Introduction

Les premiers calculs de probabilité, on le sait bien, sont relatifs à un nombre fini d'épreuves aléatoires, par exemple cent parties de pile ou face, ou n'importe quel nombre de parties aussi grand soit-il, mais fini et fixé. On est alors dans le cas des probabilités finies ou discrètes, où la doctrine des combinaisons intervient naturellement. On a également envisagé assez tôt le cas d'un nombre fini de choix au hasard d'un nombre réel compris entre 0 et 1. Le nombre de cas possibles est alors continu et l'on entre dans l'univers particulier des « probabilités continues » ou « géométriques » abordé par Buffon dans les années 1730 à propos du jeu de franc-carreau et du problème de l'aiguille, mais surtout investi par les savants de la seconde moitié du 18e siècle dans le cadre de la théorie des erreurs d'observations dont l'astronomie de précision a besoin, et bientôt l'artillerie et toutes les sciences expérimentales. L'analyse prend alors le relais. Mais, qu'on soit dans le cas discontinu ou dans le cas continu, on ne considère en réalité qu'un nombre fini d'épreuves et d'événements, et, si ce nombre devient trop grand pour autoriser des calculs exacts, dans la grande majorité des situations, on évalue les probabilités par approximation à l'aide du théorème de Bernoulli-Moivre-Laplace et de la courbe de Gauss, (annexe 2 du volume 2).

Que se passe-t-il lorsque le nombre des parties ou des événements devient infini, au jeu de pile ou face par exemple, ou à un jeu quelconque qui se prolonge indéfiniment ? Cette question a-t-elle un sens ? Voilà des préoccupations étrangères aux premiers savants intéressés par ces sujets, qui considèrent généralement que la probabilité de tout événement lié ou non à une infinité de parties, comme la ruine d'un joueur au jeu de pile ou face, a un sens unique et nécessaire, par quelque moyen qu'on l'approche, et qui, au contraire, vont préoccuper les nouveaux analystes du début du 20e siècle soucieux de préciser la théorie mathématique, pour en exprimer toute la richesse et la mettre à l'abri des paradoxes et des contradictions apparus peu à peu au fil des développements et des applications. Nous discutons brièvement cette question ici, qui d'ailleurs peut servir d'illustration aux problèmes posés par l'intrusion de l'infini des mathématiciens dans le monde fini des applications, et les tentatives pour le maîtriser.

L'infini, en effet, intervient très tôt en mathématique où il a ceci pour lui de n'être pas une complication ou une difficulté supplémentaire, comme il l'est en philosophie ou en théologie, mais au contraire d'être une simplification que n'ont pas manqué de remarquer les savants de tous les temps, les Grecs en particulier qui en ont fait grand usage, les Arabes après eux (Rashed [1996]), et finalement les Latins dont nous sommes issus. C'est la méthode d'exhaustion d'Eudoxe et Euclide, capable de calculer exactement une surface ou une longueur en les épuisant progressivement jusqu'à leur terme ultime. L'exemple le plus connu d'une telle méthode est le calcul par Archimède de l'aire a délimitée par un cercle de rayon unité connaissant son périmètre l. On divise le cercle en n secteurs égaux de même sommet, comme on partage une tarte aux pommes en n parts égales. Si n est assez grand, on peut assimiler chacun de ces secteurs à un triangle isocèle de hauteur sensiblement égale à l'unité et de base l/n, dont la surface est égale à $l/2n$. La surface de tous les secteurs pris ensemble est ainsi, à fort peu près, $l/2$ qui est donc égale à l'aire a. Le calcul est d'autant plus exact que n est grand, il le serait parfaitement si n était infini. Si bien que l'infini résout à la perfection le problème de la surface du cercle qu'on serait bien en peine d'évaluer autrement. Il est certain que les Babyloniens ou les Égyptiens savaient faire de tels calculs bien avant Archimède pour mesurer certaines surfaces ou des volumes remarquables , la pyramide de Chéops, par exemple (Velpry [1987], Seidenberg [1988]). Donc en géométrie, la mère des mathématiques grecques avec l'arithmétique, l'infini n'est pas une gêne, c'est au contraire une aide précieuse, à condition de ne pas se laisser prendre à ses pièges.

La situation est assez comparable en calcul des probabilités. Les premiers calculs mettent en jeu, on l'a dit, un petit nombre de cas ou de dés, mais assez rapidement on atteint les limites du calcul combinatoire. Les méthodes algébriques pures viennent alors à la rescousse. Elles s'appliquent principalement dans des cas présentant une certaine symétrie où la mise en équation se fait naturellement. C'est Huygens qui en donnera les premières applications les plus connues dans son traité [1657], et après lui tous les autres.

Mais il est d'autres questions très simples qui touchent d'une façon ou d'une autre à l'infini, qui semblent donc rétives au traitement algébrique ou combinatoire, et qui ont été considérées par Pascal et Fermat vers 1654-1655. Elles sont relatives aux jeux qui peuvent se prolonger sans fin, un jeu de pile ou face, par exemple, dont on ne limite pas le nombre des parties et à propos desquels on veut connaître certaines probabilités, celle que l'un des joueurs se ruine notamment, sachant qu'il pourrait très bien s'enrichir indéfiniment si la chance était de son côté. Ni Pascal, ni Fermat n'ont précisé les méthodes qu'ils utilisaient dans de telles situations infinies, qui peuvent souvent demeurer dans le domaine fini par des artifices singuliers, qui deviendront progressivement ce que Laplace appelle la théorie analytique des probabilités, comme nous le verrons dès le second paragraphe de ce volume et dans tout le volume 2. Huygens, qui a repris ce type de problèmes, ne l'indique pas non plus après eux, se contentant de poser dans son traité [1657] cinq problèmes sans solution dont le premier et le dernier sont indubitablement de nature infinie. On sait que ces problèmes et d'autres analogues vont préoccuper les savants à partir de 1685 et plus encore après la publication du grand traité de Jacques Bernoulli, *Ars conjectandi*, [1713], qui traite de plusieurs façons les problèmes de Huygens dans sa première partie et propose une méthode générale que nous examinons au paragraphe 1 ci-dessous.

