

# Géométries élémentaires (tome 1)

Henri Lombardi

## Introduction générale

a - Remarques générales sur ce cours .....	9
Les méthodes en géométrie élémentaire .....	9
Les géométries non euclidiennes .....	11
Les géométries d'espace-temps .....	12
b - Remarques diverses.....	13
c - Groupe opérant sur un ensemble, sur un groupe .....	14
Groupe opérant sur un ensemble .....	14
Groupe opérant sur un groupe, produit semi-direct.....	16

## 1 - Géométrie euclidienne plane. Le plan euclidien comme espace métrique.

a - Introduction.....	21
La démarche suivie dans ce chapitre .....	21
Démonstration du Théorème de Pythagore avec des puzzles .....	22
Le produit scalaire : discussion informelle.....	23
b - Le modèle standard de plan euclidien et son groupe d'isométries.....	26
Une définition laborieuse.....	26
Quelques notions de base .....	29
Isométries du modèle standard.....	32
c - La géométrie d'un plan euclidien arbitraire .....	36
Notions qui peuvent être définies dans un plan euclidien arbitraire.....	36
Repérage d'un plan euclidien .....	38
Le groupe des isométries .....	40
Angles .....	46

## 2 - Géométrie affine plane réelle

Introduction .....	51
a - Qu'est-ce qui reste dans un plan euclidien quand on a perdu l'unité de longueur ? ..	52
Homothéties et translations.....	52
Similitudes.....	54
Similitudes directes.....	56
b - Applications et transformations affines .....	57
Applications affines .....	57
Transformations affines d'un plan euclidien .....	60
c - Propositions de définitions pour «un plan réel affine»	
d - Les implicites géométriques du calcul vectoriel	
e - Aires et déterminants	
f - Théorèmes structurels	

## 3 - Géométrie affine de dimension n sur un corps commutatif

Introduction .....	75
a - Généralités .....	76
Définitions et premières propriétés .....	76
Structure affine d'un espace vectoriel .....	81
Hyperplans, dualité .....	82
b - Calculs dans les espaces affines.....	84
Quelques exemples et quelques modèles.....	84
Le calcul sur les coordonnées .....	85
Le calcul barycentrique.....	87
c - Le groupe affine .....	88
d - Espaces affines réels et complexes.....	92
Généralités.....	92
Topologie d'un espace affine réel .....	92
Orientation d'un espace affine réel .....	93

Droite affine complexe.....	94
Complexification d'un espace affine réel.....	95
e - Relations d'incidence dans l'espace affine en dimension 3 :géométrie affine synthétique .....	96
Axiomes d'incidence dans l'espace affine .....	96
Le groupe des translations .....	98
Le groupe des homothéties-translations.....	102
Bipoints équipollents. Vecteurs .....	104
Le corps des scalaires et la structure d'espace vectoriel.....	105
<b>4 - Géométrie euclidienne dans l'espace (de dimension 3)</b>	
Introduction .....	109
a - Produit scalaire, distance, orthogonalité.....	110
L'espace euclidien.....	110
Distance d'un point à un plan, équations normalisées d'un plan .....	111
Distance d'un point à une droite .....	112
Produit scalaire et barycentre .....	113
b - Isométries de l'espace euclidien.....	114
Définition et premier théorème fondamental.....	114
Problèmes d'orientation .....	116
Deuxième théorème fondamental.....	117
Le groupe des rotations qui fixent un point.....	118
Le groupe des déplacements .....	120
Classification des isométries indirectes.....	122
Forme analytique des isométries .....	124
Questions d'angles .....	125
c - Similitudes, transformations affines.....	125
d - Théorèmes structurels.....	127
e - Généralisations .....	129
<b>5 - Géométrie métrique de la sphère</b>	
Introduction .....	131
a - Propriétés élémentaires de la distance .....	131
Notations et définitions.....	131
Somme des angles d'un triangle .....	137
Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.....	138
Topologie d'un plan sphérique .....	140
Cercles et disques.....	141
Géométrie élémentaire du triangle .....	141
L'aire d'une figure sphérique .....	144
b - Les isométries de la sphère.....	147
Une première approche, externe.....	147
Symétries points, symétries orthogonales et symétrie antipodale.....	148
Premier théorème fondamental.....	150
Questions d'orientation.....	151
Un système naturel de repères .....	152
Translations et rotations .....	154
Le groupe des isométries qui fixent un point .....	155
Symétries glissées .....	156
<b>6 - Espaces géométriques</b>	
Introduction .....	157
Plus court chemin d'un point à un autre dans un espace métrique.....	157
Espaces géométriques .....	162
La relation de plus grande proximité.....	166
<b>7 - Droite projective réelle, homographies .....</b>	<b>169</b>

