à Carcavi l'ambiguïté de l'expression de «cycloïde quelconque», sinon celui qui a envisagé des méthodes s'étendant aux cycloïdes «allongées ou accourcies»"[16] : Roberval soi-même (aux dires mêmes de Pascal, dans la quatrième lettre)

Cela explique aussi la modification de l'énoncé du calcul demandé. Aussi invraisemblable que cela puisse paraître, Pascal ne savait pas en 1658 que Roberval avait quarré la cycloïde en 1637! Encore moins, si l'on peut dire, que ce dernier en avait (plus tard) calculé les solides. Ces problèmes sont donc retirés de la deuxième lettre où Pascal demande explicitement un seul calcul, non déjà fait par Roberval : celui du centre de gravité du solide autour de la base. Dès lors Pascal n'a de cesse qu'il ne rende hommage à Roberval pour se faire pardonner cet impair ; et c'est le sens de la quatrième lettre *Histoire de la Roulette,* véritable hommage-excuse que Pascal rend à Roberval.

> *M. de Roberval ayant si peu de soin de se faire paraître qu'il n'en a jamais rien fait imprimer, beaucoup de monde y a été surpris, et je l'avais été moi-même ; ce qui a été cause que par mes premiers écrits je parle de cette ligne comme étant de Torricelli.*

L'accusation portée contre Torricelli qui occupe une page entière de l'*Histoire de la roulette* ressortit donc aux mêmes mobiles : faire amende honorable en encensant Roberval. Pourtant si ce dernier ne publiait pas, ce n'était pas par modestie, loin de là ; c'était plutôt pour ne pas donner aux autres des idées pour aller plus loin. Rester prioritaire, tout en ne publiant pas, comment une telle contradiction n'engendrerait-elle pas des disputes ?

Maintenant voyons le pourquoi des *Problèmes d'Octobre*. Pour quelle raison n'ont-ils pas été posés en Juin, en même temps que les autres ? La réponse est simple : les énoncés de Juin s'obtiennent en remplaçant la surface de la roulette par sa ligne[17] ; en Juin personne n'avait encore jamais rectifié la roulette. C'est Wren qui envoie à Pascal en Août la rectification, avant que Pascal ne l'ait trouvée, ni, par conséquent, mise au concours. C'est

16 - *Ibidem page* 324.
17 - Remarque de Kokiti Hara . Op. cit.

une véritable aubaine pour Pascal, il ne manquait que cela à sa méthode générale pour pouvoir poser les problèmes d'Octobre, et il ne risque pas de rééditer ce qui est arrivé avec Roberval puisqu'il est, là, certain que les problèmes de surfaces courbes et de leurs centres de gravité ne sont pas résolus ; d'ailleurs Wren a envoyé le résultat de la rectification avant d'en avoir une démonstration. En un rien de temps Pascal est en possession de toutes les solutions, et peut ainsi poser les problèmes d'octobre dans la quatrième lettre. Il a même été plus loin que Wren puisqu'il a traité dans la foulée la généralisation – du problème de longueur – aux cycloïdes allongées ou accourcies.

La grosse erreur de Pascal fut de mettre au concours des questions déjà résolues, et surtout de ne jamais en parler comme d'une erreur. Cela eut pour conséquences :

– Un hommage indéfini à Roberval, perçue comme un chauvinisme par les Anglais qui se mirent à défendre les Italiens du passé, Galilée et Torricelli.

– Une attitude insultante envers Wallis et Lalouvère explicitement accusés de plagiat alors qu'ils ne faisaient que répondre à des questions **posées** . Ils se sont défendus comme ils ont pu : Lalouvère en refusant catégoriquement d'envoyer ses résultats, tout en arguant de sa priorité (finalement il faisait comme Roberval, mais avec beaucoup moins de talent mathématique) ; Wallis en disant qu'on est le premier quand on ne connaît pas ce qu'ont fait les autres avant vous (Wallis ne connaissait <u>rien</u> sur la roulette au début du concours, comme Pascal...), puis en arrêtant net la publication de son *Tractatus duo* pour que Pascal ne l'accuse pas "d'avoir labouré avec sa génisse".

Ni Wallis ni Lalouvère n'avaient le talent littéraire du grand pamphlétaire des *Provinciales*. La puissance de persuasion de Pascal est si grande qu'il est indispensable d'écouter ses adversaires, si l'on veut rester objectif : Lalouvère a parfaitement raison de dire que Pascal ne peut à la fois soutenir qu'en matière de géométrie seule la publication fait foi, et que la quadrature de la roulette ou le calcul de ses solides appartiennent à Roberval qui "gardait ses résultats dans ses coffrets" . Peut-on sérieusement dans ces conditions accuser les autres de "labourer avec sa génisse", pour reprendre les images de Wallis ?

