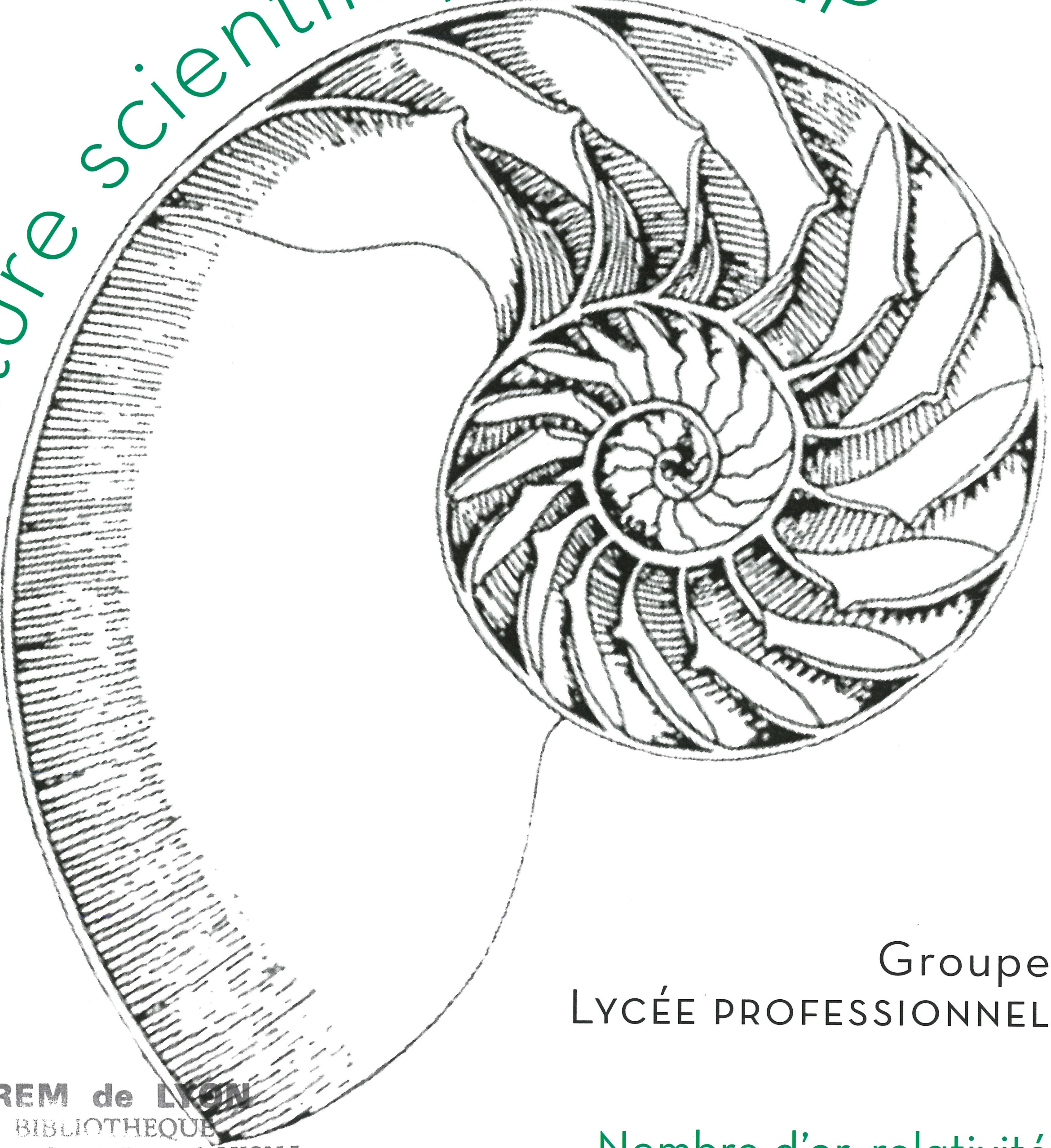
Les Publications de
l'IREM de BESANÇON

IBC09001.PDF

Culture scientifique en LP



Groupe
LYCÉE PROFESSIONNEL

Nombre d'or, relativité et autres divertissements scientifiques au lycée professionnel (LP)

Presses universitaires de Franche-Comté

Culture scientifique en LP

Pratiques & Techniques

Directrice de collection Hombeline Languereau

Parutions récentes dans la série **Les Publications de l'IREM de BESANÇON**

Directrice de série Anne-Marie Aebischer

Les fonctions en mathématiques et en sciences physiques,
Groupe Mathématiques-Sciences physiques, ISBN 978-2-84867-228-1, 2008

Rallye mathématique de Franche-Comté 2005,
Groupe Rallye, ISBN 2-84867-154-8, 2006

De la sphère au plan,
Groupes Lycée et Cartographie, ISBN 2-84867-098-3, 2005

Lois continues, test d'adéquation. Une approche pour non spécialiste,
Groupe Probabilités & Statistique, ISBN 2-84867-101-7, 2005

À la découverte des polyèdres,
Stéphane Bernard, ISBN 978-2-84627-024-3, 2001

Parutions récentes dans la série **Didactiques**

Commande des systèmes dynamiques.
Introduction à la modélisation et au contrôle des systèmes automatiques,
Arnaud Hubert, ISBN 978-2-84867-235-9, 2008

Du trinôme du second degré à la théorie de Galois. Une croisière conceptuelle,
Jean Merker, ISBN 978-2-84867-205-2, 2007

Le calcul mental, entre sens et technique,
Denis Butlen, ISBN 978-2-84867-198-7, 2007

Maths en formes,
Bernard Bettinelli, ISBN 2-84867-138-6, 2006

ISBN 978-2-84867-257-1

IREM de Franche-Comté

Culture scientifique en LP

Nombre d'or, relativité et autres divertissements scientifiques au lycée professionnel (LP)

Groupe
Lycée professionnel

Presses universitaires de Franche-Comté, 2009
diffusé par l'IREM de Franche-Comté

Les auteurs

Stéphane Bernard, professeur de lycée professionnel au lycée Pergaud de Besançon a été animateur à l'IREM de Franche-Comté de 2000 à 2007 où il a participé aux travaux du groupe « lycée professionnel » ainsi qu'à la commission inter-IREM « LP » dont il a assuré la responsabilité en 2006-2007. Il est auteur de *À la découverte des polyèdres* paru en 2001. Depuis septembre 2007, il est détaché comme conseiller en formation continue au GRETA de Besançon.

Sylvie Brunner, professeure de lycée professionnel au lycée Tristan Bernard de Besançon est animatrice à l'IREM de Franche-Comté depuis 2000 où elle assure la responsabilité du groupe « lycée professionnel ». Depuis 2007, elle participe aux travaux de la commission inter-IREM « LP ».

Ludovic Degrandcourt, professeur de lycée professionnel au lycée Jouffroy d'Abbans de Baume-les-Dames, a été animateur à l'IREM de Franche-Comté de 2000 à 2008 où il a participé aux travaux du groupe « lycée professionnel ». Depuis septembre 2007, il est chef d'établissement.

Les auteurs remercient chaleureusement :

- Jean-Pierre Raoult, professeur émérite des universités et Didier Perrault, responsable de la commission inter-IREM groupe « lycée professionnel », pour leurs expertises constructives et attentives,
- Jean-Marie Vigoureux, professeur des universités, pour sa relecture et ses conseils avisés en sciences physiques,
- Hombeline Languereau et Anne-Marie Aebischer, précédente et actuelle directrices de l'IREM, pour leur soutien et leur patience tout au long de la laborieuse élaboration de cette brochure ; Monique Diguglielmo secrétaire à l'IREM pour sa gentillesse et sa disponibilité sans oublier Julie Gillet des Presses universitaires de Franche-Comté pour la valeur ajoutée de mise en page qu'elle a su apporter à cet ouvrage.

Action de l'IREM de Franche-Comté

avec le soutien financier

de l'Université de Franche-Comté,
dans le cadre du plan quadriennal 2008-2011

avec les moyens horaires

du rectorat de l'académie de Besançon,

du ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche,
(DGESCO)

de l'Université de Franche-Comté

Sommaire

Introduction

L'enseignement des mathématiques au lycée professionnel s'adresse à des élèves qui pour la plupart feront des études courtes (Dans l'académie de Besançon, 61 % des élèves ayant obtenu le certificat d'aptitude professionnelle, arrêtent leurs études, 83 % des élèves de baccalauréat professionnel ne poursuivent pas au-delà et 13 % continuent en Brevet). Sa motivation est double, d'une part approfondir des notions vues au collège dans le but de les mettre au service d'applications les plus concrètes possibles, d'autre part les rendre utilisables dans des situations variées en vue de comprendre des phénomènes a priori très complexes du monde qui nous entoure.

Le public du lycée professionnel est très varié : des élèves motivés par l'envie d'avoir un métier, des élèves en grandes difficultés tant sur le plan personnel que scolaire... pas toujours faciles à gérer et souvent imprévisibles. Ne pas fournir un « sous–enseignement » et proposer des activités riches de sens nous paraît essentiel.

Nos recherches menées à l'IREM nous ont conduits à construire et à expérimenter des séquences répondant aux objectifs ci–dessus. Nous enseignons dans des spécialités tertiaires et industrielles. Il n'y a pas plus de points communs entre un élève de baccalauréat professionnel *vente* et un de baccalauréat professionnel *électrotechnique* qu'entre un élève de première *science et technique de gestion* et un de première *scientifique* et pourtant nos élèves sont souvent orientés de la même façon. Dans une classe de baccalauréat professionnel, sont présents des élèves pour qui l'enseignement général ne présente aucune difficulté (ils peuvent avoir la note maximale toute l'année en mathématiques) et des élèves ayant des lacunes énormes (certains n'ont aucun acquis opératoire sur les entiers relatifs, par exemple). Le contenu du programme de mathématiques–sciences prend en compte le fait que nos élèves peuvent être en grande difficulté scolaire. Dans la gestion quotidienne de nos classes, nous devons nous adapter à leur hétérogénéité mais aussi tenir compte, en essayant de ne pas les subir, des difficultés d'ordre privé de certains élèves. Le recours à des activités originales permet de laisser un espace d'approfondissement des connaissances à ceux qui en ont la possibilité et de distraire les autres de leur quotidien. Ici la distraction est analogue à celle que peut avoir un adulte face à un jeune enfant capricieux en cherchant à détourner son attention plutôt que de s'agacer.

L'objectif de cette brochure est de fournir quelques activités de mathématiques, simples à mettre en œuvre, dans le domaine des sciences. Nous avons choisi d'explorer les thèmes suivants : le système solaire, les calendriers, le nombre d'or, la vitesse de la lumière et du son, la relativité du temps et des distances. Ces activités indépendantes, d'une durée d'une heure peuvent être utilisées au gré des enseignants en sciences ou en mathématiques. Elles sont l'occasion de réinvestir le calcul en algèbre et en géométrie. Pour faciliter la recherche et la sélection d'informations dans des textes scientifiques, nous avons adapté le vocabulaire au niveau de nos élèves.

Cette brochure répond aux objectifs d'entrée par thématique des nouveaux programmes de baccalauréat professionnel en trois ans. Parmi celles-ci, figurent : « transmettre une information », « mesurer le temps et les distances », « découvrir les nombres à travers l'histoire des mathématiques », « observer le ciel ». Les thèmes abordés contribuent à développer, chez les élèves, le sens de l'observation, la curiosité, l'imagination raisonnée, la créativité, l'ouverture d'esprit, le goût de chercher et de raisonner, la rigueur et la précision, l'esprit critique vis-à-vis de l'information disponible.

Chaque chapitre se compose de la façon suivante :

– une fiche descriptive listant la durée prévisible de l'activité, les notions mathématiques abordées, les références scientifiques et historiques, le vocabulaire utilisé ;

– un document élève photo copiable* qui peut être distribué tel quel ;

– un document professeur comportant un corrigé.

Chaque partie pourra être précédée ou suivie d'une recherche documentaire.

Enfin chaque approche, à travers ses références historiques, est l'occasion de montrer que la science est vivante et en marche.

Chapitre 1
Le système solaire

1.1. Objectifs des séquences

Les objectifs sont de connaître notre système solaire et de mettre en œuvre les notions mathématiques suivantes : puissances de 10, conversions, repérage sur un axe, échelles. Du point de vue méthodologique, les élèves doivent rechercher des informations sur les documents joints.

Nous avons expérimenté cette séquence d'enseignement dans 4 classes de certificat d'aptitude professionnelle ou de brevet d'études professionnelles soit en tant qu'activité de réinvestissement soit en tant que projet de connaissance du système solaire. Nos classes ont un effectif compris entre 24 et 30 élèves.

Lors de nos expérimentations, la séance d'enseignement est d'une heure en classe entière ou en groupes. Nous avons distribué en début de séance un dossier constitué de la fiche à remplir et de la fiche « les planètes du système solaire ». Cette séance peut éventuellement être précédée par une recherche documentaire hors temps scolaire. On peut s'attendre à ce que les élèves apportent leurs livres de vulgarisation s'adressant à des enfants de 7 à 10 ans.

Le travail en classe entière est possible car l'activité est très guidée. Lors de la synthèse, le professeur après avoir observé ses élèves, permet de confronter, valider, approfondir leurs connaissances. Certains découvrent que l'on peut s'intéresser à la vitesse de rotation de la Terre tandis que d'autres savent que l'année-lumière est une unité de distance. On peut entendre un élève s'interroger : « qu'est-ce qu'on en a à faire de savoir à quelle vitesse on tourne ? » et un camarade lui répondre : « tu te rends compte le vol plané si elle s'arrêtait d'un coup ? ».

Synthèse de l'activité

Cette activité est accessible quel que soit le niveau des élèves, de la troisième au baccalauréat professionnel. Elle pourra permettre, en fonction des développements apportés, d'étayer telle ou telle partie du programme mathématique ou scientifique.

Prolongements scientifiques

Visiter un planétarium.

Faire venir un planétarium gonflable. En Franche–Comté, les animateurs du pavillon des sciences de Montbéliard se déplacent dans les classes avec une structure gonflable. C'est une sorte de tente qui tient dans une pièce de 6 m sur 9 et dans laquelle une quinzaine de personnes peut prendre place.

Construire le système solaire à l'échelle. Par exemple, si le Soleil est un ballon de basket, la Terre est un grain de poivre situé à 25 m du ballon, Saturne est une noisette située à 238 m.

Suivant les spécialités des élèves, les caractéristiques autres que les tailles de planètes pourront être exploitées.

1.2. Séquence 1 : les distances dans le système solaire

1.2.1. Document élève

« **M**on **V**élo **T**ourne **M**al ; **J**e **S**uis **U**n **N**ouveau **P**iéton ! »
Quel usage peut-on faire de cette phrase ?

A. Distances réelles planètes-Soleil

Le système solaire est constitué d'un ensemble de planètes qui tournent autour du Soleil, dans le même sens, sensiblement sur le même plan, mais à des distances très diverses.

Nous vous proposons d'étudier les différentes distances de ces planètes par rapport à un référentiel donné : le Soleil.

1. En utilisant le document annexé « les planètes du système solaire », pages 18 et 19, reporter les distances au Soleil selon les exemples. Les distances sont mesurées en kilomètres.

Jupiter	778 300 000 km	Saturne	km
Mars	km	Terre	149 600 000 km
Mercure	km	Uranus	km
Neptune	km	Vénus	km
Pluton	km		

2. Arrondir ces résultats à la dizaine de millions de kilomètres la plus proche selon les exemples suivants en se souvenant que, par convention, pour le chiffre 5, on utilise la valeur approchée par excès comme « valeur la plus proche » :

Jupiter	780 000 000 km	Saturne	km
Mars	km	Terre	150 000 000 km
Mercure	km	Uranus	km
Neptune	km	Vénus	km
Pluton	km		

3. Exprimer ces distances en kilomètres sous forme $a \times 10^8$ selon les exemples suivants :

Jupiter	$7{,}8 \times 10^8$ km	Saturne	km
Mars	km	Terre	$1{,}5 \times 10^8$ km
Mercure	km	Uranus	km
Neptune	km	Vénus	km
Pluton	km		

4. Compléter les phrases suivantes :

Pluton est la planète la plus .... du Soleil mais c'est aussi la plus .... du système solaire.

Cette planète se trouve à .... millions de kilomètres du Soleil.

B. Réduction à l'échelle du système solaire

▸ Objectif

Représenter les distances des planètes au Soleil à notre échelle. Pour cet exercice, nous supposerons que les planètes puissent se trouver alignées sur une même droite (en conjonction).