Prenons l'exemple le plus simple possible d'un jeu infini, une forme simplifiée du premier problème de Huygens qu'on attribue généralement à Fermat. On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'elle tombe sur face, on gagne alors un euro. On demande quelle est la probabilité de gagner ? Limitons nous à n parties. On observe que le joueur peut gagner à la partie 1, ou à la partie 2, ..., ou à la partie n. La probabilité que le joueur gagne avant la partie n est donc égale par le principe d'addition des probabilités énoncé par Huygens et d'autres avant lui, à la somme des probabilités de ces n cas, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

égalité que l'on démontre par récurrence, en ajoutant des deux côtés $\frac{1}{2^{n+1}}$. D'où il résulte, de toute évidence, que la probabilité de gain avant n est d'autant plus voisine de 1 que n grandit. Le joueur est presque certain de gagner.

On voit bien où l'infini apparaît, le nombre des parties est illimitée, et où il devient une simplification, en se laissant maîtriser par une somme que l'on sait ou que l'on saura calculer, en l'occurrence ici la somme de la série géométrique de raison ½. Comme dans le cas de la méthode d'exhaustion appliquée au cercle d'Archimède, on épuise la probabilité par une somme illimitée de termes de plus en plus en plus petits, une série infinie.

On peut également raisonner sur l'événement contraire, et chercher la probabilité que le joueur ne gagne rien avant la partie n. Il y a 2^n résultats possibles des n jets de la pièce, sur lesquels un seul fait perdre le joueur. La probabilité de perte avant n est donc $\frac{1}{2^n}$. Elle est d'autant plus petite que n est grand. Le joueur est presque sûr de ne pas perdre, ce qui redonne le résultat précédent sans calcul de la somme de la série géométrique, un calcul qui lui n'est attesté en Occident qu'à partir du 14e siècle.

Les deux raisonnements sont-ils équivalents ? Si c'est le cas, comment passer de l'un à l'autre ? Ou encore, existe-t-il un calcul des probabilités dénombrables qui assure la cohérence de l'ensemble, notamment l'unicité de la probabilité cherchée par quelque procédé de calcul qu'on adopte ? Le problème est ici si simple qu'il faut avoir l'esprit de contradiction poussé très loin pour contester le second calcul parce qu'il dissimulerait en réalité un résultat plus fort, à savoir que la somme d'une série géométrique de raison ½, commencée à ½, est égale à 1, un résultat qui, lui, est assuré géométriquement en partant de 0 sur l'intervalle (0,1) que l'on partage en deux parties égales, puis la partie restante à droite en deux et ainsi de suite jusqu'à avoir atteint 1 au bout d'une infinité de pas comme Achille à la poursuite de sa tortue. Mais, il ne faut pas se faire d'illusion, c'est toujours par des fissures infimes qu'on pénètre dans un univers mathématique nouveau. Pour initier une théorie, même la plus modeste, ici les probabilités dénombrables, il faut passer par le trou de la serrure. L'apport certainement le plus novateur de Borel, nous le verrons au paragraphe 7, est précisément d'avoir montré qu'une suite infinie de parties de pile ou face peut se représenter géométriquement comme un point de l'intervalle (0,1) muni de la mesure de Borel-Lebesgue, laquelle, étant par construction dénombrablement additive, autorise tous les calculs dénombrables sans contestation possible. C'est ce que nous allons tenter d'exposer dans les huit paragraphes de ce premier volume, qui va de Bernoulli à Borel.

Il aurait fallu sans doute aller au-delà et montrer comment les probabilités dénombrables de Borel sont devenues vers 1930 la théorie modernisée de Kolmogorov, celle que l'on enseigne actuellement dans les écoles et les universités. Comme on sait, cette théorie ne se limite pas aux suites infinies de parties de pile ou face, mais fait de ces dernières une sorte de modèle de toute la théorie en un ensemble d'axiomes fixes et reconnus. Il semble qu'il n'y ait qu'un pas à franchir, pour passer de la théorie borélienne à cette du savant russe, mais l'approche historique que nous adoptons ici nous fait obligation de suivre chacun des acteurs de cette épopée savante des plus petits aux plus grands, et cela demande de longs développements d'un texte déjà beaucoup trop long. D'autant que ce travail a été fort bien fait ces dernières années par les meilleurs savants auxquels le lecteur pourra avantageusement se reporter. Citons par exemple Loève [1955], Breiman [1968], Shiryaev [1989], von Plato [1994], Kallenberg [1997], Chaumont *et al.* [2004], Shafer, Vovk [2005], Bogachev [2006], ... Nous ne saurions rien y ajouter d'utile. Bref, nous nous arrêtons à Borel à qui nous laissons le soin de résumer et de conclure notre introduction.

Dans son traité philosophique, *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, [1939], au chapitre VI, « Les probabilités et l'infini », p. 108, après avoir rappelé, comme nous l'avons fait, qu'en mathématiques, si l'on se place au point de vue pratique, l'introduction de l'infini n'est pas une complication, mais une simplification, Borel précise : « L'infini paraît s'être introduit tout d'abord en calcul des probabilités par l'étude du problème des épreuves répétées et des résultats auxquels on arrive en supposant que le nombre des épreuves augmente indéfiniment. »

C'est ce qu'il nous faut préciser maintenant.