Seuls deux concurrents ont répondu à ce concours ouvert aux «plus éminents géomètres de toute la terre», qu'en est-il des autres ? Fermat ne s'est pas engagé, mais il a transmis certains résultats de Roberval à Lalouvère, toulousain comme lui. Huygens et Wren ont servi de boîte à lettre à Wallis, jamais aucun échange direct n'eut lieu entre Pascal et Wallis. Wren a envoyé la rectification en dehors du concours. Il est l'instigateur involontaire des problèmes d'Octobre.

Le *Traité de la Roulette* paraît, comme prévu en Janvier 1659. Le septième traité (la synthèse), qui rappelle les énoncés de Juin et d'Octobre omet tout simplement, dans les problèmes d'Octobre, le problème IV (les calcul de la ligne et de son centre de gravité[18])! Décidément, Pascal a une aptitude phénoménale à ne pas s'en tenir à ses propres énoncés, les conditions du concours varient à son gré! Là aussi il y a une explication : Pascal a toujours d'avance la solution des problèmes qu'il pose, par contre il ne pose pas des problèmes résolus par les autres, sauf par ignorance! et on a vu les ennuis auxquels une telle bévue pouvait donner lieu... Voici comment Costabel interprète la suppression

> *L'ami de Pascal (Carcavi) nous apprend que la dimension des surfaces a été envoyée par Wren (le 12 octobre) et par Fermat, tandis qu'un personnage dont l'anonymat est soigneusement gardé, a donné le centre de gravité de la courbe. Dans cette partie où il est engagé et où le jeu est décidément très serré, Pascal a donc été une fois de plus gagné de vitesse sur certains points, et il lui faut corriger d'urgence, en ce début du mois de Décembre 1658 pour tenir compte de découvertes toutes récentes.*

Le personnage anonyme est Roberval[19], dont Pascal a appris à ménager la grande susceptibilité en matière de publication. Pourquoi n'avoir pas supprimé aussi les dimensions des surfaces ? Parce que, toujours selon P. Costabel

> *La méthode de Pascal fournit dans un même mouvement à la fois la dimension et les centres de gravité ; il est impossible de supprimer un terme sans détruire la valeur d'un ensemble où tout se tient.*

Peut être aussi, ajouterons nous, parce que Fermat et Wren avaient meilleur caractère que Roberval !

18 - Pierre Costabel *Essai.sur les secrets...*p.332.
19 - Pour plus de détails voir l'*Essai sur les secrets...* p. 333

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

4 - Au-delà du concours

Lalouvère publie le *De cycloïde* ouvrage touffu et très inféodé aux anciens. Le *De Cycloïde* contient beaucoup de résultats justes. Lalouvère calculait assez mal, c'est pourquoi il attendait toujours les résultats des autres pour vérifier les siens, mais ses méthodes étaient bonnes quoique dépassées.

Wallis publie beaucoup plus tard (en 1670) la *Pars mechanica* qui contient toutes les solutions justes et générales (pour les portions quelconques de la roulette) de problèmes du concours et qui isole la partie générale (égalités d'intégrales trigonométriques), ce que ne faisait pas Pascal qui n'avait pas assez de recul.

Pascal a écrit pour de bon avec le *Traité de la Roulette* son dernier ouvrage scientifique. *La prière à Dieu pour le bon usage des maladies* marque sa sortie définitive du monde. Doit-on la prendre comme un repentir ? Le contraste est grand entre le personnage engagé dans des querelles de personnes et le grand malade humble et détaché des honneurs.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

ANNEXE 3

QUELQUES PRÉCISIONS SUR L'AIRE, LA LONGUEUR, LES TANGENTES À LA CYCLOÏDE

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Annexe 3 - Quelques précisions dur l'aire, la longueur, les tangentes à la cycloïde

La roulette et une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente ; et elle se décrit si souvent aux yeux de tout le monde qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait point été considérée par les anciens, dans lesquels on n'en trouve rien : car elle n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire, depuis que ce clou commence à s'élever de terre, jusqu'à ce que le mouvement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier achevé : supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point dans sa circonférence, et la terre parfaitement plane.

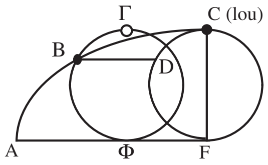
Le feu P. Mersenne, minime, fut le premier qui la remarqua environ l'an 1615, en considérant le roulement des roues, ce fut pourquoi il l'appela la Roulette. Il voulut ensuite en reconnaître la nature et les propriétés mais il n'y put pénétrer.