▸ Moyen

Deux feuilles de format A4 juxtaposées de sorte qu'elles forment une feuille $21 \times 59{,}4$.

▸ Consignes

Juxtaposer les 2 feuilles de format A4 par leur largeur, les scotcher pour obtenir une feuille $21 \times 59{,}4$; tracer la médiatrice du côté mesurant 21 cm. Sur l'axe obtenu, placer le point S à un bord de la feuille. Il représente le Soleil.

La planète la plus éloignée du Soleil se trouvant à $59{,}1 \times 10^8$ km, représenter $59{,}1 \times 10^8$ kilomètres par .... cm sur la feuille.

Indiquer sur l'axe, grâce à une flèche et à un point, l'emplacement de la planète Pluton.

▸ Trouver l'échelle

La distance réelle de $59{,}1 \times 10^{13}$ cm sera donc représentée par 59,1 cm sur notre feuille.

▸ Compléter

$59{,}1 \times 10^8$ km $= 59{,}1 \times 10^{\cdots\cdots}$ cm

$$\frac{\text{distance représentée}}{\text{distance réelle}} = \frac{59{,}1}{\cdots\cdots\cdots} = \frac{1}{10^{13}}.$$

L'échelle obtenue est donc une échelle au 1 dix mille milliardième.

1. Remplir le tableau ci-dessous : distance Soleil/planète en cm sur l'axe.

Jupiter	7,8 cm	Saturne	cm
Mars	cm	Terre	cm
Mercure	cm	Uranus	cm
Neptune	cm	Vénus	cm
Pluton	59,1 cm		

2. Construire le schéma à l'échelle :

Prendre comme origine le point S représentant le Soleil. Placer l'ensemble des planètes du système solaire à l'aide d'un point et d'une flèche sur l'axe dessiné grâce aux distances trouvées dans le tableau ci-dessus.

3. Conclure en précisant le rôle de « **M**on **V**élo **T**ourne **M**al ; **J**e **S**uis **U**n **N**ouveau **P**iéton ! »

1.2.2. Document professeur

A. 1.

Jupiter	778 300 000 km	Saturne	**1 427 000 000 km**
Mars	**227 900 000 km**	Terre	149 600 000 km
Mercure	**57 900 000 km**	Uranus	**2 868 000 000 km**
Neptune	**4 505 000 000 km**	Vénus	**108 200 000 km**
Pluton	**5 913 000 000 km**		

Cette partie, jugée facile par nos élèves, leur permet de s'approprier le document joint.

A. 2.

Jupiter	780 000 000 km	Saturne	**1 430 000 000 km**
Mars	**230 000 000 km**	Terre	150 000 000 km
Mercure	**60 000 000 km**	Uranus	**2 870 000 000 km**
Neptune	**4 510 000 000 km**	Vénus	**110 000 000 km**
Pluton	**5 910 000 000 km**		

Ce travail porte sur l'arrondi de grands nombres alors que traditionnellement, c'est plutôt un travail sur les décimaux. Certains sont surpris que l'on puisse arrondir des entiers. L'objectif est de faciliter le passage à la notation scientifique.

A. 3.

Jupiter	$7,8 \times 10^8$ km	Saturne	**$14,3 \times 10^8$ km**
Mars	**$2,3 \times 10^8$ km**	Terre	$1,5 \times 10^8$ km
Mercure	**$0,6 \times 10^8$ km**	Uranus	**$28,7 \times 10^8$ km**
Neptune	**$45,1 \times 10^8$ km**	Vénus	**$1,1 \times 10^8$ km**
Pluton	**$59,1 \times 10^8$ km**		

La progression choisie fait que les élèves effectuent les activités sans difficulté.

A. 4.

Pluton est la planète la plus *éloignée* du Soleil mais c'est aussi la plus *petite* planète du système solaire.

Cette planète se trouve à *5 910* millions de kilomètres du Soleil.

B. Construction de l'axe

La planète la plus éloignée du Soleil se trouvant à $59,1 \times 10^8$ km, on représente donc $59,1 \times 10^8$ kilomètres par *59,1* cm sur les deux feuilles de format A4.

Trouver l'échelle

- Compléter cette conversion : $59,1 \times 10^8$ km = $59,1 \times 10^{13}$ cm.
- $59,1 \times 10^{13}$ cm en réalité sera représenté par 59,1 cm sur les deux feuilles de format A4.

$$\frac{\text{distance sur les deux feuilles}}{\text{distance réelle}} = \frac{59{,}1}{59{,}1 \times 10^{13}} = \frac{1}{10^{13}}.$$

En fonction de la classe, l'enseignant peut prévoir de rappeler certains contenus.

B. 1.

Jupiter	7,8 cm	Saturne	**14,3** cm
Mars	**2,3** cm	Terre	**1,5** cm
Mercure	**0,6** cm	Uranus	**28,7** cm
Neptune	**45,1** cm	Vénus	**1,1** cm
Pluton	59,1 cm		

B. 3. Alors, avez–vous trouvé le rôle de cette phrase ?

« **M**on **V**élo **T**ourne **Ma**l ; **J**e **S**uis **U**n **N**ouveau **P**iéton ! »

Les premières lettres de chaque mot sont les initiales des planètes du système solaire dans l'ordre de distance croissante au Soleil : **M**ercure, **V**énus, **T**erre, **Ma**rs, **J**upiter, **S**aturne, **U**ranus, **N**eptune, **P**luton.

Conclusion

Un enseignant peut prévoir différents développements en fonction des spécialités professionnelles de ses élèves. Par exemple des élèves de l'industrie agroalimentaire sont sensibilisés à la notion de densité ou de température.

Il peut également choisir de sensibiliser les élèves à l'évolution des définitions ; leur faire comprendre que ce sont des conventions amenées à évoluer en fonctions des progrès scientifiques et technologiques.

Il peut aussi développer l'aspect normatif des définitions de planète, planète classique, planète naine, objets.

Les élèves pourront être amenés à trouver une nouvelle phrase n'incluant pas Pluton dans les planètes.

1.3. Séquence 2 : les dimensions des planètes du système solaire

1.3.1. Document élève

A. Observer le document intitulé « les planètes et le système solaire »

Compléter :
Combien y a-t-il de planètes dans le système solaire ? ....
L'étoile s'appelle ....
Quelle est la forme géométrique de tous ces astres ? Ce sont des ....

Vous avez sans doute pu observer certains de ces astres dans le ciel. Ils sont plus ou moins loin de nous et nous paraissent donc plus ou moins gros mais connaissez vous leurs tailles réelles ?

Reprendre le document joint.
Pour rendre compte de la taille du Soleil et des planètes on donne la mesure de leur ....
Quelle est l'unité utilisée pour cette mesure ? ....

B. Diamètre

a. Compléter le tableau suivant en indiquant le diamètre de chaque astre avec son unité.

Jupiter		Saturne	
Mars		Terre	
Mercure		Uranus	
Neptune		Vénus	12 104 km
Pluton		Soleil	

b. Arrondir le diamètre au millier de km.

Jupiter		Saturne	
Mars		Terre	
Mercure		Uranus	
Neptune		Vénus	12 000 km
Pluton		Soleil	

c. Exprimer ces diamètres en mètres.

Jupiter		Saturne	
Mars		Terre	
Mercure		Uranus	
Neptune		Vénus	12 000 000 m
Pluton		Soleil	

d. Il faut beaucoup de zéros pour écrire les diamètres en mètres, on risque de se tromper ! Pour simplifier l'écriture on utilise les puissances de dix.

Exemple : $7\,000\,000 = 7 \times 10^6$ (7 millions = 7 fois dix exposant 6).

Compléter le tableau en mettant les résultats sous la forme a × 10^6 où "a" est un nombre entier.

Jupiter		Saturne	
Mars		Terre	
Mercure		Uranus	
Neptune		Vénus	12×10^6 m
Pluton		Soleil	

Remarque : le préfixe qui correspond au million est méga (M). On peut donc écrire : 7 000 000 m ou 7×10^6 m ou 7 Mm (Méga mètre).

e. Ordre de grandeur

Compléter les phrases suivantes :

Uranus et Neptune ont un diamètre environ . . . . fois plus grand que celui de Mercure.

Jupiter a un diamètre environ . . . . fois plus . . . . que celui de Mars.

Saturne a un diamètre environ . . . . fois plus . . . . que celui de Vénus.

Le diamètre du Soleil est environ . . . . fois plus . . . . que celui de la Terre.

f. Échelle

Dans la séquence précédente, nous avons représenté les distances dans le système solaire sur le document 21 × 59,4.

Quelle était l'échelle utilisée ? . . . . soit 1 cm pour 10^{13} cm.

Dans cet exercice, nous vous proposons de représenter le Soleil avec la même échelle.

Vérifier que le diamètre du Soleil est $1{,}4 \times 10^{11}$cm.

Nous représenterons le Soleil par son diamètre.

$$\frac{\text{distance représentée (cm)}}{\text{distance réelle (cm)}} = \frac{1}{10^{13}} = \frac{?}{1{,}4 \times 10^{11}}$$

$$\text{Diamètre représenté (cm)} = \frac{1{,}4 \times 10^{11} \times 1}{10^{13}} = \frac{1{,}4 \times 1}{10^{13-11}} = \frac{1{,}4}{10^2} = \dots\dots\dots\dots$$

Sur le document 21 × 59,4 représentant les distances dans le système solaire, à la même échelle, le Soleil serait quasiment invisible. Que penser alors des planètes ?

g. Volume

Connaissant la formule qui permet de calculer le volume d'une sphère : $v = \frac{4}{3}\pi R^3$, calculer le volume du Soleil en m^3.

Volume du Soleil = ...

Quel est le volume de la Terre ?

Volume de la Terre = ...

Approximativement, combien d'objets de même volume que la Terre pourrait-on mettre dans le Soleil ? Cocher la bonne réponse :

10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000

1.3.2. Document professeur

A. Observer le document intitulé « les planètes et le système solaire »

Compléter : combien y a-t-il de planètes dans le système solaire ? *8.*
L'étoile s'appelle *Soleil.*
Quelle est la forme géométrique de tous ces astres ? Ce sont des *sphères.*

Vous avez sans doute pu observer certains de ces astres dans le ciel. Ils sont plus ou moins loin de nous et nous paraissent donc plus ou moins gros mais connaissez vous leurs tailles réelles ?
Reprendre le document joint.
Pour rendre compte de la taille du Soleil et des planètes on donne la mesure de leur diamètre.
Quelle est l'unité utilisée pour cette mesure ? Le *kilomètre.*

B. Diamètre

a. Compléter le tableau suivant en indiquant le diamètre de chaque astre avec son unité.

Jupiter	**142 880** km	Saturne	**120 660** km
Mars	**6 794** km	Terre	**12 756** km
Mercure	**4 878** km	Uranus	**50 800** km
Neptune	**49 560** km	Vénus	12 104 km
Pluton	**2 320** km	Soleil	**1 400 000** km

b. Arrondir le diamètre au millier de km.

Jupiter	**143 000** km	Saturne	**121 000** km
Mars	**7 000** km	Terre	**13 000** km
Mercure	**5 000** km	Uranus	**51 000** km
Neptune	**50 000** km	Vénus	12 000 km
Pluton	**2 000** km	Soleil	**1 400 000** km

c. Exprimer ces diamètres en mètres.

Jupiter	**143 000 000** m	Saturne	**121 000 000** m
Mars	**7 000 000** m	Terre	**13 000 000** m
Mercure	**5 000 000** m	Uranus	**51 000 000** m
Neptune	**50 000 000** m	Vénus	12 000 000 m
Pluton	**2 000 000** m	Soleil	**1 400 000 000** m

d. Il faut beaucoup de zéros pour écrire les diamètres en mètre, on risque de se tromper !
Pour simplifier l'écriture on utilise les puissances de dix.

Exemple : 7 000 000 = 7×10^6 (7 millions = 7 fois dix exposant 6).
Compléter le tableau en mettant les résultats sous la forme : $a \times 10^6$.

Jupiter	143×10^6 m	Saturne	121×10^6 m
Mars	7×10^6 m	Terre	13×10^6 m
Mercure	5×10^6 m	Uranus	51×10^6 m
Neptune	50×10^6 m	Vénus	12×10^6 m
Pluton	2×10^6 m	Soleil	$1\,400 \times 10^6$ m

Remarque : le préfixe qui correspond au million est méga (M). On peut donc écrire :
7 000 000 m ou 7×10^6m ou 7 Mm (Méga mètre).

Cette partie pourra être l'occasion pour l'enseignant de solliciter les élèves sur l'utilisation connue des préfixes Méga et Giga. Ces préfixes pourront à nouveau être utilisés dans le paragraphe « g » concernant les volumes.

e. Ordre de grandeur

Compléter les phrases suivantes :
Uranus et Neptune ont un diamètre environ *10* fois plus grand que celui de Mercure.
Jupiter a un diamètre environ *20* fois plus *grand* que celui de Mars.
Saturne a un diamètre environ *10* fois plus *grand* que celui de Vénus.
Le diamètre du Soleil est environ *100* fois plus *grand* que celui de la Terre.

f. Échelle

Dans la séquence précédente, nous avons représenté les distances dans le système solaire sur un document $21 \times 59{,}4$.
Quelle était l'échelle utilisée ? *1 dix mille milliardième* soit 1 cm pour 10^{13} cm.
Dans cet exercice, nous vous proposons de représenter le Soleil avec la même échelle.
Vérifier que le diamètre du Soleil est $1{,}4 \times 10^{11}$cm.
Nous représenterons le Soleil par son diamètre.

$$\text{Diamètre représenté (cm)} = \frac{1{,}4 \times 10^{11} \times 1}{10^{13}} = \frac{1{,}4 \times 1}{10^{13-11}} = \frac{1{,}4}{10^2} = \mathit{0{,}014\ cm.}$$

Sur le document $21 \times 59{,}4$ représentant le système solaire, à la même échelle, le Soleil serait quasiment invisible. Que penser alors des planètes ?
Les élèves concluent facilement que l'on ne peut pas matérialiser les planètes sur cet axe.

g. Volume

Connaissant la formule qui permet de calculer le volume d'une sphère : $v = \frac{4}{3}\pi R^3$, calculer le volume du Soleil en m^3.
Volume du Soleil : $4/3 \times \pi \times (7 \times 10^8)^3 = 1{,}4 \times 10^{27}$.
Le volume du Soleil est environ $1{,}4 \times 10^{27}$ m^3.

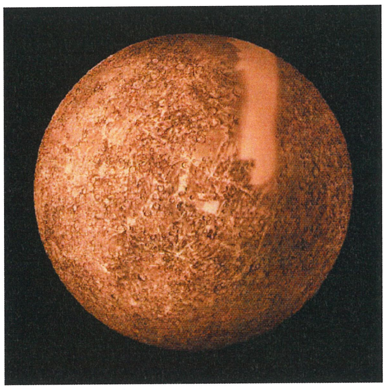
Quel est le volume de la Terre ?
Volume de la Terre : $4/3 \times \pi \times (6{,}5 \times 10^6)^3 = 1{,}15 \times 10^{21}$.
Le volume de la Terre est environ $1{,}15 \times 10^{21}$ m^3.

Combien d'objets de même volume que la Terre pourrait-on mettre dans le Soleil ? Puisque *27 – 21 = 6,* on pourrait mettre environ un million d'objets de même volume que la Terre dans le Soleil.

