Résumés

Michel Serfati,
I. Sur la philosophie des méthodes en mathématiques (Introduction au volume) p. 9

Sous son titre essentiellement cartésien, le présent volume constitue une publication partielle des actes du séminaire d'épistémologie et d'histoire des mathématiques de l'IREM de l'Université Paris VII — il se tient à l'Institut Henri Poincaré depuis une vingtaine d'années — ainsi que de ceux d'un colloque de philosophie des mathématiques organisé par ce même Institut, que j'ai tous deux dirigés. Il se compose de quatorze textes, est articulé en deux parties, respectivement intitulées « La force de la méthode » (dix textes) et « L'existence en mathématiques » (quatre), et privilégie les questions d'histoire des idées et d'épistémologie par rapport à des descriptions purement évènementielles, avec pour objectif de mettre en lumière quelques unes des diverses facettes qui concourent à organiser en mathématiques ce qu'on appelle communément depuis Descartes la *méthode*.

Michel Serfati,
II. Le développement de la pensée mathématique du jeune Descartes
(L'éveil d'un mathématicien) p. 43

Cet article est consacré au jeune Descartes et au développement de sa pensée mathématique durant la période 1618-1629, depuis la rencontre avec Beeckman jusqu'à son départ pour la Hollande. Le moment des rêves, décisif pour le développement de sa personnalité, est aussi évoqué. Dans cette période des mathématiques chez Descartes bien antérieure à la *Géométrie*, on distingue diverses étapes dans la maturation progressive de sa pensée. On examine ainsi les aspects mathématiques de quelques textes cartésiens du temps, « la » lettre à Beeckman et les *Cogitationes Privatae*, puis les Règles pour la Direction de l'Esprit (*Regulae*), enfin la découverte de la *construction des solutions* des équations du troisième et du quatrième degré, qui fut décisive quant à l'« éveil » de Descartes mathématicien. On met en évidence une figure de pensée, le « moyen terme », centrale chez le jeune Descartes, et trois de ses incarnations mathématiques, les moyennes proportionnelles, les compas cartésiens, et la « règle-glissière ». Rédigés en termes mathématiques modernes, les articles III, IV, V, ci-après relatifs à trois des inventions cartésiennes, viennent compléter ce texte.

Michel Serfati,
III. Sur diverses fonctions des compas cartésiens. ***On various functions of cartesian compasses***
(Première note) p. 79
L'objectif de cet article, rédigé en termes mathématiques modernes, est de décrire le fonctionnement des compas cartésiens (à équerres glissantes) et d'analyser leurs trois fonctions chez Descartes, insérer des moyennes proportionnelles, produire des courbes, résoudre des équations.

Michel Serfati,
IV. « Règle-glissière cartésienne » et transformée de Descartes.
Descartes' ruler-and-slide, and transformation **(Deuxième note)** p. 83
L'objectif de cet article est d'abord de décrire le fonctionnement mécanique, tel que Descartes l'expose dans le livre II de sa *Géométrie*, de la règle-glissière, une autre machine cartésienne qui sera venue remplacer et supplanter les compas de sa jeunesse, de proposer ensuite une élaboration en termes mathématiques modernes du procédé (théorèmes I et II), de revenir ensuite au texte cartésien pour constater l'adéquation du schéma moderne avec le texte original (théorème III), enfin de décrire et d'analyser diverses extensions qui nous semblent aujourd'hui « naturellement » inscrites dans la méthode moderne, co-extensives au procédé, mais que Descartes n'aura pas examinées.

Michel Serfati,
V. Sur la « construction » des équations des troisième et quatrième degrés et des moyennes proportionnelles chez Descartes. ***The « construction » of equations of the third and fourth degrees and proportional means in Descartes*** **(Troisième note)** p. 97
L'objectif de cet article est de décrire la procédure cartésienne, entièrement neuve à l'époque, de ce que Descartes appelle la « construction » des équations des troisième et quatrième degrés. — et celle, corrélative, des moyennes proportionnelles doubles — telle qu'il la proposait à Beeckman dès 1629 et telle qu'il la présenta ensuite en 1637 au lecteur du livre III de la *Géométrie*. Par souci de clarté envers le lecteur moderne, c'est ce dernier texte, avec ses figures, que nous suivrons ici ; à la fin de la présente note, nous mettrons brièvement en regard ce texte avec celui du Journal de Beeckman.

Adrien Douady,
VI. Géométrie dans les espaces de paramètres. Une méthode de géométrisation p. 111
De nombreux problèmes se ramènent à des questions de géométrie dans un "espace de paramètres" approprié. Nous donnons trois exemples pour expliquer ce que nous entendons par là.

Rémi Langevin,
VII. Gaspard Monge, de la planche à dessin aux lignes de courbure p. 133
L'expérience du dessin de plans et la curiosité scientifique de Gaspard Monge ont à notre avis influencé sa manière, très visuelle, de raisonner en mathématiques. Il était aussi un enseignant remarquable. Le souci de former les futurs cadres de la nation, donc d'expliquer à la fois les notions mathématiques et leurs éventuelles applications est sans doute lié à son besoin de voir et de représenter de manière précise les objets mathématiques qu'il définit.