Blaise Pascal Histoire de la roulette 1658

1 - Les relations géométriques de la roulette ordinaire

Le mouvement ordinaire dont parle Pascal est celui d'une roue qui roule sans glisser. Soit figurées en noir deux positions du clou : C (à la verticale) et B, correspondant aux points de contact F et Φ

Voici donc les relations géométriques fondamentales de la roulette



* De par la nature de la roulette (la roue ne patine ni ne glisse), le clou tourne comme le point Φ avance

Arc Γ B = F Φ

* Comme le deuxième cercle est translaté du premier

B D = F Φ et Arc C D = Arc Γ B

Arc C D = B D

BDFΦ est un parallélogramme

La première est constamment utilisée par Pascal. La deuxième est magnifiquement mise à profit par Descartes pour construire la tangente en B.

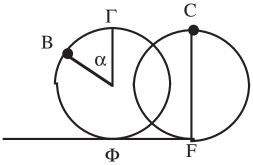
Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

2 - Les équations paramétriques

Changeons de siècle

La roulette n'a malheureusement que des équations paramétriques si l'on ne veut pas d'arc cosinus.

Appelons α l'angle dont a tourné le clou sur la roue. Dans le repère (FΦ, FC)



$$x_B = R\,\alpha + R\sin\alpha$$
$$y_B = R + R\cos\alpha$$

Ces équations alliées à la technique de calcul par primitive founissent des démonstrations automatiques de tous les résultats que les mathématiciens du XVII[e] siècle avaient obtenus géométriquement au prix d'une ingéniosité parfois prodigieuse.

3 - L'aire

Les mathématiciens du XVII[e] se demandaient si la roulette ne serait pas une courbe déjà connue, une ellipse par exemple. On raconte que Galilée l'aurait pesée, il aurait trouvé que l'aire était trois fois celle de la demi-roue, auquel cas la roulette ne pouvait pas être une ellipse. Roberval a démontré le premier qu'il en était bien ainsi. La méthode des indivisibles qu'il emploie est du type Cavalieri[1] et n'a pas grand-chose à voir avec celle que Pascal appelle du même nom, quoique…

Citons pour cette quadrature de la cycloïde par Roberval un large extrait de *La naissance du calcul infinitésimal au XVII[e] siècle* [2] :

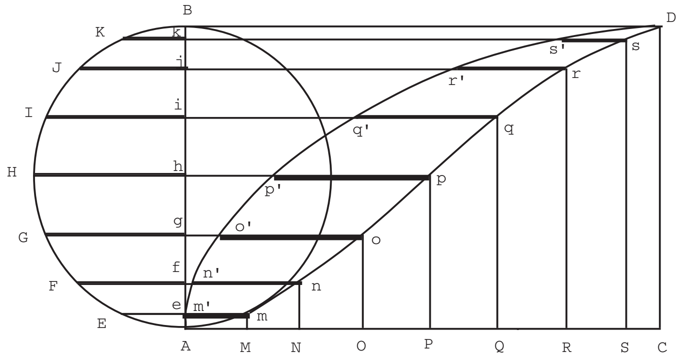
> "ROBERVAL, LES INDIVISIBLES ET L'AIRE SOUS LA CYCLOÏDE
>
> Dans une lettre de 1644 à Torricelli, Roberval prétend qu'à l'époque où Cavalieri publiait sa méthode, il était en possession d'une méthode semblable, qui lui était venue à la lecture du "*divin Archimède*"[3]. Dans son "*Traité des indivisibles*", Roberval considère

1 - On pourra consulter J.P. Clero E. Le Rest *La naissance du calcul infinitésimal au XVII[e] siècle* CNRS (Cahiers d'Histoire et de Philosophie des sciences).
2 - Voir la note précédente.
3 - Lazare Carnot *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* p. 89-91.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

les indivisibles comme un moyen de "*tirer des conclusions*" et il explique les suppositions inhérentes aux indivisibles en leur rendant une dimension supplémentaire : "*la multitude infinie de points*" qui compose la ligne entière représente un infinité de petites lignes ; de même "*l'infinité de lignes représente l'infinité des petites superficies qui composent la superficie totale*" et "*l'infinité des superficies représente l'infinité de petits solides qui composent ensemble le solide total*". Par conséquent Roberval utilise et défend les indivisibles bien que sa conception diffère de celle de Cavalieri. Dans sa "*Méthode pour réduire les démonstrations par les indivisibles à celles des Anciens géomètres par les circonscripts inscripts*" est esquissée une idée de limite : il faut, dit il pour pouvoir appliquer la méthode des indivisibles, "*démontrer que la quantité inconnue que l'on compare est mitoyenne entre la figure inscripte et circonscripte et que la figure inscripte et circonscripte diffèrent l'une de l'autre d'une quantité moindre que toute quantité proposée*". Nous allons voir la méthode des indivisibles, appliquée par Roberval, à la quadrature de la cycloïde.