On aurait pu deviner ce résultat en sachant que le diamètre du Soleil est environ 100 fois plus grand que celui de la Terre. (Vu à la question B.e)

Annexe : les planètes du système solaire

Mercure



Sa distance au Soleil : 57.9 millions de km
sa température au sol : –180°C à 430°C
son diamètre équatorial : 4 878 km

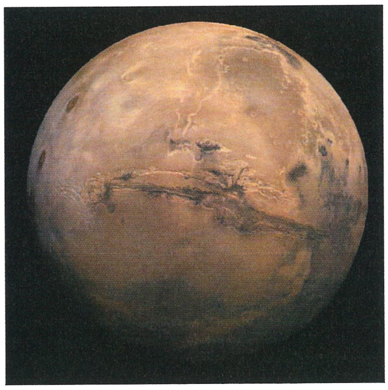
Vénus

Sa distance au Soleil : 108.2 millions de km
sa température au sol : –33°C à 460°C
son diamètre équatorial : 12 104 km

Terre

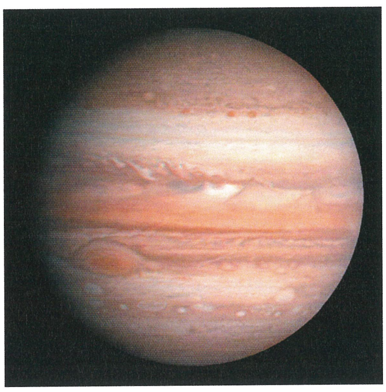
Sa distance au Soleil : 149.6 millions de km
sa température au sol : en moyenne 12°C
son diamètre équatorial : 12 756 km

Mars



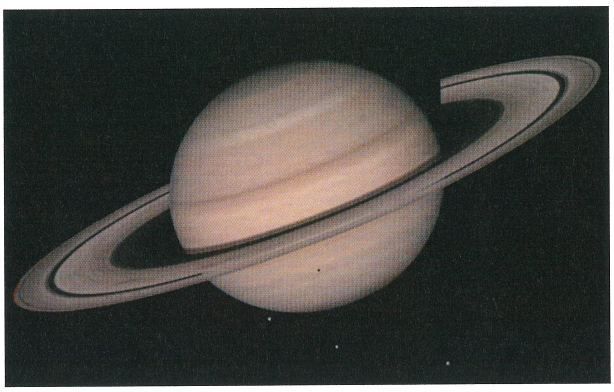
Sa distance au Soleil : 227.9 millions de km
sa température au sol : –140°C à 27°C
son diamètre équatorial : 6 794 km

Jupiter



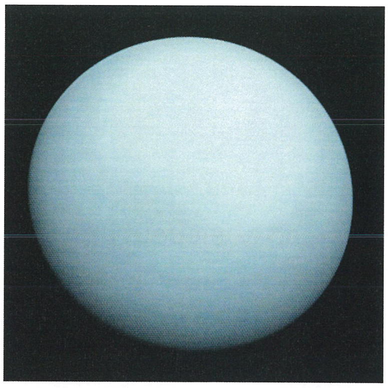
Sa distance au Soleil : 778.3 millions de km
sa température : –145°C à 30 000°C
son diamètre équatorial : 142 880 km

Saturne



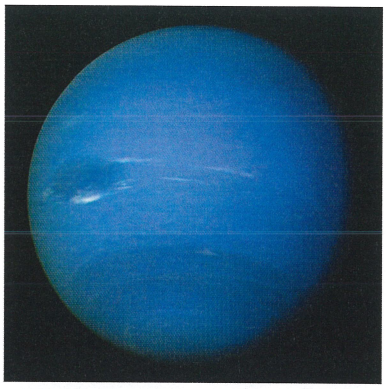
Sa distance au Soleil : 1427 millions de km
sa température : en moyenne –160°C
son diamètre équatorial : 120 660 km

Uranus



Sa distance au Soleil : 2 868 millions de km
sa température : en moyenne –210°C
son diamètre équatorial : 50 800 km

Neptune



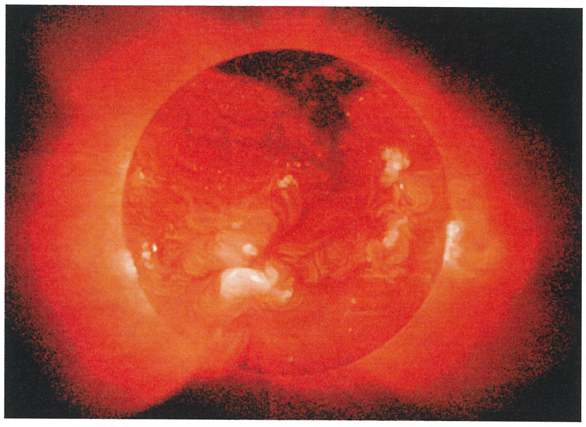
Sa distance au Soleil : 4 505 millions de km
sa température : en moyenne –220°C
son diamètre équatorial : 49 560 km

Pluton* et son satellite Charon

Sa distance au Soleil : 5 913 millions de km
sa température au sol : en moyenne –230°C
son diamètre équatorial : 2 320 km

Charon : satellite de Pluton découvert en 1978
sa période de révolution est d'environ 6 jours.

Soleil



Son diamètre : 1 400 000 km
sa température en surface : environ 5 600°C

* Depuis sa découverte en 1930, Pluton était considérée comme la neuvième planète du système solaire. À la fin du XXe siècle et au début du XXIe siècle, de plus en plus d'objets similaires furent découvert dans le système solaire externe, en particulier Éris, légèrement plus grand et plus massif que Pluton. Cette évolution amena l'union astronomique internationale (UAI) à redéfinir la notion de planète en août 2006. Cérès, Pluton et Éris étant depuis cette date classées comme des planètes naines.
Pluton est la deuxième plus grande planète naine connue du système solaire et le 10e plus grand astre connu en orbite autour du Soleil.

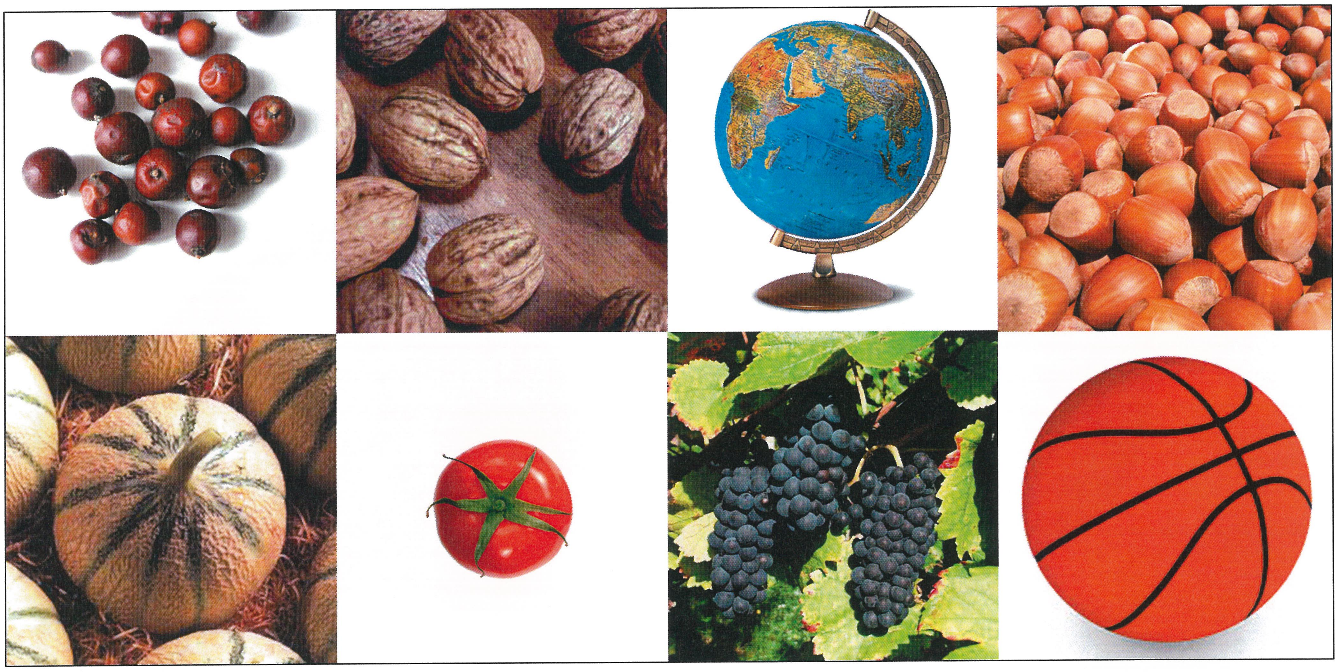
1.4. Séquence 3 : l'impossible image

1.4.1. Document élève

A. Dimensions relatives des planètes

En vous aidant de l'annexe jointe, pages 18 et 19, retrouver quel objet peut représenter chacune des planètes du système solaire et compléter le tableau ci-dessous.

baie de genièvre — noix — globe terrestre (28,6 cm) — noisette



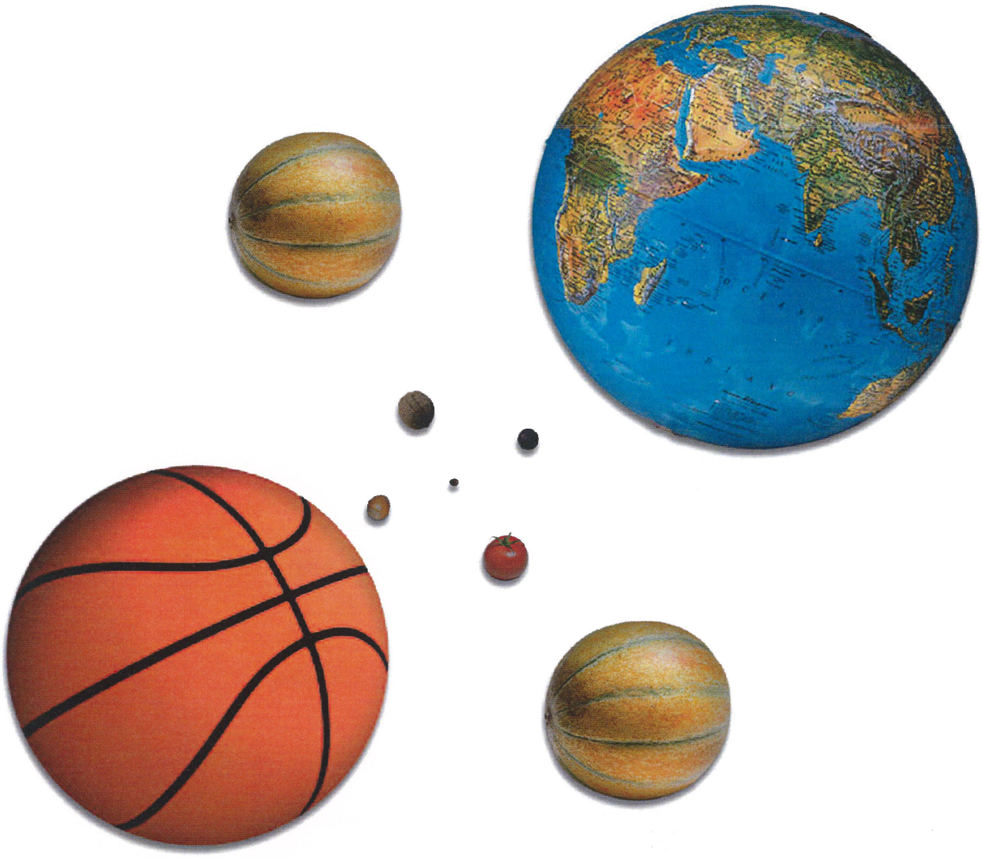
melon — tomate cerise — grain de raisin — ballon de basket

Indices :
- il faudra 2 objets « melon »,
- la planète naine Pluton est également représentée,
- l'objet « globe terrestre » ne représente pas nécessairement la Terre.

Planètes	Diamètre réel	Objet
Jupiter	km	
Mars	km	
Mercure	km	
Neptune	km	
Pluton	km	
Saturne	km	
Terre	km	
Uranus	km	
Vénus	km	

B. Échelle

Connaissant le diamètre d'un objet représentant les planètes, trouver l'échelle utilisée.



Le diamètre de l'objet « globe terrestre » est 28,6 cm. Il représente la planète Jupiter. Compléter le tableau de proportionnalité. Attention à la cohérence des unités.

diamètre de l'objet (en cm)	28,6	1
diamètre réel (en cm)		

L'échelle utilisée pour cette représentation est : $\dfrac{1}{\dots\dots\dots\dots}$

A la même échelle, calculer le diamètre du Soleil. Noter que pour tenir compte de la taille gigantesque du Soleil, l'unité choisie est le mètre.

diamètre de l'objet (en m)	1	
diamètre réel (en m)	500 000 000	1 400 000 000

Si Jupiter est représenté par un globe terrestre de 28,6 cm de diamètre, le Soleil est représenté par une boule de .... m de diamètre.

C. Les distances au Soleil

1. À l'échelle un cinq cent millionième

En imaginant que le Soleil est représenté par une énorme boule de 2,80 mètres de diamètre, c'est-à-dire tenant à peine en hauteur dans une salle de classe, calculer à quelle distance il faudrait placer le globe terrestre représentant Jupiter en respectant l'échelle choisie. Utiliser l'annexe.

distance de l'objet au Soleil (en m)	1	
distance réelle de Jupiter au Soleil (en m)	500 000 000	

À l'échelle 1 cinq cent millionième, il faudrait placer le globe terrestre représentant Jupiter à .... mètres soit .... km de la boule plus haute que la salle de classe représentant le Soleil.

Toujours dans les mêmes conditions, à quelle distance faudrait-il placer la baie de genièvre représentant la planète naine Pluton ?

Réponse : .... km

2. À l'échelle d'un livre

En disposant d'une feuille 21 × 29,7, si la représentation du Soleil fait 21 cm de diamètre, quel est le diamètre de la représentation de la planète Neptune ?

Réponse : ....

À quelle distance la représentation du Soleil se trouve-t-elle ?

Réponse : ....

Que penser alors d'une représentation telle que celle ci-dessous ?

Les dimensions des planètes et les distances au Soleil sont-elles à la même échelle ? ....

D. Pour réaliser des maquettes du système solaire

Compléter le tableau ci-après.

Objets	En réalité		Maquette Dans la ville 1/500 000 000		Maquette Dans le quartier 1/2 500 000 000		Maquette Dans le lycée 1/6 000 000 000	
	Diamètre équatorial (km)	Distance au Soleil (millions de km)	Diamètre équatorial (cm)	Distance au Soleil (m)	Diamètre équatorial (cm)	Distance au Soleil (m)	Diamètre équatorial (cm)	Distance au Soleil (m)
Soleil	1 400 000		280 hauteur d'une salle		ballon sauteur		ballon	
Mercure	4 878	57.91	1		tête ronde d'épingle	20	tête d'épingle	
Vénus	12 104	108.2	2.4		petite perle		grain de poivre	
Terre	12 756	149.6	2.6		petite perle		grain de poivre	
Mars	6 794	227.9	1.4		plomb de pêche		tête d'épingle	
Jupiter	142 880	778.3	28.6		boule de polystyrène		noix	
Saturne	120 660	1 427	24		boule de polystyrène		noisette	
Uranus	50 800	2 868	10		grosse perle		pois sec	
Neptune	49 560	4 505	10		grosse perle		pois sec	
Pluton	2 280	5 913	0.5	12 000	tête plate d'épingle	2 400	0,03 point	985
La plus proche étoile après le Soleil **Proxima du Centaure**		4.3 années lumière 43 000 milliards de km		90 000 km		17 000 km		7 500 km

1.4.2. Document professeur

A. Dimensions relatives des planètes

Planètes	Diamètre réel	Objet
Jupiter	**142 880 km**	**globe terrestre**
Mars	**6 794 km**	**noisette**
Mercure	**4 878 km**	**grain de raisin**
Neptune	**49 560 km**	**melon**
Pluton	**2 280 km**	**baie de genièvre**
Saturne	**120 660 km**	**ballon de basket**
Terre	**12 756 km**	**noix**
Uranus	**50 800 km**	**melon**
Vénus	**12 104 km**	**tomate cerise**

B. Échelle

Connaissant le diamètre d'un objet représentant les planètes, trouver l'échelle utilisée.

Le diamètre de l'objet « globe terrestre » est 28,6 cm. Il représente la planète Jupiter. Compléter le tableau de proportionnalité. Attention à la cohérence des unités.

diamètre de l'objet (en cm)	28,6	1
diamètre réel (en cm)	**14 288 000 000**	**500 000 000**

L'échelle utilisée pour cette représentation est : $\frac{1}{500\,000\,000}$

À la même échelle, calculer le diamètre du Soleil. Noter que pour tenir compte de la taille gigantesque du Soleil, l'unité choisie est le mètre.

diamètre de l'objet (en m)	1	**2,8**
diamètre réel (en m)	500 000 000	1 400 000 000

Si Jupiter est représenté par un globe terrestre de 28,6 cm de diamètre, le Soleil est représenté par une boule de **2,8** m de diamètre.

C. Les distances au Soleil

1. À l'échelle un cinq cent millionième

En imaginant que le Soleil est représenté par une énorme boule de 2 mètres 80 de diamètre, c'est-à-dire tenant à peine en hauteur dans une salle de classe, calculer à quelle distance il faudrait placer le globe terrestre représentant Jupiter en respectant l'échelle choisie. Utiliser l'annexe.

distance de l'objet au Soleil (en m)	1	**1 500**
distance réelle de Jupiter au Soleil (en m)	500 000 000	**778 300 000 000**

À l'échelle un cinq cent millionième, il faudrait placer le globe terrestre représentant Jupiter à **1 500** mètres soit **1,5** km de la boule plus haute que la salle de classe représentant le Soleil.