André Revuz,
VIII. Y a-t-il une méthode mathématique ? p. 159

La première réponse qui peut venir à l'esprit citera la déduction ou la démonstration. C'est un aspect essentiel de la démarche mathématique, mais ce n'est pas le seul : le problème du mathématicien est moins « Comment démontrer ? » que « Que démontrer ? » et comment choisir les axiomes qui sont à la base de tout raisonnnement déductif. Les mathématiques ont prouvé, à la surprise de certains, qu'elles pouvaient être terriblement efficaces pour décrire les phénomènes naturels, selon le processus : 1. délimitation d'une situation ; 2. Construction d'un modèle adéquat à la situation ; 3. édification de théories qui mettent en valeur les idées essentielles qui font le succès des modèles. La démarche mathématique fonctionne grâce à ce va-et-vient permanent entre ces trois pôles. D'une autre côté, l'articulation entre la science mathématique et l'enseignement de la discipline tel qu'il se pratique paraît bien problématique.

Olivier Hudry,
IX. Machines de Turing et complexité algorithmique p. 179

L'objectif de cet article consiste à esquisser le rôle des machines de Turing en théorie de la complexité (des algorithmes et des problèmes), dans le domaine de l'optimisation combinatoire. Après avoir rapidement rappelé le contexte historique dans lequel sont nées puis ont évolué les machines de Turing, nous détaillons le fonctionnement de celles-ci, en distinguant entre machines de Turing déterministes et machines de Turing non déterministes. Nous montrons ensuite comment les utiliser pour définir la complexité (en temps de calcul) des algorithmes. Enfin, nous décrivons grâce à elles plusieurs classes fondamentales en théorie de la complexité : la classe *P*, la classe *NP*, la classe des problèmes *NP*-complets et la classe co-*NP*.

Ivor Grattan-Guinness (Traduction Anne Michel-Pajus),
X. La psychologie dans les fondements de la Logique et des mathématiques.
Les cas de Boole, Cantor et Brouwer p. 213

J'examine dans cet article trois mathématiciens qui ont laissé les processus mentaux jouer quelque rôle dans les fondements de leurs théories logiques ou mathématiques. Boole considérait son algèbre Booléenne comme une théorie des actes mentaux ; Cantor a permis aux processus d'abstraction de jouer un rôle dans sa théorie des ensembles ; Brouwer prenait la perception du temps comme pierre angulaire de ses mathématiques intuitionnistes. Trois annexes s'intéressent à des sujets voisins.

Alain Michel,
XI. Thèses d'existence et travail mathématique p. 243

L'étude qui suit cherche à montrer comment le discours sur l'existence mathématique doit être mis en relation avec le travail mathématique. Les problèmes d'existence, dans la forme abstraite que nous leur connaissons aujourd'hui, et qui nous est devenue si familière que nous n'y prenons même plus garde, sont nés de pratiques mathématiques historiquement assignées. Leur développement mathématique, le travail d'élaboration qui conduit à formuler des thèses volontiers qualifiées de "philosophiques", a lieu dans l'histoire, où se trouvent en effet les conditions de leur nécessaire émergence. On rappelle d'abord quelles furent les étapes de la constitution en problème de l'existence mathématique, puis on essaie d'analyser, sur l'exemple de Kronecker, les modalités précises selon lesquelles les thèses d'existence d'un mathématicien se rapportent à son travail spécifique.

Michel Serfati,
XII. Analogies et « prolongements » (Permanence des formes symboliques et constitution d'objets mathématiques)

Le présent article est consacré à l'analyse, philosophique et historique, de certaines modalités de création d'objets mathématiques, ancrées dans l'écriture symbolique, initialement en dehors de toute question de significations. Sur divers exemples, historiques ou contemporains, on met à jour un schéma épistémologique, le « principe » de prolongement, qui est une de ces figures de pensée spécifiques de l'invention mathématique, transcendant la simple analogie usuelle dans les autres sciences.

Michel Bitbol,
XIII. Critères d'existence et preuves d'existence

Un "critère d'existence" des entités théoriques de la physique est introduit dans un esprit wittgensteinien. Le critère d'existence n'est ici rien d'autre que l'ensemble des conditions conduisant à engager une pratique de recherche sous la présupposition qu'un certain type d'entité est disponible pour des manipulations. On se demande ensuite si le sens même du mot "existence" ne dépend pas de la nature de ces conditions d'engagement ontologique.

Michel Mosconi,
XIV. Quelques difficultés du structuralisme mathématique

Pour le structuralisme mathématique la référence à des objets mathématiques se fait toujours dans le contexte d'une structure : ils ne sont rien de plus que le rôle qu'ils jouent dans cette structure ; simples positions dans celle-ci, ils n'ont pas de composition « interne », d'identité ou de caractéristiques en dehors d'elle. La vive critique de Russell contre la théorie peanienne des entiers a contribué paradoxalement à l'explicitation d'une conception structuraliste des entiers naturels déjà clairement suggérée par Dedekind. Dans une version modérément éliminative, le structuralisme, en remplaçant les énoncés mathématiques usuels par des implications quantifiées, évite d'introduire une multiplicité d'entités spéciales autres que les ensembles et coupe court à certaines apories philosophiques. Plus radical, le structuralisme du second ordre transforme les énoncés mathématiques en énoncés de logique du second ordre, mais face au problème de la vacuité, il doit ou réintroduire les ensembles ou s'appuyer sur des notions modales problématiques ; et son application à la théorie des ensembles fait particulièrement difficulté. Aujourd'hui certains comme M. Resnik sont plus sensibles à l'intérêt heuristique, méthodologique et philosophique du structuralisme qu'attirés par le projet d'une théorie mathématique globale des structures. Une telle conception semble pouvoir affronter sans incohérence les difficultés liées à l'identité. À ceux qui voient dans celles-ci les conséquences inévitables d'une sémantique référentielle en philosophie des mathématiques, le structuralisme actuel peut aussi opposer, comme le fait S. Shapiro, un nouveau réalisme appuyé sur une théorie axiomatique des structures.