Considérons le segment AC égal à la demi-circonférence AGB du cercle générateur. Partageons ce segment et cette demi-circonférence en une infinité de parties égales telles que AM = arc AE. Soient m, n etc.. les points d'intersection des droites Ee, Ff etc.. avec les perpendiculaires menées de M, N etc.. à la droite AC ; ces points sont les points d'une courbe appelée par Roberval la "compagne" de la roulette.



Les points m', n' etc.. des droites Em, Fn etc. tels que Ee = m'm, Ff = n'n etc sont les points de la cycloïde ; en effet lorsque le centre du cercle générateur est sur la perpendiculaire menée de M à AC alors arc AE = Mm' etc. La compagne partage le rectangle ABCD en deux surfaces égales car chacun de ses segments Mm, Nn etc a son égal dans l'autre moitié. D'autre part l'aire entre les deux courbes est égale à l'aire du demi-cercle AGB car la somme des segments Ee, Ff etc. est égale à la somme des segments m'm, n'n etc.

Par conséquent l'aire sous la demi-cycloïde est égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD plus la moitié du cercle générateur, c'est à dire aux trois demis de l'aire du cercle générateur. L'astuce de ce calcul consiste en l'introduction de la courbe compagne qui est de toute évidence symérique par rapport au centre du rectangle ABCD".

Beaucoup de démonstrations de la quadrature de la roulette s'ensuivirent. Celle de Pascal est la plus rapide, elle repose sur les sommes d'arcs ; elle a été donnée dans le chapitre I *Les sommes chez Pascal* paragraphe 1.

Aujourd'hui on écrit une intégrale et on prend une primitive

$$A = \int x\, dy = R^2 \int_0^{\pi} (\alpha + \sin\alpha)\ \sin\alpha\, d\alpha\,) =$$

$$R^2\,[-\,\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\,]_0^{\pi} + \tfrac{1}{2}\,R^2\,[\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\,]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3\,\pi\,R^2}{2}$$

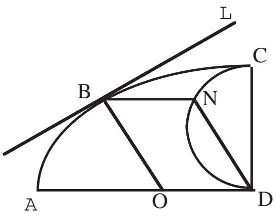
L'AIRE SOUS LA CYCLOÏDE EST TROIS FOIS CELLE DE LA DEMI-ROUE

4 - Les tangentes

Citons de nouveau *La naissance du calcul infinitésimal au XV^e siècle*

"**LA TANGENTE A LA CYCLOÏDE PAR DESCARTES**

Dans une lettre à Mersenne du 23 août 1638, Descartes donne la construction de la normale à une courbe "*mécanique*" : la cycloïde[4].



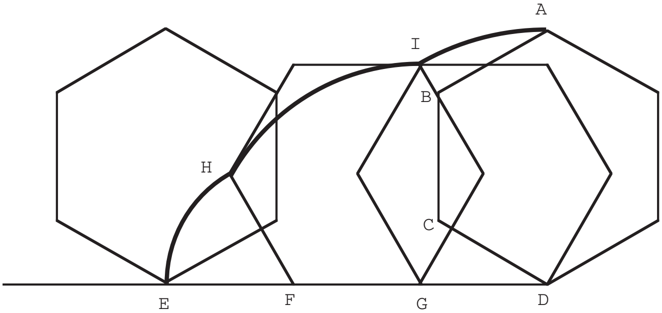
Il dit que la normale au point B de la cycloïde est la droite OB, où O est le point de la base AD touché par le cercle générateur quand est décrit le point B. La droite OB s'obtient également comme parallèle de ND.

4 - Descartes *Correspondance* A. T. tome II p. 308

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Puis il donne une démonstration dans laquelle apparait le concept de centre instantané de rotation, sans l'utilisation des termes de limite ou d'infinitésimal. Comme Galilée dans la première journée des Discours[5], Descartes considère un polygone roulant sur une ligne droite et la courbe décrite par un de ses sommets.



Cette courbe est composée d'arcs de cercle, chacun d'eux est l'arc d'un cercle dont le centre est le point que touche le polygone pendant que cet arc est décrit. Par conséquent la normale à cette courbe en un point P est la droite OP, où O est le point de la base touché par le polygone pendant que l'arc de cercle auquel appartient P est décrit. Descartes étend cette propriété à la cycloïde en considérant que le cercle générateur est un polygone ayant une infinité de côtés, car ce qui *"arrive à un polygone de cent millions de côtés* [arrive…] *aussi au cercle"*[6]. Dans le même esprit, Galilée considère que les côtés d'un cercle sont en nombre infini[7] et Leibniz écrira plus tard que l'on peut dire qu'un cercle est un polygone régulier dont le nombre des côtés est infini[8].