Toujours dans les mêmes conditions, à quelle distance faudrait-il placer la baie de genièvre représentant la planète naine Pluton ?

Réponse : **12** km

2. À l'échelle d'un livre

En disposant d'une feuille 21 × 29,7, si la représentation du Soleil fait 21 cm de diamètre, quel est le diamètre de la représentation de la planète Neptune ?

Réponse : **0,74** cm

A quelle distance du Soleil se trouve-t-elle ?

Réponse : **67 575** cm soit **676** m environ

Que penser alors d'une représentation telle que celle de la page 22 ?

Les dimensions des planètes et les distances au Soleil sont-elles à la même échelle ? **Non, il est impossible de représenter de façon visible l'ensemble des planètes.**

D. Pour réaliser des maquettes du système solaire

Il est très utile et apprécié par les élèves d'avoir des objets réels et des plans à manipuler.

Ces exercices sur le système solaire sont d'une grande richesse. Les élèves comprennent rapidement l'utilité des puissances de 10 pour les calculs et les conversions. Le travail avec le tableau les amène à utiliser la proportionnalité lorsqu'ils ont des doutes sur la cohérence de leurs résultats. La précision des calculs pourra également être abordée et le tableau utilisé avec un tableur.

Les discussions sur l'image et les idées fausses qu'elle peut véhiculer sont également l'occasion d'une réflexion plus large sur l'univers ainsi que sur leur vie de tous les jours.

Objets	En réalité		Maquette **Dans la ville** 1/500 000 000		Maquette **Dans le quartier** 1/2 500 000 000		Maquette **Dans le lycée** 1/6 000 000 000	
	Diamètre équatorial (km)	**Distance au Soleil (millions de km)**	**Diamètre équatorial (cm)**	**Distance au Soleil (m)**	**Diamètre équatorial (cm)**	**Distance au Soleil (m)**	**Diamètre équatorial (cm)**	**Distance au Soleil (m)**
Soleil	1 400 000		280 hauteur d'une salle		**55** ballon sauteur		**23** ballon	
Mercure	4 878	57.91	1	**116**	**0,2** tête ronde d'épingle	20	**0,08** tête d'épingle	**8**
Vénus	12 104	108.2	2.4	**220**	**0,5** petite perle	**45**	**0,2** grain de poivre	**18**
Terre	12 756	149.6	2.6	**300**	**0,5** petite perle	**60**	**0,2** grain de poivre	**25**
Mars	6 794	227.9	1.4	**460**	**0,3** plomb de pêche	**135**	**0,1** tête d'épingle	**38**
Jupiter	142 880	778.3	28.6	**1 500**	**6** boule de polystyrène	**300**	**2,3** noix	**130**
Saturne	120 660	1 427	24	**2 900**	**5** boule de polystyrène	**550**	**1,8** noisette	**238**
Uranus	50 800	2 868	10	**5 800**	**2** grosse perle	**1 100**	**0,8** pois sec	**479**
Neptune	49 560	4 505	10	**9 000**	**2** grosse perle	**1 700**	**0,8** pois sec	**750**
Pluton	2 280	5 913	0.5	12 000	**0,1** tête plate d'épingle	2 400	0,03 point	985
La plus proche étoile après le Soleil **Proxima du Centaure**		4.3 années lumière 43 000 milliards de km		90 000 km		17 000 km		7 500 km

Chapitre 2
Les calendriers julien et grégorien

2.1. Objectifs de la séquence

L'objectif mathématique de cette séance est de travailler les conversions système décimal-système sexagésimal. Un objectif culturel est de connaître, de comprendre le rôle des années bissextiles de notre calendrier solaire et voir comment elles ont été introduites. A l'occasion, il peut être utile de rappeler que la Terre tourne autour du Soleil. Les définitions des locutions assez classiques telles que « calendriers julien et grégorien », « année séculaire », « année bissextile » peuvent constituer un objectif.

Cette activité d'une heure est accessible à tous niveaux de la 3^{e} au baccalauréat professionnel. Toutefois avec des élèves de baccalauréat professionnel, on peut s'attendre à approfondir la partie culturelle.

Les notions mathématiques travaillées sont la moyenne, le passage du système décimal au système sexagésimal (opérations, conversions), les bornes et les intervalles (conséquences de l'absence de l'année zéro dans notre calendrier).

2.2. Calendriers julien et grégorien

2.2.1. Document élève

Thérèse d'Ávila, une religieuse espagnole, est morte dans la nuit du 4 au 15 octobre 1582.

Drôle d'affirmation n'est-ce pas !

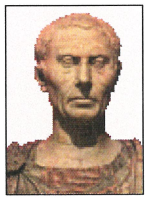
C'est pourtant vrai et vous comprendrez pourquoi après avoir traité cet exercice.

Tout est une question de calendrier.

Nous savons aujourd'hui avec précision que la Terre tourne autour du Soleil en 365 jours 5 heures 48 minutes et 46 secondes.

Cette rotation associée à l'inclinaison de la Terre détermine les saisons.

A. Le calendrier julien



Le calendrier julien, institué par Jules César aidé de l'astronome Sosigène, en 45 avant notre ère, prévoit des cycles de 4 ans :

3 années de 365 jours et 1 année de 366 jours dite bissextile.

Calendrier julien

Mois	Nombre de jours	Mois	Nombre de jours
janvier	31	juillet	31
février	28 ou 29	août	31
mars	31	septembre	30
avril	30	octobre	31
mai	31	novembre	30
juin	30	décembre	31

1. Calculer la durée moyenne d'une année dans le calendrier julien.

Exprimer ce résultat en jours sous la forme décimale : . . . . ;

Exprimer ce résultat en jours, heures : . . . .

2. L'année moyenne du calendrier julien est-elle exactement l'année solaire ? . . . .

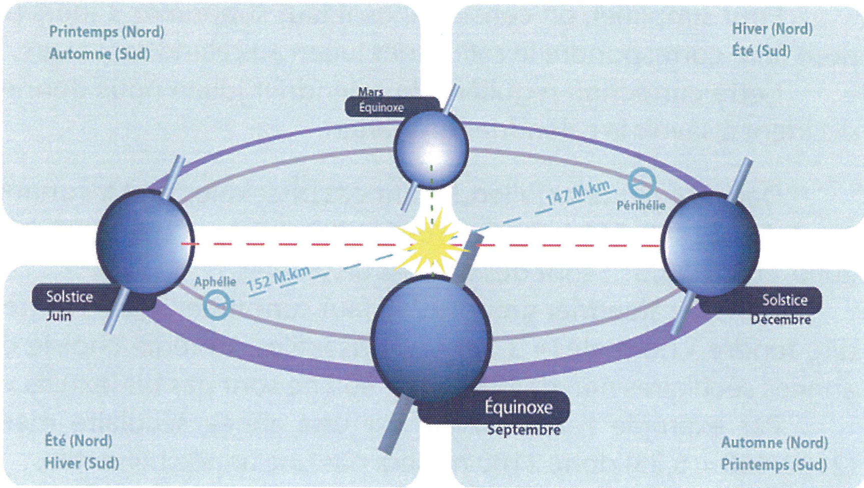
Calculer la différence en minutes, secondes : . . . .

Au fil des siècles, les minutes en se cumulant forment des jours puis les jours en se cumulant forment des mois etc.

Le décalage entre le calendrier julien et les saisons s'accentue et voilà que l'équinoxe d'automne est en avril à Besançon.

Mais cette situation n'arrivera pas grâce au pape Grégoire XIII.

Un calendrier est dit « solaire » si une certaine date, définie par un mois et un jour dans le mois, coïncide chaque année avec un repère défini à partir de la rotation de la Terre autour du Soleil. C'était le cas du calendrier républicain, pour lequel le premier jour de l'année, le premier vendémiaire, était situé chaque année au jour de l'équinoxe d'automne. Cependant, celui-ci présente l'inconvénient d'avoir des années sextiles qui ne sont pas régulières. Le calendrier grégorien que nous allons étudier est « presque solaire » car l'équinoxe d'automne y est soit le 23 soit plus rarement le 22 septembre.



B. Le calendrier grégorien

En 1582, conscient du décalage qui s'accentue, le pape Grégoire XIII décide de réformer le calendrier julien.

Dans la suite de ce paragraphe, décalage signifie écart entre un calendrier solaire et le calendrier julien.

Le calendrier julien a été utilisé entre octobre 45 avant notre ère et octobre 1582 de notre ère.

1. Calculer le nombre d'années d'utilisation du calendrier julien. Pour cela, tenir compte de la notation particulière des années :

- avant notre ère : l'an 44 suit l'an 45,
- l'an 1 avant notre ère est directement suivi de l'an 1 après notre ère. Il n'y a pas d'année zéro.

Le calendrier julien a été utilisé pendant : ....

2. Calculer la valeur du décalage accumulé entre octobre 45 avant notre ère et octobre 1582 de notre ère. Arrondir en nombre de jours la valeur trouvée : ....

En fait le pape Grégoire XIII a décidé d'arrondir ce décalage à 10 jours comptés à partir de l'an 345 de notre ère qui est la date du Concile de Nicée, date importante pour l'Eglise et le pape Grégoire XIII.

Donc le pape décide que le lendemain du jeudi 4 octobre 1582 est le vendredi 15 octobre 1582.

Ainsi Thérèse d'Ávila est morte dans la nuit du 4 au 15 octobre 1582.

3. Calculer la valeur du décalage qui se serait accumulé entre octobre 1582 et octobre 2004, c'est-à-dire sur une période de 422 ans (arrondir en nombre de jours la valeur trouvée) si nous avions continué à utiliser le calendrier julien : ....

Pour simplifier, on considère qu'il faut supprimer 3 jours pendant chaque période de 400 ans pour faire correspondre le calendrier julien au calendrier solaire.

Cette correction régulière du calendrier julien nous donne le calendrier utilisé aujourd'hui en occident à savoir le calendrier grégorien.

Dans le calendrier julien, les années bissextiles sont les années dont les millésimes sont divisibles par 4. Ainsi 1600, 1604, 1608…1696, 1700, 1704…1796, 1800, 1804…1896, 1900, 1904, 1908…1996, 2000, 2004, 2008… sont des années bissextiles.

Dans le calendrier grégorien, il faut supprimer 3 jours entre 1600 et 2000 de notre ère ; c'est–à–dire rendre « normales » 3 années bissextiles. La règle choisie est la suivante : « les millésimes des années séculaires non divisibles par 400 ne sont pas bissextiles ».

Par exemple l'année 2100 est une année séculaire mais 2100 n'est pas divisible par 400 (2100/400 = 5,25) donc 2100 ne sera pas une année bissextile.

Par exemple l'année 2400 est une année séculaire et 2400 est divisible par 400 (2400/400 = 6) donc 2400 sera une année bissextile.

4. Retrouver les 5 années séculaires entre 1582 et 2008 de notre ère :

.... et .... et .... et .... et ....

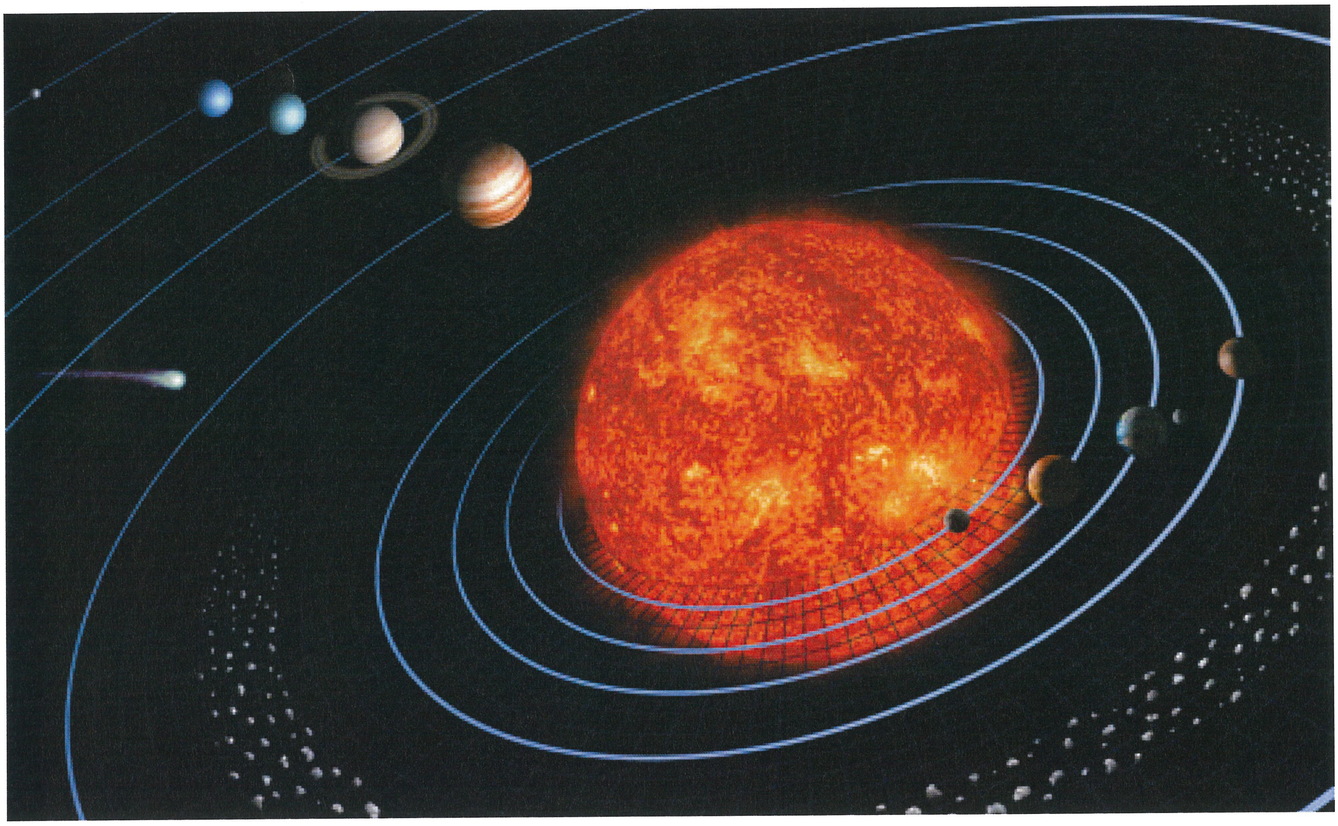
Déterminer les 3 années qui ne sont pas bissextiles :

.... et .... et ....

Le calendrier grégorien nous permet de nous rapprocher très près de la réalité.

La durée de l'année dans le calendrier grégorien est donc très proche de la durée de la rotation de la Terre autour du Soleil.

Il subsiste quand même une petite différence que l'on considère comme négligeable à l'échelle de l'histoire de l'humanité.



2.2.2. Document professeur

A. Le calendrier julien

Mois	Nombre de jours	Mois	Nombre de jours
janvier	31	juillet	31
février	28 ou 29	août	31
mars	31	septembre	30
avril	30	octobre	31
mai	31	novembre	30
juin	30	décembre	31

1. Calculer la durée moyenne d'une année dans le calendrier julien.
Exprimer ce résultat en jours sous la forme décimale : *365,25.*
Exprimer ce résultat en jours, heures : *365 jours et 6 heures.*

2. Calculer la différence en minutes, secondes : *11 minutes et 14 secondes.*

B. Le calendrier grégorien

1. Calculer le nombre d'années pendant lequel a fonctionné le calendrier julien entre octobre 45 avant notre ère et octobre 1582 de notre ère : *1 626 ans.*

2. Calculer la valeur du décalage accumulé tout au long de ces années (d'octobre 45 avant notre ère à octobre 1582 de notre ère) entre le calendrier julien et le calendrier solaire (arrondir en nombre de jours la valeur trouvée) : *environ 13 jours.*

3. Calculer la valeur du décalage accumulé entre le calendrier julien et les saisons, d'octobre 1582 à octobre 2004 de notre ère, c'est-à-dire sur une période de 422 ans (arrondir en nombre de jours la valeur trouvée) : *environ 3 jours.*

4. Entre 1582 et 2008 de notre ère, les 5 années séculaires sont *1600, 1700, 1800, 1900, 2000* et les 3 années qui ne sont pas bissextiles sont *1700, 1800, 1900.*

Conclusion sur l'activité

Nos élèves de spécialité tertiaire sont interpellés par les questions de calendrier au travers des calculs financiers (intérêts journaliers, calculs d'escomptes...). Cette activité peut être l'occasion de revenir sur les moyens mnémotechniques pour retenir la durée des mois ; de faire prendre conscience du choix de la date de début d'année (le premier mars chez les romains, le jour supplémentaire ajouté six jours avant les calendes de mars) ; de revenir à l'étymologie des mois (le neuvième mois est septembre qui est le septième à partir de mars) ; Jules César et l'empereur Auguste se sont réservés les mois les plus chauds et voulaient voir leur nom associé au même nombre de jours d'où juillet et août à 31 jours.