a - Introduction.....	
Perspective d'une droite sur une autre droite .....	169
Paramétrages rationnels d'un cercle .....	170
Transformations naturelles d'un cercle .....	171
b - Droites projectives, homographies, birapport.....	172
Homographies entre faisceaux de droites .....	172
Birapport de 4 droites d'un faisceau .....	174
Définition de la structure de droite projective.....	175
Topologie de la droite projective réelle.....	180
Droite projective et dualité.....	180
c - Le groupe des homographies d'une droite projective .....	181
Résultats généraux .....	181
Homographies directes et indirectes .....	185
Divisions harmoniques.....	185
Les involutions d'une droite projective réelle.....	186
Orientation de la droite projective réelle.....	189
d - Intersection de deux faisceaux de droites en homographie dans .....	190
un même plan affine.....	
Fonctions polynômes sur un plan affine.....	190
Intersection de faisceaux en homographie.....	191
Réciproques et théorème de Pascal .....	193
Classification des coniques non décomposées dans un plan affine .....	196
e - Théorèmes structurels.....	198

## **8 - Introduction au plan hyperbolique et à ses modèles**

Introduction .....	201
a - Quelques propriétés intuitives inévitables du plan hyperbolique .....	202
La géométrie des puzzles.....	202
Ce qu'on réclame d'un plan hyperbolique .....	205
L'angle de parallélisme et la formule liant l'aire et les angles d'un triangle.....	206
Les points à l'infini dans le plan hyperbolique.....	209
La droite à l'infini d'un plan hyperbolique .....	210
Le modèle de Beltrami.....	211
b - Droites euclidiennes, elliptiques et hyperboliques .....	213
La droite euclidienne réelle abstraite.....	214
La droite euclidienne abstraite sur un corps euclidien $\mathbb{R}$ .....	215
Le cercle euclidien abstrait sur un corps euclidien $\mathbb{R}$ .....	217
La droite hyperbolique abstraite sur un corps euclidien $\mathbb{R}$ .....	221
Les droites hyperboliques réelles ressemblent beaucoup à des droites euclidiennes réelles.....	226

## **9 - Le plan hyperbolique via le modèle de Beltrami**

Introduction .....	229
a - Le modèle de Beltrami : déplacements et antidéplacements du plan hyperbolique.....	230
Principales définitions, étude des symétries .....	230
Deux théorèmes fondamentaux pour le groupe des placements.....	242
Le groupe des placements qui fixent un point .....	244
Déplacements et antidéplacements du plan hyperbolique qui fixent une droite.....	247
Classification des antidéplacements.....	250
Le groupe des placements qui fixent un point à l'infini.....	251
Classification des déplacements .....	255
Tableau récapitulatif des placements et de leurs invariants .....	256
Questions d'angles.....	256
b - Structure projective du plan hyperbolique .....	260
Birapport de quatre points alignés ou de quatre droites concourantes dans un plan hyperbolique .....	260
Placements et birapports .....	263

Les droites du plan hyperbolique comme droites hyperboliques .....	265
Coniques du plan hyperbolique .....	267
Les cercles du plan hyperbolique comme coniques et comme cercles euclidiens	269
Les horocycles comme coniques et comme vraies droites euclidiennes du plan hyperbolique.....	269
Faisceaux de droites et cycles.....	272
Les équidistantes du plan hyperbolique comme coniques et comme droites hyperboliques (abstraites) .....	275
c - Le plan hyperbolique comme espace géométrique .....	277
Équidistance et relation de plus grande proximité.....	277
La distance dans un plan hyperbolique réel.....	279
d - Le plan hyperbolique comme espace géométrique .....	282