L'argument utilisé par Descartes dans cette démonstration peut permettre de comprendre la méthode des tangentes que nous trouvons dans *La Géométrie* – méthode qui peut apparaître moins naturelle que la seconde dans laquelle la tangente s'obtient comme limite de sécantes. En effet il est une courbe parfaite dont les normales sont bien connues : il s'agit du cercle et de ses rayons. D'où l'idée d'approcher une courbe par un arc de cercle ; idée venue

5 - Galilée *Discours concernant deux sciences nouvelles* Clavelin p. 22-23
6 - Descartes Ibid.
7 - Galilée Ibid. p. 45
8 - Leibniz *Justification du calcul des infinitésimales par celui de l'algèbre ordinaire* - Mathematische Schriften. IV p. 106

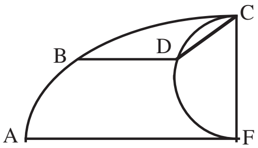
Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

facilement dans la considération de la cycloïde puisqu'en en approximant le cercle générateur par un polygône, la courbe décrite est composée d'arcs de cercle".

Là où Pascal dirait qu'il n'y a pas de problème pour les personnes raisonnables – assimiler un polygône de cent millions de côtés à un cercle – Descartes indique qu'il pourrait «démontrer cette tangente d'une autre façon plus belle à son gré et plus géométrique», mais qu'il ne le fait pas parce que ce serait trop long. Les deux savants n'ont pas la même façon de voir l'infini.

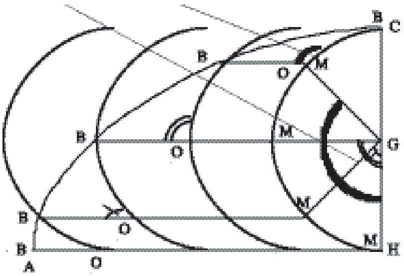
5 - La longueur

Calculée par Wren, l'architecte de la cathédrale de Londres, pour la première fois en Août 1658, la longueur de la roulette est égale à deux fois le diamètre de la roue. Le résultat fit sensation car l'on tenait pour impossible de construire un segment égal à une courbe[9].



Wren a même fait mieux, il a montré que que l'arc CB de la roulette était constamment égal à deux fois la corde CD de la roue.

Peu de temps après, Pascal donna[10] une démonstration dans l'esprit de son propre calcul à différentielles géométriques. Il s'agit d'une méthode unifiée pour les longueurs de toutes les roulettes ordinaire, allongées, accourcies. La démonstration de Pascal est nettement plus simple si l'on se restreint au cas de la roulette ordinaire. La voici en substance.



La roue est découpée en un nombre indéfini de divisions égales les MM. (L'infini est représenté par 4 sur le dessin).

Par des parallèles à la base on découpe la ligne de la roulette en un nombre indéfini de divisions (inégales), les BB.

Les positions de la roue correspondant à ces points B sont dessinées.

9 - Voir le début du chapitre VI *Les problèmes d"octobre.*

10 - Dans la *Lettre de M. Dettonville à M. Huygens de Zulichem* . difficile à dater plus précisément que du début 1659.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Les droites BM sont découpées en segments égaux aux arcs MM donc les segments BO sont égaux aux arcs BO. C'est une conséquence de la relation fondamentale de la roulette. Les vrais triangles MGH sont évidemment isocèles. Les "triangles" BOB sont assimilables à de vrais triangles dès lors que le nombre de divisions BB est indéfini et sont isocèles d'après ce qui précède. Les angles en O et en G sont à côtés perpendiculaires. Ainsi BOB est semblable à MGH, «chacun au sien». Comme dans tout calcul par découpage il y a des chutes aux extrémités.

D'où $\frac{BB}{\text{Arc BO}} = \frac{HM}{MG}$. Comme $MG = R$ et $MM = \text{Arc BO}$, la longueur de la roulette est $\mathbf{L = \Sigma BB = \frac{1}{R} \Sigma HM\ MM}$

La longueur de la roulette est devenue un problème de cercle, la somme se fait relativement à des infinitésimaux, les MM, nés de divisions égales, tout est dans l'ordre pascalien.

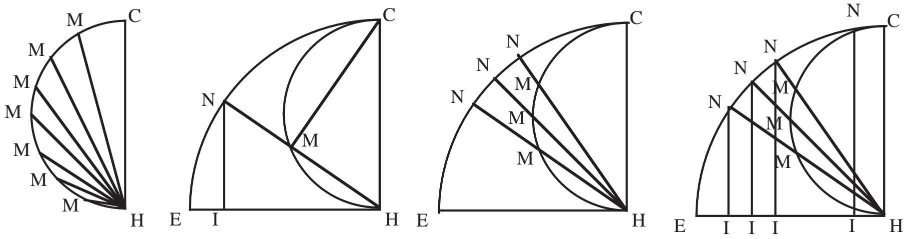


Fig. a *Fig. b* *Fig. c* *Fig. d*

Le calcul de Σ HM MM, détaillé à la fin du chapitre I, se fait à l'aide d'un quart de cercle de rayon double (Fig.b) : HM = NI. On voit sur la Figure c que les NN sont égales aux MM, donc égales entre elles et susceptibles de figurer dans une somme. D'où (Fig.d) :

$$\Sigma\ HM\ MM = \Sigma\ NI\ NN$$

qui n'est autre que la somme des sinus du quart de cercle entier, connue par la Proposition I du *Traité des sinus* $\Sigma\ NI\ NN = 2R \times EH = 4R^2$.