Chapitre 3

Le nombre d'Or

3.1. Objectifs des séquences

L'objectif mathématique de ces trois séquences d'enseignement est de découvrir le nombre d'or du point de vue algébrique et du point de vue géométrique. C'est l'occasion de résoudre des équations des premier et second degré, d'utiliser les arrondis, les comparaisons de nombres décimaux, les notions de suite, de travailler les constructions et démonstrations géométriques, d'utiliser le théorème de Pythagore.

L'objectif culturel est de montrer des situations dans des domaines très variés (art, nature, géométrie) dans lesquelles on peut voir le nombre d'or. Cette activité offre la possibilité de replacer Euclide, Phidias et le Parthénon, Léonard de Vinci, Luca Pacioli et Ptolémée dans leur époque.

Enfin ces séances sont l'occasion de réinvestir ou d'introduire du vocabulaire tel que « nombres irrationnels », « suite de Fibonacci », « partage en moyenne et extrême raison », « nautile », « pentagramme ou pentagone régulier étoilé », « suites numériques ».

Nous avons expérimenté ces activités dans des classes de certificat d'aptitude professionnelle, de brevet d'études professionnelles et de baccalauréat professionnel. L'orientation tertiaire ou industrielle importe peu car les notions travaillées sont communes aux deux filières.

Cette séquence a nécessité trois séances d'une heure chacune. La partie géométrique est accessible à tous nos élèves sans pré requis. En revanche, la partie algébrique devra tenir compte du niveau acquis par les élèves.

Matériel nécessaire : règle graduée, compas avec des grandes branches, équerre, calculatrice, une feuille de format A3.

3.2. Séquence 1 : le nombre d'or (1^re partie)

3.2.1. Document élève

A. Résolution d'une énigme algébrique

Enigme : « *Trouver un nombre positif qui, augmenté de* 1, *est égal à son carré* »
Soit x, ce nombre.
Parmi les 3 propositions suivantes, entourer l'équation correspondant à notre énigme.

$x^2 + 1 = x$ $\qquad\qquad$ $x^2 + x = 1$ $\qquad\qquad$ $x + 1 = x^2$

Montrer que cette équation est équivalente à $x^2 - x - 1 = 0$.

Vérifier que le nombre positif $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est solution l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

....

....

....

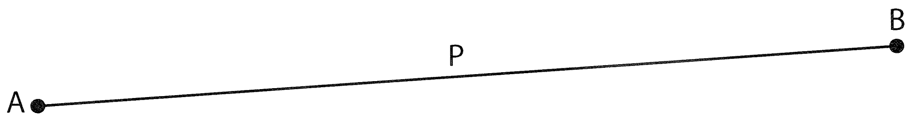
On a donc résolu l'énigme. Le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ augmenté de 1 est égal à son carré.

B. Section dorée

1. Introduction du problème

Voici un problème énoncé par le mathématicien grec Euclide au 3^e siècle avant notre ère dans son livre « Les éléments ». Nous l'écrivons en français et avec nos notations.

Le segment [AB] étant donné, comment placer le point P de sorte que le segment [AB] soit partagé de manière « équilibrée », en ce sens que les rapports « grand segment sur petit segment » et « petit + grand segment (c'est-à-dire le tout) sur grand segment » soient égaux ?



En termes mathématiques, on cherche à partager le segment [AB] de façon à ce que les rapports $\frac{AP}{PB}$ et $\frac{AB}{AP}$ soient égaux.

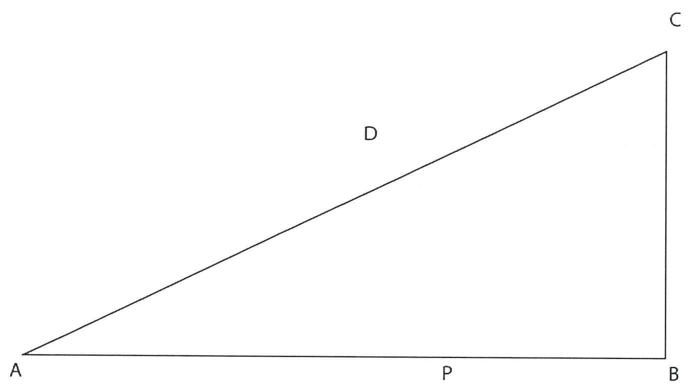
Euclide, appelle ce partage de segment : « le partage en moyenne et extrême raison » et détermine la valeur de ce rapport.

2. Partage d'un segment en moyenne et extrême raison

Soit un segment [AB] où A et B sont 2 points distincts.

On cherche à placer sur ce segment un point P de façon à ce que ce segment soit partagé en « moyenne et extrême raison », c'est-à-dire de façon à ce que les rapports $\frac{AP}{PB}$ et $\frac{AB}{AP}$ soient égaux.

Pour construire le point P, suivre la procédure suivante :
Tracer la perpendiculaire à [AB] passant par B.
Placer C tel que BC = AB/2.
Tracer [AC].
Construire sur [AC] le point D tel que CD = BC.
Construire sur [AB] le point P tel que AP = AD.



Léonard de Vinci, artiste et savant italien vivant au 15ᵉ siècle, appelle ce rapport « section dorée ». L'allemand Zeising (19ᵉ siècle) l'appelle : « section d'or ».

Euclide

Léonard de Vinci

3. Exemples

Quand on divise la longueur de la façade par sa largeur on retrouve le nombre d'or :

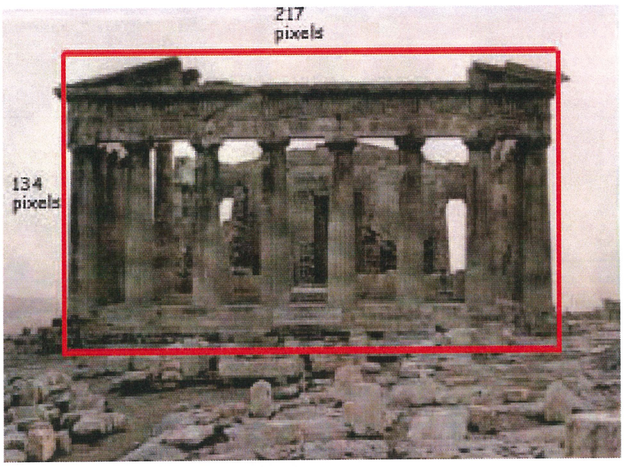
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62 \text{ (arrondi au centième).}$$

Sur la photo : $\frac{217 \text{ pixels}}{134 \text{ pixels}} \approx$ . . . . (arrondir le résultat au centième)

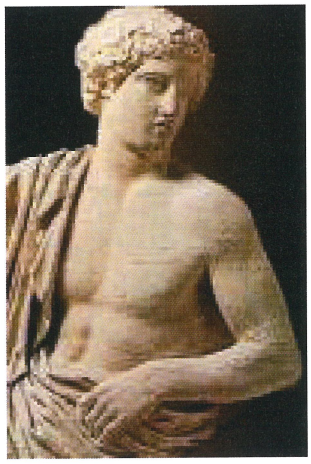
C'est en l'honneur du sculpteur grec Phidias qui décora ce monument que la lettre grecque φ (Phi) désigne le nombre d'or.

En effet, l'initiale grecque du nom Φειδίας (Phidias) est la lettre φ .

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Le Parthénon



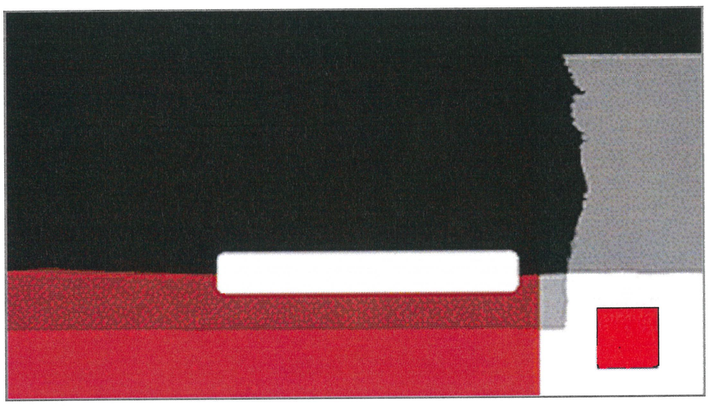
Phidias

Aujourd'hui encore, on retrouve cette « proportion divine » ou des valeurs approchées dans des « rectangles d'or » de la vie quotidienne :

Peut-on considérer qu'une carte bleue est un rectangle d'or ?

Les cartes de crédit, de téléphone, la carte vitale et de nombreuses cartes de fidélisation ont ce format.

Ce chéquier est-il un rectangle d'or ?



3.2.2. Document professeur

A. Résolution d'une énigme algébrique

Le nombre positif qui, augmenté de 1, est égal à son carré est solution de $x + 1 = x^2$ soit $x^2 - x - 1 = 0$.

Suivant le niveau des élèves, on peut proposer une variante de l'énoncé et aborder l'unicité de la solution positive.

Par exemples,

- Vérifier que le nombre positif $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

  Réponse attendue : $x^2 - x - 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2 - 2\sqrt{5} - 4}{4} = 0$

- Résoudre l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$. Montrer qu'une de ses solutions est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

  Réponse attendue :

  $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$ donc $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

B. Section dorée

1. Introdution du problème

Développer le volet historique peut être l'occasion d'un travail pluridisciplinaire. Faire prendre conscience aux élèves de l'évolution de la langue, des modes de conservation et de transmission du savoir peut faire l'objet d'un travail complémentaire. La difficulté est de trouver des informations fiables. On peut encourager les élèves à visiter le site de l'université de St Andrews http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/, celui de la commission inter IREM « histoire et épistémologie des mathématiques », http://www.univ-irem.fr/commissions/epistemologie/ressouces/ressources.htm

On peut par exemple insister sur le fait que nous n'avons aucune trace manuscrite de textes contemporains d'Euclide et encore moins écrits de sa main. Il n'est d'ailleurs pas sûr qu'il ait existé. Les représentations (portraits) sont l'œuvre de l'imagination des artistes.

« Les éléments » d'Euclide est le premier livre scientifique imprimé. La première impression date de 1492 et elle est écrite en latin. Les éditions anciennes sont nombreuses ; en effet avant 1800, c'est le livre le plus imprimé après la bible.

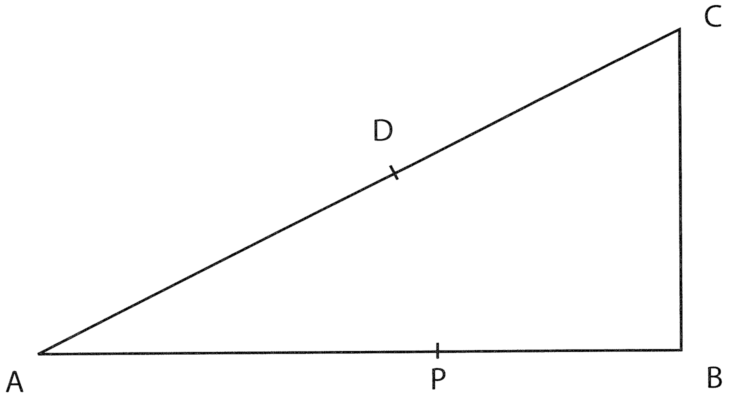
2. Partage d'un segment en moyenne et extrême raison

Soit un segment [AB].

On cherche à placer sur ce segment un point P de façon à ce que ce segment soit partagé en « moyenne et extrême raison », c'est-à-dire de façon à ce que les rapports $\frac{AP}{PB}$ et $\frac{AB}{AP}$ soient égaux.

La construction du point P est la suivante :

Deux démonstrations sont possibles en fonction des objectifs et du niveau des élèves.



a. La première démonstration repose sur le choix de la longueur du segment [AB] comme unité et utilise le théorème de Pythagore, la manipulation des fractions et des racines carrées, l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

On va démontrer que le point P obtenu est tel que $\frac{AB}{AP} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Prendre la longueur du segment [AB] comme unité. Ainsi AB = 1 donc $BC = CD = \frac{1}{2}$.

Théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B en veillant à garder l'écriture fractionnaire :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ $\quad AC^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ $\quad$ soit $AC = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$AP = AC - AD$ $\quad AP = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ $\quad \frac{AB}{AP} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$

Rendre rationnel le dénominateur en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{5}+1$ et en utilisant l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{AB}{AP} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$$

b. La deuxième démonstration, beaucoup plus lourde, permet de manipuler le théorème de Pythagore, les développements et simplifications.

On va démontrer que le nombre positif $\frac{AB}{AP}$ augmenté de 1 est égal à son carré.

Le point D est sur AC, le point P est tel que AD = AP, $BC = CD = \frac{AB}{2}$ par construction ; donc $AC = AP + \frac{AB}{2}$.

Ecrire le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B en remplaçant AC et BC par leur valeur en fonction de AP et AB.

$\left(AP + \frac{AB}{2}\right)^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ soit en développant et en simplifiant : $AP^2 + AP \times AB = AB^2$

En divisant les deux membres par AP^2 et en simplifiant on obtient : $1 + \frac{AB}{AP} = \left(\frac{AB}{AP}\right)^2$ donc $\frac{AB}{AP} = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$.

3. Exemples

La carte de crédit peut s'apparenter à un rectangle d'or.

Le chèquier ne peut pas s'apparenter à un rectangle d'or.

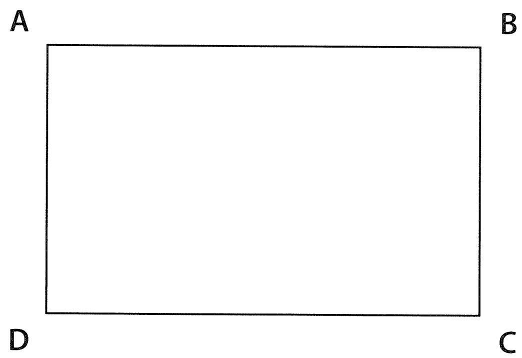
3.3. Séquence 2 : applications

3.3.1. Document élève

A. Construction géométrique : le nautile et son exploitation mathématique

Matériels utilisés pour la construction : règle, équerre, compas.

1. Tracer, sur une feuille de papier format A3, le rectangle ABCD de longueurs de côtés AB = 34 cm et BC = 21 cm.



Puis tracer successivement les carrés :
EBCF de côté 21 cm intérieur au rectangle ABCD. Tracer l'arc de cercle $\overset{\frown}{CE}$ de centre F.
AEGH de côté 13 cm. Tracer l'arc de cercle $\overset{\frown}{HE}$ de centre G.
HIJD de côté 8 cm. Tracer l'arc de cercle $\overset{\frown}{HJ}$ de centre I.
KLFJ de côté 5 cm. Tracer l'arc de cercle $\overset{\frown}{JL}$ de centre K.
MGLN de côté 3 cm. Tracer l'arc de cercle $\overset{\frown}{ML}$ de centre N.
IMOP de côté 2 cm. Tracer l'arc de cercle $\overset{\frown}{MP}$ de centre O.
PQRK de côté 1 cm. Tracer l'arc de cercle $\overset{\frown}{PR}$ de centre Q.
Vérifier que le carré (QONR) est de côté 1 cm.

2. Relever la longueur et la largeur, en centimètres, des différents rectangles obtenus sur la figure obtenue précédemment.

Compléter le tableau suivant :

Rectangles	**Longueur** (en cm)	**Largeur** (en cm)	Calculer : $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ (Arrondir les rapports à 10^{-2})
ABCD			
AEFD			
HGFD			
IGFJ			
IGLK			
IMNK			

3. Premiers termes de la suite de Fibonacci

On note les valeurs des différents côtés de chaque carré ci–dessous.

Continuer cette suite de nombres logiques :

1	1	2	3	5	8	13	21	34	......
......	......	......	......	......	......	......	......	......	......