$$L = \frac{1}{R} 4R^2 = 4R. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Quant au calcul moderne il est très rapide

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = R^2 [\, 2 + 2 \cos\alpha \,] d\alpha^2,$$

donc $\quad ds = 2\,R \cos \dfrac{\alpha}{2} d\alpha$

d'où $\quad L = 4\,R\,\left[\sin \dfrac{\alpha}{2}\right]_o^{\pi}$

$$\boxed{\mathbf{L = 4\,R}}$$

6 - Les roulettes allongées ou accourcies

Si la roue tourne régulièrement plus qu'elle n'avance la roulette est *accourcie*. Cela se traduit par la relation géométrique

$$\mathbf{k \times \text{Arc } C\,D = B\,D}$$

où k est une constante plus petite que 1.

Au contraire si la roue avance plus qu'elle ne tourne la roulette est *allongée* . Cela se traduit par la relation géométrique

$$\mathbf{k \times \text{Arc } C\,D = B\,D}$$

où k est une constante plus grande que 1.

Roberval a étudié les courbes de ces mouvements “non ordinaires”. Descartes en a donné les tangentes en généralisant immédiatement la méthode qui avait réussi pour la roulette ordinaire.

Très peu de temps après que Wren eut trouvé la longueur de la roulette ordinaire, Pascal démontra, dans la Lettre à Huygens citée plus haut, que les roulettes généralisées avaient même longueur que des ellipses, alimentant ainsi les idées qui régnaient sur la rectification.[11] La démonstration est un nouveau tour de force à base de différentielles géométriques.

Les équations paramétriques d'une roulette généralisée étant

$x = k\,R\,\alpha + R \sin\alpha$

$y = R + R \cos\alpha$

le ds^2 est facile à calculer

$ds^2 = dx^2 + dy^2 = R^2\,[\,1 + k^2 + 2k \cos\alpha\,]$,

qui est bien un ds^2 d'ellipse, sauf si $k = 1$.

11 - Voir le début du chapitre VI, *Les problèmes d'Octobre.*

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

GLOSSAIRE

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

GLOSSAIRE

Lorsque les termes sont d'un emploi propre à cette étude, ils sont suivis d'un astérisque. Les autres sont, ou bien pris dans leur sens classique, ou bien ceux du texte de Pascal.

Adjointe
Triligne accolé à droite d'un triligne fixe, susceptible de prendre différentes formes. L'ensemble des deux trilignes constitue la *Figure du Lemme général*.

Balance
Droite divisée en un nombre (en général indéfini) de parties égales aux bornes desquelles pendent des poids fictifs.

Bras sur l'axe, sur la base
Distance du centre de gravité à l'axe, à la base. Voir **somme triangulaire**.

Différentielles géométriques*
Ce qui naît de la division d'une ligne en un nombre indéfini de parties égales. Voir aussi **petites portions**.

dx, dy, ds*
Termes abusivement employés pour désigner les ultimes résidus géométriques naissant du partage en un nombre indéfini de divisions égales de la base, l'axe, la courbe respectivement. Voir **petites portions** et **différentielles géométriques.**

Double égalité*
Lorsque les divisions égales d'une ligne sont égales aux divisions égales d'une autre, on parle de double égalité.

Double onglet
Cas particulier de volume relevé (lorsque l'adjointe est un triangle rectangle isocèle), symétrisé par rapport au plan de base.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Égalité transversale*
Égalité terme à terme des divisions sur une ligne avec les divisions ayant lieu sur une ou plusieurs autre lignes. Voir **double égalité**.

Figure du Lemme général
Figure très générale à transformer les différentielles géométriques. Créée par Pascal dans le *Traité des Trilignes* pour échanger *dx* et *dy*. Voir **volume relevé**.

Figure des Problèmes d'Octobre*
Figure à transformer les différentielles géométriques, la troisième et dernière du *Traité de Roulette*. Les *ds* de la roulette deviennent des *dx* de cercle. Apparaît dans le *Traité général de roulette*.

Figure rectifiante*
Deuxième figure du *Traité de Roulette* à transformer les différentielles géométriques. Les *ds* deviennent les *dx* d'un autre triligne "rectifiant". Les reports de petites portions sont isométriques, il y a double égalité par construction. La *figure rectifiante* est un cas particulier de la *figure du lemme général*. Les deux apparaissent dans le *Traité des Trilignes*.

Géométrie calculante*
Terme emprunté à J. Chevalier (éd. de la Pléiade). Désigne la manière active dont Pascal utilise la géométrie pour inventer et articuler les calculs.

Intégrale
Intégrale simple, double, triple, curviligne
Terme complètement anachronique, partiellement justifié par le fait que les sommes pascaliennes sous-entendent des différentielles. Employer des signes $\int$, $\iint$, $\iiint$ familiers au lecteur moderne facilite le travail explicatif - les prendre comme des raccourcis du langage, anachroniques.

Méthode des indivisibles
Méthode de calcul à base de différentielles géométriques. Pascal récuse la notion d'indivisible. Il emploie pratiquement toujours ce mot à l'intérieur d'une expression – méthode des indivisibles, langage des indivisibles, doctrine des indivisibles –, où il n'a plus de sens isolé.
Il y a une exception au moment où Pascal emploie *indivisible* pour qualifier une surface au regard d'un volume, auquel cas on a bien un *indivisible* de Cavalieri.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Méthodedesindivisibles*
Terme employé pour désigner la méthode des indivisibles de Pascal (voir ci-dessus). Cette écriture traduit de manière imagée l'absence de sens individuel du mot « indivisible » dans ce qui n'est plus qu'une manière de parler.

Méthode générale des centres de gravité
Méthode qui consiste à écrire la position d'un centre de gravité (le bras) à l'aide d'une somme triangulaire.
A peu de chose près notre actuelle formule de l'abscisse du centre de gravité.

Nouveau calcul
Calcul infinitésimal dégagé de la géométrie mis en place dans les années 1670 simultanément par Newton et Leibniz. Assigne une place centrale à ce qui n'était jusque là perçu que de façon fragmentaire, à savoir : "le problème des quadratures est le problème inverse des tangentes". En termes modernes : "intégrer, c'est prendre une primitive".

Ordonnées à l'axe, à la base
Parallèles à l'axe, ou à la base d'un triligne, nées d'un nombre indéfini de divisions égales sur l'axe, la base respectivement.

Petites portions
Ce que Pascal obtient par division d'une ligne droite ou courbe en un «nombre indéfini de divisions égales».
Avoir considéré les petites portions comme des objets à part entière bien dégagés est la clé du *Traité de la roulette*.
Voir différentielles géométriques*.

Régularité*
Caractère d'une subdivision qui obéit à une loi. Par exemple, les abscisses des points de la subdivision sont en progression arithmétique (divisions égales), proportionnelles à la suite des carrés d'entiers etc.

Roulette
Ligne courbe engendrée par le mouvement d'un clou situé sur une roue qui roule sans glisser. ("avance comme elle tourne")
Synonymes : cycloïde, trochoïde.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Roulette accourcie
Ligne courbe engendrée par le mouvement d'un clou situé sur une roue qui, régulièrement, "tourne plus qu'elle n'avance".

Roulette allongée
Ligne courbe engendrée par le mouvement d'un clou situé sur une roue qui, régulièrement, "avance plus qu'elle ne tourne".

Sinus
Parallèles à l'axe, ou à la base d'un triligne, nées d'un nombre indéfini de divisions égales sur la courbe. Chaque fois que Pascal parle de sinus, c'est qu'il va faire de l'"intégrale curviligne".

Somme, Simple somme
Élément géométrique obtenu en faisant une somme d'éléments géométriques multipliés par celles des petites portions de la figure qui naissent de divisions égales. Correspond à nos actuelles intégrales simples.

Somme pyramidale à commencer par …
Généralisation de la **somme triangulaire**. Voir ce terme. Somme de sommes de sommes de manière doublement triangulaire à partir de …
En continu sous-entend un élément différentiel d'ordre 3.
Admet une expression en "intégrale triple" (celle de sa définition) et une expression en "intégrale simple" (adaptée à l'"intégration par parties"). Cette dernière faisant apparaître en facteur le carré de la "variable d'intégration".
Abstraite dès le départ, langage de l'"intégration par parties".

Somme triangulaire à commencer par …
Outil statico-géométrique créé par Pascal dans la *Lettre à Carcavi*. Somme de sommes obtenues successivement en laissant tomber l'élément le plus proche de …
En continu sous-entend un élément différentiel d'ordre 2.
Admet une expression en "intégrale double" (celle de sa définition) et une expression en "intégrale simple" (adaptée à l'"intégration par parties"). Cette dernière faisant apparaître en facteur la "variable d'intégration".
Se détache rapidement de ce pourquoi elle a été créée (chercher la position d'un centre de gravité) pour devenir l'outil de l'"intégration par parties" géométrique que Pascal met constamment à l'oeuvre dans le *Traité*.

TR
Abrégé pour *Traité de la roulette*.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Triligne
Sorte de triangle rectangle à hypoténuse courbe constituée par le graphe d'une "fonction" (rencontrée une seule fois par une parallèle à l'axe).