C'est une suite de nombres dans laquelle tout nombre est égal à la .... des deux nombres ....

Cette suite de nombres logiques est appelée **suite de Fibonacci** du nom de son inventeur italien (13e siècle). Fibonacci, de son vrai nom Léonardo Pisano, était le fils d'un négociant italien qui avait de ce fait des relations commerciales actives avec les ports algériens. Il a séjourné à Bougie (aujourd'hui Béjaïa), port algérien qui était à l'époque un grand pôle scientifique. C'est là que Fibonacci, jeune, a été initié aux mathématiques et a ainsi introduit en Europe les chiffres dits « arabes ».

4. Calcul des différents rapports

Calculer en les numérotant R_1, R_2, ... les rapports de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci. Indiquer, s'il y a lieu, les 9 chiffres après la virgule donnés par la calculatrice.

$R_1 = \frac{1}{1} = 1$ $\qquad$ $R_2 = \frac{2}{1} = 2$

Comparer les valeurs de R_1, R_2 et $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. $\qquad$ $\ldots < \varphi < \ldots$

$R_3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$ $\qquad$ $R_4 = \frac{5}{3} = 1{,}666666667$

Comparer les valeurs de R_1, R_2, R_3, R_4 et $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. $\qquad$ $\ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots$

$R_5 = \frac{8}{5} =$ $\qquad$ $R_6 = \frac{}{} =$

Comparer les valeurs de R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 et $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. $\qquad$ $\ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots$

$R_7 = \frac{}{} =$ $\qquad$ $R_8 = \frac{}{} =$

Comparer les valeurs de R_7, R_8 et $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ arrondies à 10^{-1}.

$R_9 = \frac{}{} =$ $\qquad$ $R_{10} = \frac{89}{55} =$

Comparer les valeurs de R_9, R_{10} et φ arrondies à 10^{-2}.

$R_{11} = \frac{}{} =$ $\qquad$ $R_{12} = \frac{}{} =$

Compléter : Les valeurs R_{11}, R_{12} et φ coïncident lorsqu'elles sont arrondies à ....

$R_{13} = \frac{377}{233} =$ $\qquad$ $R_{14} = \frac{}{} =$

Compléter :

$R_{15} = \frac{}{} =$ $\qquad$ $R_{16} = \frac{}{} =$

Compléter :

$R_{17} = \dfrac{2584}{1597} =$ $\qquad\qquad$ $R_{18} = \dfrac{4181}{2584} =$

Compléter :

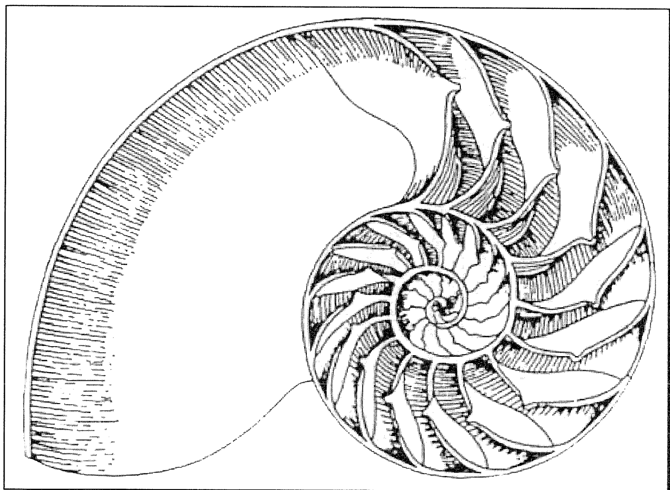
Ranger la suite de nombres R_1, R_2,... dans l'ordre croissant :

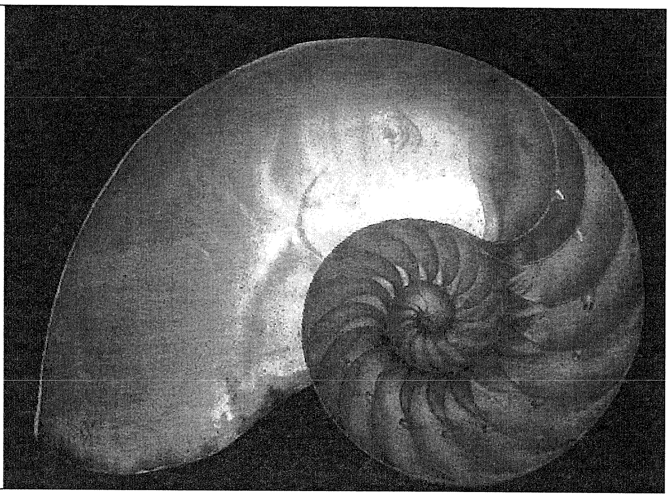
$R_1 < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots$.

A l'aide d'une flèche, indiquer la place de φ dans cette suite.
Où se situeraient R_{19} et R_{20} ? Vérifier par le calcul.

On dit que les rapports de deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci tendent vers la valeur $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ du nombre d'or φ.

La construction géométrique que nous avons effectuée ci-dessus se retrouve dans la nature. Par exemple le nautile est un coquillage dont l'intérieur présente une spirale formée d'une douzaine de petites loges séparées les unes des autres par des cloisons de nacre.





B. Construction géométrique du pentagramme

1. Définition

Le pentagramme ou pentagone étoilé régulier est une étoile à cinq branches.

2. Construction de Ptolémée (mathématicien grec du 1er et 2e après J.C.)

En utilisant la règle, l'équerre et le compas, successivement :

a. Tracer un cercle de centre O et de rayon 6 cm,

b. Tracer deux diamètres perpendiculaires de ce cercle. On note A le point d'intersection d'un de ces diamètres avec le cercle.

c. Soit F le milieu d'un rayon (F n'appartenant pas à la droite (OA)). Tracer [AF].

d. A l'aide d'un compas, placer le point G sur (OF) tel que FA = FG.

e. Toujours à l'aide du compas, reporter AG à partir du point A sur le cercle. Noter ce point B.

f. AB est un côté du pentagone régulier convexe inscrit. On reporte ensuite trois fois la longueur AB sur le cercle pour placer respectivement les points C ; D et E. Tracer en rouge le pentagone régulier (ABCDE) de côtés réguliers AB ; BC ; CD ; DE et EA.

g. Tracer en vert les segments [BD] ; [BE] ; [AD] ; [AC] et [CE].

On obtient donc le pentagramme ou pentagone étoilé régulier.

Faire, ci-dessous, cette construction géométrique :

3. Sections dorées

Soit X le point d'intersection de [BD] et de [AC]. Placer ce point sur la figure ci-dessus.
Relever les différentes distances ci-dessous :

AC = ... cm XC = ... cm AX = ... cm

Calculer les rapports ci-dessous (arrondir les résultats au dixième) :

$$\frac{AC}{AX} = \frac{....}{....} = ... \quad ; \quad \frac{AC}{XC} = \frac{....}{....} = ...$$

4. Conclusion

Les rapports $\frac{AC}{AX}$ et $\frac{AC}{XC}$ sont .... Ils sont proches de la valeur ....

On considère le triangle .... ECB. Relever ses différentes mesures ci-dessous :

EC = ... cm ; BE = ... cm ; BC = ... cm

Calculer les rapports ci-dessous (arrondir les résultats au dixième):

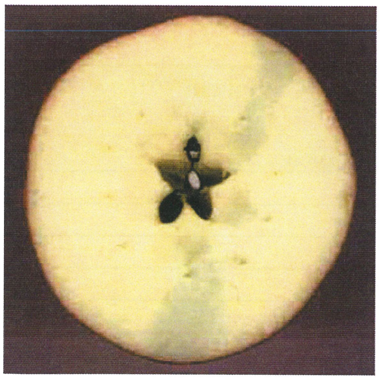
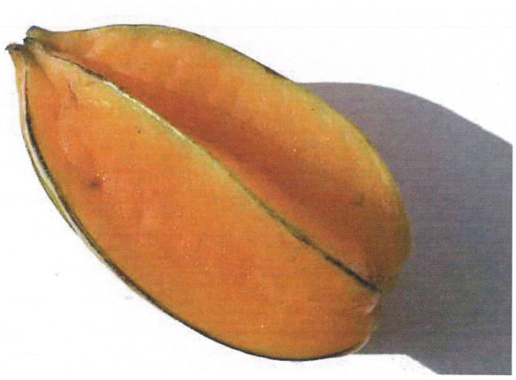
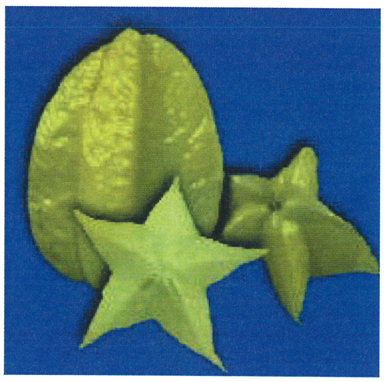
$$\frac{BE}{BC} = \frac{....}{....} = ... \quad ; \quad \frac{EC}{BC} = \frac{....}{....} = ...$$

On peut donc dire que le triangle ECB est un triangle d'or.
Retrouver sur la figure d'autres triangles d'or : ....
....
....
....

5. "Nombre d'Or au naturel"

On retrouve aussi ces figures géométriques très particulières dans la nature.

Le nombre d'Or s'y dissimule souvent mais chaque corps, chaque coquille est unique. La divine proportion ou section dorée, quand on peut la voir, demande quelques fois un peu d'imagination.

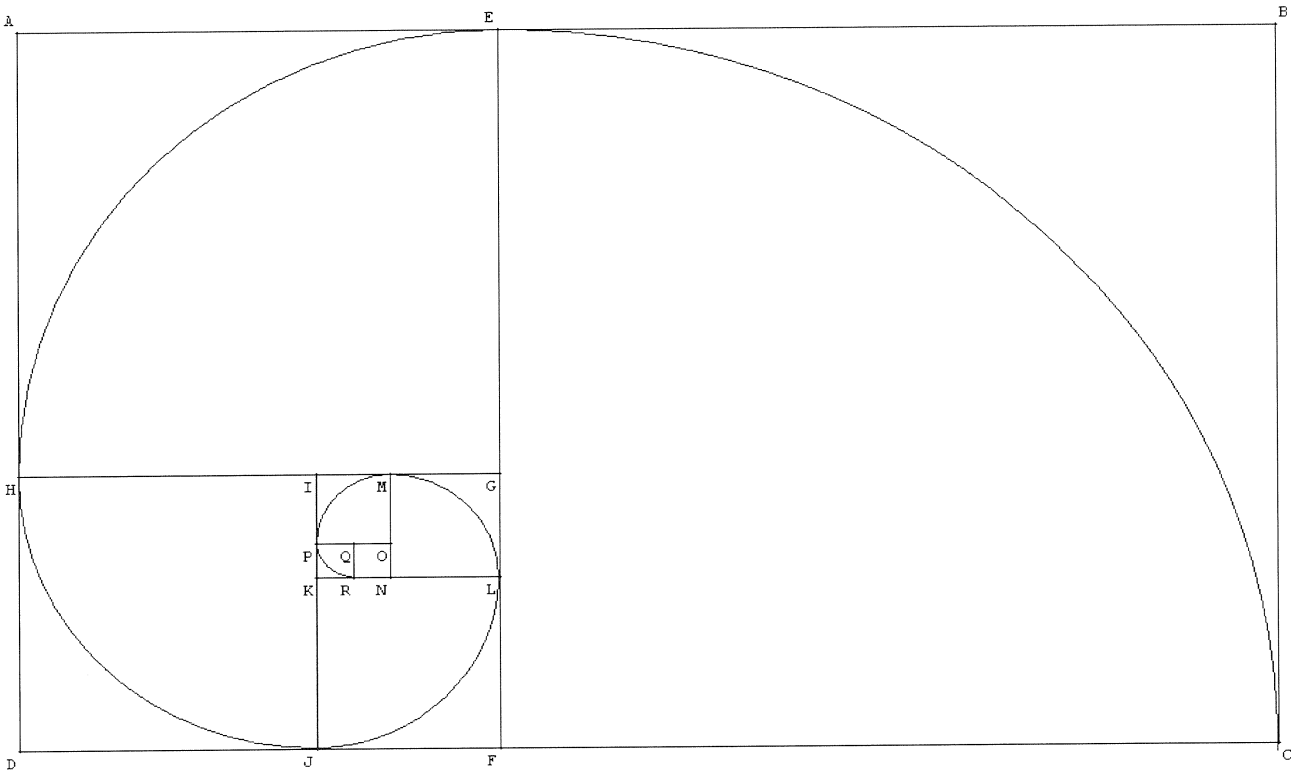
Une pomme coupée en deux parties perpendiculairement à l'axe de la queue présente une étoile à cinq branches.

La carambole est un fruit comestible riche en vitamine C, de couleur jaune-vert, d'aspect brillant et charnu. Ses coupes transversales sont des pentagrammes ; c'est pour cela qu'il est appelé « fruit étoilé ». Ce fruit n'étant pas courant en Franche-Comté, on peut en profiter pour le décrire. La carambole est le fruit du carambolier, arbre originaire d'Indonésie et répandu depuis très longtemps dans toute l'Asie. Il est désormais un produit commercial cultivé dans toutes les régions tropicales.

3.3.2. Document professeur

A. Construction géométrique : le nautile et son exploitation mathématique

1. Voici le tracé que les élèves doivent obtenir (compte tenu du format de la brochure, il est en taille réduite à 50%) :



2. Le tableau obtenu est le suivant :

Rectangles	**Longueur** (en cm)	**Largeur** (en cm)	Calculer : $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$; Arrondir les rapports à 10^{-2}
ABCD	34	21	1,62
AEFD	21	13	1,62
HGFD	13	8	1,63
IGFJ	8	5	1,60
IGLK	5	3	1,67
IMNK	3	2	1,50

3. Premiers termes de la suite de Fibonnacci

La suite est

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
89	144	233	377	610	987	1 597	2 584	4 181	……

C'est une suite de nombres dans laquelle tout nombre est égal à la *somme* des deux nombres *précédents.*

Cette partie ainsi que la suivante, un peu fastidieuse, pourra avantageusement être traitée avec un tableur.

$R_1 = \frac{1}{1} = 1$ $\qquad$ $R_2 = \frac{2}{1} = 2$

Comparer les valeurs de R_1, R_2 et $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. $\qquad$ $R_1 < \varphi < R_2$

$R_3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$ $\qquad$ $R_4 = \frac{5}{3} = 1{,}666666667$

Comparer les valeurs de R_1, R_2, R_3, R_4 et $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. $\qquad$ $R_1 < R_3 < \varphi < R_4 < R_2$

$R_5 = \frac{8}{5} = 1{,}6$ $\qquad$ $R_6 = \frac{13}{8} = 1{,}625$

$R_1 < R_3 < R_5 < \varphi < R_6 < R_4 < R_2$

$R_7 = \frac{21}{13} = 1{,}615384615$ $\qquad$ $R_8 = \frac{34}{21} = 1{,}619047619$

Les valeurs de R_7, R_8 et φ coïncident à 10^{-1} près. *(L'arrondi pour 5 est une convention).*

$R_9 = \frac{55}{21} = 1{,}617647059$ $\qquad$ $R_{10} = \frac{89}{55} = 1{,}618181818$

Les valeurs de R_9, R_{10} et φ coïncident lorsqu'elles sont arrondies à 10^{-2}.

$R_{11} = \frac{144}{89} = 1{,}617977528$ $\qquad$ $R_{12} = \frac{233}{144} = 1{,}618055556$

Les valeurs R_{11}, R_{12} et φ coïncident lorsqu'elles sont arrondies à 10^{-3}.

$R_{13} = \frac{377}{233} = 1{,}618025751$ $\qquad$ $R_{14} = \frac{377}{233} = 1{,}618037135$

Les valeurs R_{13}, R_{14} et φ coïncident lorsqu'elles sont arrondies à 10^{-4}.

$R_{15} = \frac{987}{610} = 1{,}618032787$ $\qquad$ $R_{16} = \frac{1597}{377} = 1{,}618034448$

Les valeurs R_{15}, R_{16} et φ coïncident lorsqu'elles sont arrondies à 10^{-5}.

$R_{17} = \frac{2584}{1597} = 1{,}618033813$ $\qquad$ $R_{18} = \frac{4181}{2584} = 1{,}618034056$

Les valeurs R_{17}, R_{18} et φ coïncident lorsqu'elles sont arrondies à 10^{-6}.

Ranger la suite de nombres R_1, R_2,… dans l'ordre croissant :

$$R_1 < R_3 < R_5 < R_7 < R_9 < R_{11} < R_{13} < R_{15} < R_{17} < R_{18} < R_{16} < R_{14} < R_{12} < R_{10} < R_8 < R_6 < R_4 < R_2$$

$$1{,}618033963 = R_{19} < R_{19} < \varphi < R_{20} = 1{,}618033999$$

On peut aller un peu plus loin selon le niveau des élèves.

On note U_1, U_2, ...U_n.........les différents termes de la suite de Fibonacci. On remarque que, par construction, $U_{n+1} = U_{n-1} + U_n$ et que :

$$R_n = \frac{U_{n+1}}{U_n} \qquad R_n = \frac{U_{n-1} + U_n}{U_n} = \frac{U_{n-1}}{U_n} + 1$$

en remarquant que : $R_{n-1} = \frac{U_n}{U_{n-1}}$, on a $R_n = \frac{1}{R_{n-1}} + 1$.

On vérifie facilement pour n = 2 que $R_2 = \frac{1}{R_1} + 1$

Si on démontre que ce qui est vrai pour R_n est aussi vrai pour R_{n+1}, on aura par un raisonnement par récurrence, démontré que la relation est vraie quelque soit n.

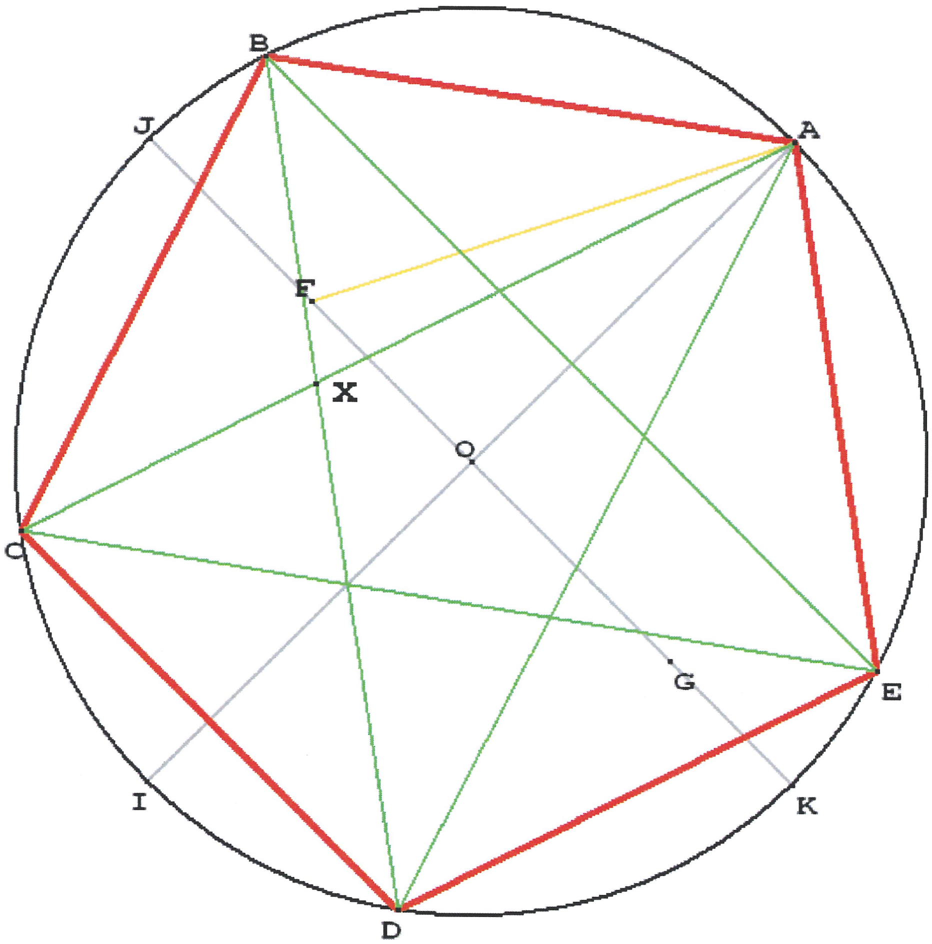
$$R_{n+1} = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} = \frac{U_n + U_{n+1}}{U_{n+1}} = \frac{U_n}{U_{n+1}} + 1 \text{ donc } R_{n+1} = \frac{1}{R_n} + 1$$

et tout point fixe X de cette relation vérifie : $X = \frac{1}{X} + 1$. On montre que le nombre d'or ϕ est point fixe de la suite de Fibonacci.

Pour les curieux, on pourra facilement trouver bien d'autres curiosités mathématiques liant le nombre d'or et la suite de Fibonacci. Par exemple, on pourra calculer les différentes puissances de ϕ et les écrire en fonction de ϕ pour retrouver la suite de Fibonacci dans les coefficients successifs.

B. Construction géométrique du pentagramme

2. La construction obtenue à l'échelle est la suivante :



Comme tout polygone étoilé, on peut reproduire indéfiniment la figure, l'intérieur dessine en réduction un pentagone. On peut joindre les sommets de ce pentagone plus petit pour retrouver un pentagone étoilé. Le pentagramme était considéré par les anciens comme le symbole de perfection et de beauté. On le retrouve dans les rosaces des cathédrales ou sur les drapeaux.

3. Section dorée

Soit X le point d'intersection de [BD] et de [AC]. Placez ce point sur votre figure.
Les différentes distances à relever sont AC = 10,2 cm ; XC = 3,9 cm ; AX = 6,3 cm.

Les rapports sont $\frac{AC}{AX} = \frac{10,2}{6,3} \approx 1,6$; $\frac{AC}{XC} = \frac{6,3}{3,9} \approx 1,6$

4. Conclusion

Les rapports $\frac{AC}{AX}$ et $\frac{AC}{XC}$ sont égaux. Ils sont proches de la valeur 1,6.

On considère le triangle isocèle ECB.
Ses différentes mesures sont :
EC = 10,2 cm ; BE = 10,2 cm ; BC = 6,3 cm. Leurs rapports $\frac{BE}{BC} = \frac{10,2}{6,3} \approx 1,6$; $\frac{EC}{BC} = \frac{10,2}{6,3} \approx 1,6$ font que le triangle ECB est assimilé à un triangle d'or.

Les triangles d'or de la figure sont ADC, BED, CAE, DBA .
Les « 5 pointes » du pentagone étoilé forment aussi des triangles d'or.

En effet on a le rapport pour ces triangles équilatéraux : $\frac{39}{24} \approx 1{,}6$.

Chapitre 4
La vitesse du son

4.1. Objectifs de la séquence

Cette séance, d'une heure, a été testée en classe de maintenance des équipements industriels. En mathématiques, les élèves sont amenés à calculer des vitesses, à effectuer des conversions ; en sciences physiques, c'est l'occasion de définir le son, de se poser la question de la mesure de sa vitesse, d'insister sur le fait que cette vitesse dépend du milieu ambiant. Les mots « SONAR », « mur du son » et « Mach » sont définis dans cette séance.

Matériel nécessaire : calculatrice scientifique

4.2. Vitesse du son

4.2.1. Document élève

Introduction

Que sont ces sons ?

Une sirène de pompiers. Les pleurs d'un bébé. La cloche de la récréation... Ils sont partout les sons ! Mais qui sont vraiment ces vagabonds ?

Si tu jettes une pierre dans l'eau, tu pourras très bien voir les petites vagues circulaires – ou « ondes » – tout autour du point de chute. Un cri, une parole ou même un murmure ont le même effet qu'une pierre jetée à l'eau : ils provoquent eux aussi de petites vagues qui, elles, sont invisibles. Elles se déplacent de la même façon, les molécules de l'air sont leur support.

Le son est en fait un entrechoquement de molécules qui provoque une onde sonore. Dans l'air, le son se déplace car ce sont les molécules de l'air qui vont s'entrechoquer et transmettre le son. Lorsque cette onde sonore arrive sur le tympan de notre oreille, elle le met en mouvement et nous entendons un son.

Dans le vide, il n'y a pas de ...., il n'y a donc pas de .... dans le vide.

Le son ne se propage donc pas dans le vide. Pour s'en convaincre, on peut faire l'expérience suivante : mettre un réveil sous une cloche dont le vide a été réalisé à l'aide d'une pompe à vide et constater que l'on ne l'entend pas sonner.

A. Vitesse du son dans l'air et dans d'autres milieux

1. Comment mesurer la vitesse du son dans l'air ? Un peu d'histoire...

En 1708, William Derham mesure la vitesse du son. Positionné au niveau d'un clocher, il observe le tir d'un canon situé à environ 4 lieues soit 18,85 km.

Considérant que la vision de l'éclair est quasi instantanée, il mesure l'écart de temps entre l'éclair et la détonation du tir du canon. Il trouve 55 secondes.

Calculer la vitesse du son dans l'air, en m/s puis en km/h.

ARRONDIR LE RÉSULTAT À L'UNITÉ.

2. Quelques chiffres...

Le tableau suivant donne des exemples de la vitesse du son dans quelques matériaux à une température de 20 °C.

	GAZ		LIQUIDES		SOLIDES					
	Air	Vapeur d'eau	Eau	Eau de mer	Plexiglas	Pb	Au	Cu	Fe	Al
Vitesse du son (m/s)	......	494	1 497	1 531	2 680	2 160	3 240	5 010	5 950	6 420

Reporter le résultat trouvé en 1) dans le tableau précédent.

La vitesse du son .... selon le milieu dans lequel il se déplace.

D'après le tableau précédent, on peut conclure que la vitesse du son dans le fer est .... fois plus importante que dans l'air (arrondir le résultat à l'unité).

Voici une utilisation de cette propriété :

Pour communiquer entre eux lors de la construction du tunnel sous la Manche, les ouvriers cognaient leurs outils sur des canalisations ou sur les rails métalliques. Le son voyageait donc dans le métal plus vite que dans l'air. Dans les grandes plaines du far west, les indiens posaient leur oreille sur les rails d'une voie ferrée pour savoir si un train arrivait.

3. Utilisation de la vitesse du son dans l'eau : le SONAR

Les bateaux sont équipés de SONAR. Le mot SONAR est l'acronyme anglais de SOund Navigation And Ranging qui peut se traduire par « Navigation et repérage par le son ». Il désigne un système de détection fondé sur la réflexion d'une impulsion sonore sur un objet. Le sonar envoie une onde sonore. S'il n'y a pas de retour mesurable, on considère que l'objet est très loin (ou n'existe pas). S'il y a en retour un son mesurable appelé écho, le temps écoulé entre l'émission et l'écho permet de calculer la distance de l'objet au SONAR.

Exercice

Un bateau de pêche a localisé un sous–marin grâce à son SONAR.

Calculer la distance, en mètres, à laquelle se situe ce sous–marin sachant que le temps écoulé entre l'émission du signal et la réception de son écho est égal à 2 secondes.

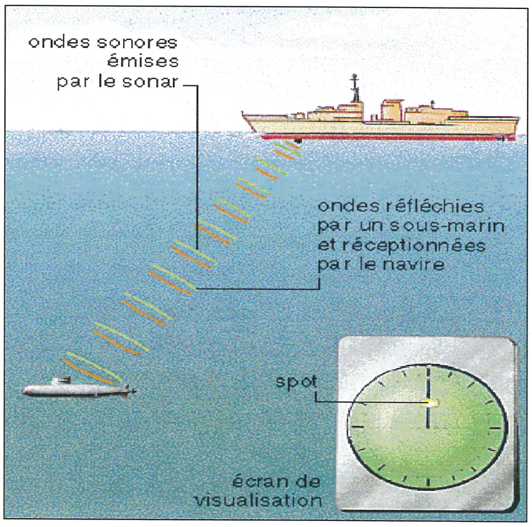
Réponse ....

4. Il y a de l'orage dans l'air…

C'est l'été, il fait très chaud. On voit des éclairs dans le ciel. Le tonnerre gronde.

Voilà une expérience qui n'est pas drôle du tout pour Ben qui a très peur de l'orage. Victoria, en revanche, est enchantée, elle adore s'amuser à comparer les vitesses du son et de la lumière...

Un orage est un échange soudain d'électricité entre le sol et les nuages. La foudre est une décharge électrique entre le ciel et la Terre qui provoque le bruit assourdissant du tonnerre. L'éclair et le tonnerre sont liés à ce phénomène qui est la foudre. Ils se déclenchent en même temps, et pourtant Ben et Victoria voient l'éclair plusieurs secondes avant d'entendre le moindre craquement de tonnerre.



a. Quelle est la vitesse, en km/s, de la lumière dans l'air ?
Vous pouvez vous aider d'un dictionnaire ou d'une base de données accessible par internet.

....

b. Comment appelle–t–on également la vitesse de la lumière dans l'air et par quelle lettre la note–t–on ?

....

c. Donner une explication du phénomène observé à savoir le décalage de temps entre l'observation de l'éclair et le son entendu.

....

d. Victoria et Ben comptent 15 secondes entre l'observation de l'éclair et le son qu'a produit l'éclair.

À quelle distance, en mètres puis en kilomètres, de l'orage se situent-ils ?

....

e. Donner une méthode simple et qui donne une bonne approximation pour déterminer rapidement et sans calculatrice la distance qui peut nous séparer d'un orage.

....

B. Le mur du son

1. L'expérience

On entend parfois un grand « bang » au passage de certains avions au dessus de nos têtes.

Quand un avion vole, il provoque la mise en mouvement des molécules d'air qu'il croise.

Il « fabrique » donc du bruit. La plupart des avions volent moins vite que le son et les ondes sonores sont évacuées en avant et en arrière de l'appareil, c'est–à–dire dans toutes les directions. Mais quand un avion se rapproche de la vitesse fatidique des 343 mètres par seconde, le son qu'il génère est « rattrapé » par l'appareil, ce qui crée un obstacle juste devant son nez. Le franchissement de cet obstacle s'appelle le franchissement du mur du son et provoque le bang que l'on entend quelques fois au passage des avions de chasse.

2. Un peu d'histoire…

C'est en 1880 que le physicien autrichien Ernst Mach observe le premier ce phénomène. En effet, à cette époque, seuls les obus d'artillerie franchissent le mur du son.

Mais, c'est en octobre 1947 que Charles Yeager, aux commandes de son avion le Bell X–1, franchit le premier le mur du son. L'exploit fit grand bruit ! Nombreux étaient les pilotes qui avaient payé de leur vie leur approche de cette vitesse.

En l'honneur d'Ernst Mach, la vitesse du son dans l'air est mesurée en nombre de Mach. Ces nombres sont appelés Mach X.

Compléter les phrases suivantes :

Mach 1 correspond à .....fois la vitesse du son, c'est-à-dire à.........m/s soit ....km/h.
Mach.....correspond à 2 fois la vitesse du son, c'est-à-dire à.........m/s soit ....km/h.
Mach 5 correspond à .....fois la vitesse du son, c'est-à-dire à.........m/s soit ....km/h.
Mach.....correspond à .....fois la vitesse du son, c'est-à-dire à.........m/s soit 9 878 km/h.

3. Un peu de vocabulaire « aérien »

Actuellement, seuls les avions de chasse et les navettes spatiales franchissent le mur du son. Leurs vitesses peuvent varier de Mach 1 à Mach 8. Quatre termes peuvent les qualifier selon leurs vitesses : supersonique ; transsonique ; hypersonique et subsonique.

Compléter les phrases ci–dessous avec ces adjectifs :

- Si la vitesse d'un avion est inférieure à Mach 0,8 ; il est qualifié de...............
- Si la vitesse d'un avion (Airbus, Boeing, avion de combat) est supérieure à Mach 0,8 et inférieure à Mach 1,2 ; il est qualifié de....................
- Si la vitesse d'un avion (Concorde, avions de combat : Rafale) est supérieure à Mach 1,2 et inférieure à Mach 5 ; il est qualifié de...............
- Si un véhicule (navette spatiale) atteint une vitesse supérieure à Mach 5, il est qualifié de ....

4.2.2. Document professeur

Introduction

Dans le vide, il n'y a pas de *molécules*, on ne peut donc pas parler de vitesse du son dans le vide. Le son ne se propage donc pas dans le vide.