Traité de la Roulette, Traité de Roulette ou Traité*
Ensemble des sept traités que Pascal fit paraître en 1659 pour résoudre les problèmes de la roulette posés au concours.

Traité général de roulette
Le dernier des sept traités, celui où Pascal ramène la roulette au cercle et indique la marche à suivre pour résoudre chacun des problèmes.

Volume relevé*
Volume obtenu à l'aide de la figure du lemme général, en faisant tourner le triligne de droite d'un quart de tour dans l'espace.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

Références bibliographiques

E. BARBIN - *Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au XVII^e siècle*. In Fragments d'Histoire des Mathématiques II, n° 65, 1987.

B. BETTINELLI - *Le trésor d'Archimède*, Irem de Besançon, 1988.

BOURBAKI - *Éléments d'Histoire des Mathématiques*. Hermann, 1960.

A. CHEVALIER - Une étude de l'*Arithmetica infinitorum de J. Wallis*, Mémoire de DEA en Histoire des Sciences, Université de Lille I - Lille III, 1992.

COLLECTIF - *Destins et enjeux du XVII^e siècle*, PUF, 1985.

Commission Inter-Irem Histoire et Epistémologie des Mathématiques : *La démonstration mathématique dans l'Histoire*, Irem de Lyon, 1990.

La figure et l'espace, Irem de Lyon 1993.

Histoire d'infini, Irem de Brest, 1994.

P. COSTABEL - *Essai sur les secrets des Traités de la roulette*. Revue d'Histoire des Sciences, Tome 15, 1962.

F. DE GANDT - *L'analyse de la percussion chez Galilée et Torricelli*. Cahiers du séminaire d'Épistémologie et d'Histoire des sciences, cahier n° 16, Université de Nice, 1983.

F. DE GANDT - *Les indivisibles de Torricelli*. Cahiers du séminaire d'Épistémologie et d'Histoire des sciences, cahier n° 17, Université de Nice, 1984.

F. DE GANDT - *Naissance et métamorphose d'une théorie mathématique : la géométrie des indivisibles en Italie*. In APMEP Fragments d'Histoire des Mathématiques II, n° 65, 1987.

DESCARTES - *Œuvres*. Adam et Tannery, Paris, Cerf, 1898.

D. DESCOTES et G. PROUST - Blaise Pascal, Lettres de A. Dettonville (1658-59), Cederom, Publications universitaires Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 1999.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4

FERMAT - *Œuvres de Fermat*, publiées par Paul Tannery et Charles Henry, Paris, Gauthier-Villars, 1891-1922.

J. L. GARDIES - *Pascal entre Eudoxe et Cantor*. Librairie philosophique, Vrin, 1984.

L. GOLDMANN - *Le Dieu caché. Etude sur la vision tragique dans les Pensées de Pascal et le théâtre de Racine*, nrf, Gallimard, 1975.

H. GOUHIER - *Blaise Pascal Commentaires*, Bibliothèque d'histoire de la philosophie, Vrin, 1984.

K. HARA - *L'œuvre mathématique de Pascal*, Osaka University, Vol. XXI, 1981 (en Français).

T. HARRINGTON - *Dieu comme objet de connaissance chez Pascal*. Revue des Sciences humaines n° 244, octobre-décembre 1996.

T. HARRINGTON - *Le Pari de Pascal*. Romanische Forschungen 109. Band, Heft 2, 1997 (en Français).

LEIBNIZ - *Naissance du calcul différentiel*, Introduction, traduction et notes par Marc Parmentier, Vrin, 1989.

E. LE REST J.P. CLERO - *La naissance du calcul infinitésimal au XVII^e^ siècle*, C.N.R.S (Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences), 1981.

C. MANHES et J.-P. DEREMBLE - *Le vitrail du bon samaritain. Chartres, Sens et Bourges*. Édition le Centurion, 1987.

PASCAL - *Œuvres complètes*, Jacques Chevalier, Bibliothèque de la Pléiade, 1954.

PASCAL - *Œuvres complètes*, Jean Mesnard, Desclée de Brouwer, Tomes I à IV.

PASCAL - *Pensées*, Texte établi par Léon Brunschvicg, GF-Flammarion 1976.

PH. SELLIER - *Pascal et Saint Augustin*, Armand Colin, 1970.

ROBERVAL - *Traité des indivisibles*. IREM, Reproduction de textes anciens, nouvelle série n° 3, Université Paris VII, 1987.

F. RUSSO - *Pascal et l'analyse infinitésimale*. Revue d'Histoire des Sciences, Tome 15, 1962.

Édition intégrale en ligne de : *Le chant du cygne des indivisibles ou le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Claude Merker, Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 227 pages, ISBN 2-84627-038-4