A. Vitesse du son dans l'air et dans d'autres milieux

1. La vitesse du son dans l'air est $v = \frac{d}{t} = \frac{18850}{55} = 343$ m/s = 1 235 km/h

2. Le tableau suivant donne des exemples de la vitesse du son dans quelques matériaux à une température de 20°C.

	GAZ		LIQUIDES		SOLIDES					
	Air	Vapeur d'eau	Eau	Eau de mer	Plexiglas	Pb	Au	Cu	Fe	Al
Vitesse du son (m/s)	343	494	1 497	1 531	2 680	2 160	3 240	5 010	5 950	6 420

La vitesse du son *varie* selon le milieu dans lequel il se déplace.

D'après le tableau précédent, on peut conclure que la vitesse du son dans le fer est ≈ *17* fois plus importante que dans l'air.

3. $d = v \times t$ =1 531 × 1 = 1 531. Le sous marin se situe à *1 531* m.

4. Il y a de l'orage dans l'air…

a. Quelle est la vitesse, en km/s, de la lumière dans l'air ? La vitesse de la lumière dans l'air est égale à *300 000 km/s*.

b. La vitesse de la lumière dans l'air est notée par *la lettre c* ; on l'appelle aussi la *célérité*.

c. C'est qu'il faut beaucoup moins de temps à l'éclair pour atteindre les pupilles qu'il n'en faut au son pour parvenir aux oreilles. L'image de l'éclair se déplace elle aussi à la vitesse de la lumière. Alors que le son du tonnerre se traîne à 343 mètres par seconde… un escargot !

d. $d = v \times t$ = 343 × 15 = 5145 m. L'orage se situe à environ *5* km.

e. Pour déterminer rapidement et sans calculatrice la distance qui peut nous séparer d'un orage, il suffit de compter les secondes entre la visualisation de l'éclair et la détonation et de multiplier par 300 pour avoir une estimation en m ou de diviser par 3 pour l'avoir en km.

B. Le mur du son

2. Un peu d'histoire…

La vitesse du son dans l'air est mesurée en nombre de Mach, en l'honneur d' Ernst Mach.

Mach 1 correspond à *1* fois la vitesse du son, c'est-à-dire à *343* m/s soit *1 235* km/h.

Mach *2* correspond à 2 fois la vitesse du son, c'est-à-dire à *686* m/s soit *2 470* km/h.
Mach *5* correspond à *5* fois la vitesse du son, c'est-à-dire à *1 715* m/s soit *6 174* km/h.
Mach *8* correspond à *8* fois la vitesse du son, c'est-à-dire à *2 744* m/s soit *9 878* km/h.

3. Un peu de vocabulaire « aérien »

Actuellement, seuls les avions de chasse et les navettes spatiales franchissent le mur du son. Leurs vitesses peuvent varier de Mach 1 à Mach 8 !!! Quatre termes peuvent les qualifier selon leurs vitesses.

- Si la vitesse d'un avion est inférieure à Mach 0,8 ; il est qualifié de *subsonique*.
- Si la vitesse d'un avion (Airbus, Boeing, avions de combat) est supérieure à Mach 0,8 et inférieure à Mach 1,2 ; il est qualifié de *transsonique*.
- Si la vitesse d'un avion (Concorde, avions de combat : Rafale) est supérieure à Mach 1,2 et inférieure à Mach 5 ; il est qualifié de *supersonique*.
- Si la vitesse d'un véhicule (navettes spatiales) est supérieure à Mach 5, il est qualifié de *hypersonique*.

Chapitre 5
La relativité restreinte

5.1. Objectifs des séquences

Ce thème n'est pas abordé par les programmes de lycée professionnel or certaines idées sont accessibles avec peu de technicité et, étant relayé par les médias, il est motivant pour nos élèves.

L'activité vise à :

- rendre accessible la théorie de la relativité restreinte ;
- comprendre, d'après cette théorie, la relativité du temps et des distances dans notre système de mesures ;
- prendre conscience que notre intuition des phénomènes physiques n'est pas toujours en phase avec la réalité ;
- voir les limites de la calculatrice de poche et comprendre l'intérêt d'outils plus puissants tels que l'ordinateur ;
- comprendre le passage d'une théorie à une application pratique : le GPS.

L'acquisition du vocabulaire lié à cette thématique (relativité restreinte, vitesses relativistes, dilatation du temps, contraction des distances) en est un objectif culturel.

Nous avons proposé cette activité à nos élèves de baccalauréat professionnel, nous y avons consacré deux heures en classe entière. Les connaissances mises en jeu sont celles de la fin de collège.

Matériels nécessaires : calculatrice scientifique, ordinateur.

Les notions mathématiques travaillées sont :

- les formules de vitesses, de composition des vitesses, de dilatation du temps, et de contraction des distances ;
- les transformations de formules, les applications numériques, les arrondis, l'écriture scientifique ;
- la conversion d'unités de temps et de distances ;
- les puissances, les racines carrées ;
- le théorème de Pythagore.

5.2. Séquence 1 : "La relativité restreinte : activité d'approche"

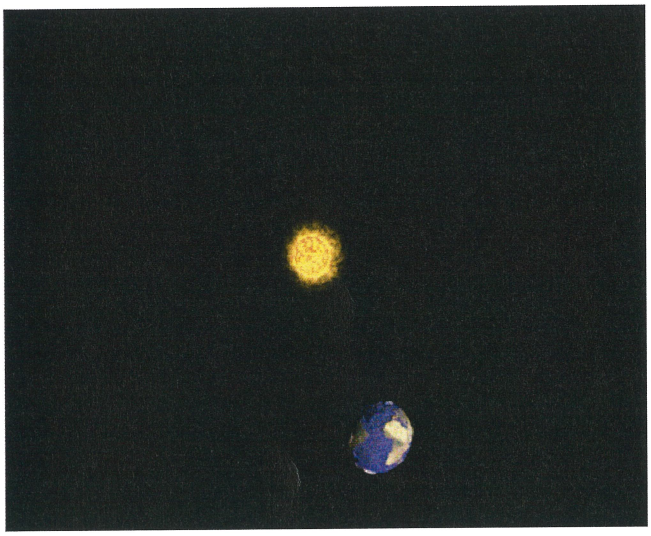
5.2.1. Document élève

Introduction

La vitesse de la lumière est d'environ 300 000 km/s ou 300 000 000 m/s. D'après les connaissances et les expériences actuelles, il semble qu'on ne puisse pas mesurer de vitesse supérieure à celle de la lumière. Tout se passe comme si la vitesse de la lumière était une vitesse limite dans l'univers ; rien ne peut aller plus vite.

Les images qui parviennent jusqu'à nos yeux se déplacent à cette vitesse.

A. Distance Terre–Soleil



1. Compléter les phrases suivantes :

L'étoile la plus proche de la Terre est ....

Le .... est situé à une distance d'environ 150 000 000 de km de la Terre.

La vitesse de la lumière se note c comme « célérité ».

On a $c = \frac{d}{t}$ où d est la distance parcourue et t est le temps.

2. Exprimer le temps t en fonction de la célérité de la lumière c et de la distance d.

$t =$ ......

3. Calculer le temps, en secondes, que met la lumière du Soleil pour parvenir à la Terre. Attention à la cohérence des unités utilisées.

....

4. Convertir ce temps en minutes et l'arrondir à la minute près.

....

5. Compléter les phrases suivantes :

L'image du Soleil met donc environ .... minutes pour parvenir jusqu'à nous. Nous voyons donc le Soleil tel qu'il était il y a environ .... minutes.

S'il explosait, nous verrions son explosion seulement .... minutes après celle-ci.

B. Les distances dans l'univers

1. L'année lumière

Dans l'univers, les distances sont tellement grandes qu'on utilise une nouvelle unité de mesure « l'année lumière ».

Définition : l'année lumière est la distance parcourue par la lumière pendant une année.

a. À partir de la formule $c = \frac{d}{t}$, exprimer la distance d en fonction de la célérité de la lumière c et du temps t :

$d =$ ....

b. À partir de cette formule, calculer la distance en km, parcourue par la lumière pendant 1 année.

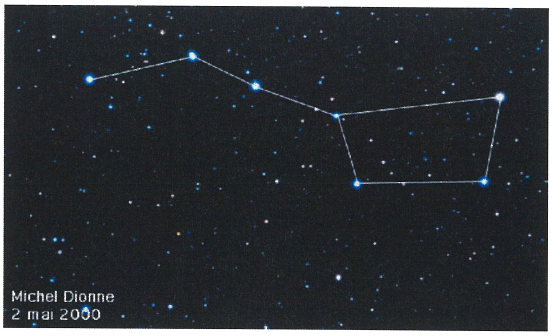
....

donc 1 année lumière = 1 a.l. = ... $\times 10^{12}$ km

2. La Grande Ourse

La Grande Ourse est composée d'étoiles qui sont très éloignées de notre système solaire.

En moyenne, ces étoiles sont éloignées d'environ 100 années lumière de la Terre.



a. Compléter les phrases suivantes :

L'image de la Grande Ourse met donc .... ans pour parvenir jusqu'à nous. Nous voyons donc la Grande Ourse telle qu'elle était il y a .... ans.

À quoi ressemble–t–elle aujourd'hui ? On ne le sait pas mais nous le saurons dans .... ans.

b. Compléter les phrases suivantes avec les mots : *passé, présent, futur*

Quand nous observons le ciel et les étoiles aujourd'hui nous voyons donc le ....

Quant au .... nous le connaîtrons seulement dans le ....

C. Simultanéité de 2 événements

Imaginons trois planètes (G, C et D) et deux étoiles (Alpha et Bêta), qui, à une date donnée, disons le premier janvier 2004, auraient été alignées suivant le schéma suivant :

planète G | étoile Alpha | planète C | étoile Bêta | planète D

1 a.l = 1 année lumière

Imaginons aussi que chacune des trois planètes soit habitée et que ses habitants, fort évolués, disposent du même calendrier que nous et soient savants en astronomie.

Imaginons, enfin, que Célian, habitant la planète C, ait rédigé le rapport suivant : « C'est un concours de circonstances exceptionnel mais les étoiles alpha et bêta viennent d'exploser ensemble, en même temps, ce 1er janvier 2004 à exactement 6h00 du matin ».

- Compléter le rapport de Gaëlle, astronome habitant la planète G :

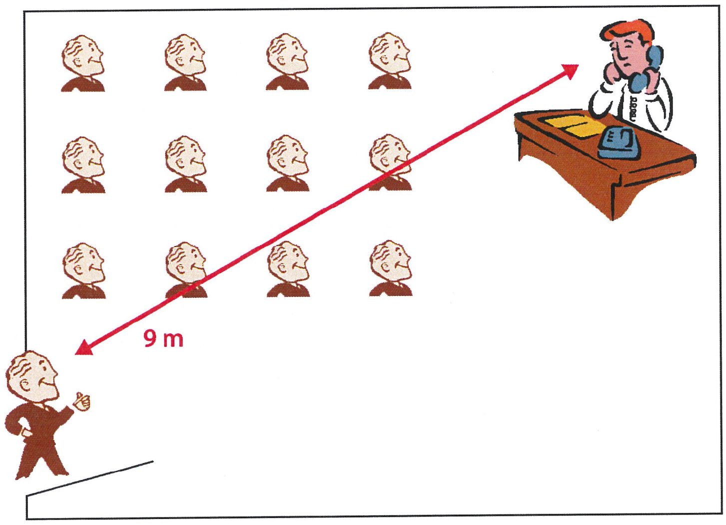
« La planète alpha a explosé à la date du .... à ...... h ...... »
« La planète bêta a explosé à la date du .... à ...... h ...... »

- Compléter le rapport de Damien, astronome habitant la planète D :

« La planète alpha a explosé à la date du .... à ...... h ...... »
« La planète bêta a explosé à la date du .... à ...... h ...... »

Lequel de ces 3 astronomes confirmés a fait un rapport exact de ce qui s'est réellement passé ? Les étoiles ont-elles explosé en même temps comme le déclare Célian ? Expliquer.

....



D. Expérience de pensée

Imaginons maintenant que la lumière ne se déplace plus à 3.10^8 m/s mais à 3 cm/s. Cela pourrait causer des situations inextricables.

Un différent surgit entre un enseignant et un élève sur l'horaire de son arrivée en cours :

L'élève déclare être arrivé à la porte de la salle à l'heure « limite », c'est-à-dire à 8h00 précises, soit 5 minutes après la sonnerie.

L'enseignant, lui, déclare avoir vu l'élève arriver à la porte de la classe en retard à 8h05 soit 10 minutes après la sonnerie. Respectant les consignes du Proviseur « un cours ne se dérange pas », il prévient la « vie scolaire » et demande à l'élève de repartir en étude.

Comment expliquer ce différent ? Qui a raison ?

Le plan de la salle de classe vous aidera sans doute à résoudre ce problème.

On rappelle que dans cette expérience de pensée la vitesse de la lumière est 3 cm/s.

On a $c = \dfrac{d}{t}$ avec d : la distance parcourue et t : le temps.

1. Exprimer le temps t en fonction de la célérité de la lumière c et de la distance d.

$t =$ ....

2. Calculer le temps mis par l'image de l'élève pour parvenir jusqu'au professeur.

....

Le résultat que vous avez trouvé peut-il expliquer le différent qui oppose l'élève au professeur ?

....

Qui a raison ? L'élève disant qu'il est arrivé à 8h00 ou l'enseignant disant qu'il était 8h05 ? Expliquer.

....

5.2.2. Document professeur

A. Distance Terre–Soleil

1. L'étoile la plus proche de la Terre est le *Soleil*.
Le *Soleil* est situé à une distance d'environ 150 000 000 de km de la Terre.
La vitesse de la lumière se note c comme « célérité ».

On a $c = \frac{d}{t}$ où d est la distance parcourue et t est le temps.

2. Exprimer le temps t en fonction de la célérité de la lumière c et de la distance d.

$t = \frac{d}{c}$

3. Calculer le temps, en secondes, que met la lumière du Soleil pour parvenir à la Terre. Attention à la cohérence des unités utilisées.

Puisque $t = \frac{150\,000\,000}{300000} = 500$, la lumière du Soleil met 500 secondes pour parvenir jusqu'à la Terre.

4. Convertir ce temps en minutes et l'arrondir à la minute près.

$\frac{500}{60} \approx 8$ min 20 s. La lumière du Soleil met environ 8 minutes pour parvenir jusqu'à la Terre.

5. Compléter les phrases suivantes :
L'image du Soleil met donc *8* minutes pour parvenir jusqu'à nous. Nous voyons donc le Soleil tel qu'il était il y a *8* minutes.
S'il explosait, « nous verrions » son explosion seulement *8* minutes après celle-ci.

B. Les distances dans l'univers

1. L'année lumière

a. A partir de la formule $c = \frac{d}{t}$, exprimer la distance d en fonction de la célérité de la lumière c et du temps t :
$d = c.t$

b. A partir de cette formule calculer la distance en km parcourue par la lumière pendant 1 année.
d = 300 000 × 3 600 × 24 × 365,25 = 9 467 280 000 000
La distance parcourue par la lumière en 1 année est de *9 467 280 000 000* km.

donc 1 année lumière = 1 a.l. ≈ *9,5* × 10^{12} km

2. La Grande Ourse

a. Compléter les phrases suivantes :
L'image de la Grande Ourse met donc *100* ans pour parvenir jusqu'à nous. Nous voyons donc la Grande Ourse telle qu'elle était il y a *100* ans.

A quoi ressemble-t-elle aujourd'hui ? On ne le sait pas mais nous le saurons dans *100* ans.

b. Compléter les phrases suivantes avec les mots : *passé, présent, futur* :

Quand nous observons le ciel et les étoiles aujourd'hui nous voyons donc le *passé*. Quant au *présent* nous le connaîtrons seulement dans le *futur*.

C. Simultanéité de 2 événements

• Compléter le rapport de Gaëlle, astronome habitant la planète G :
« La planète alpha a explosé à la date du 1er janvier 2004 à 6 h 00. »
« La planète bêta a explosé à la date du 1er janvier 2006 à 6 h 00. »
• Compléter le rapport de Damien, astronome habitant la planète D :
« La planète alpha a explosé à la date du 1er janvier 2006 à 6 h 00. »
« La planète bêta a explosé à la date du 1er janvier 2004 à 6 h 00. »

Lequel de ces 3 astronomes confirmés a fait un rapport exact de ce qui s'est réellement passé ? Les étoiles ont-elles explosé en même temps comme le déclare Célian ? Expliquer.

Les astronomes ont raison tous les 3.
La simultanéité d'un événement dans le temps n'est qu'une notion relative.
Cela dépend de la position dans l'espace des observateurs.
La notion de simultanéité du « temps » pour différents observateurs est donc liée à la notion de position dans l'« espace » pour ces observateurs.

D. Expérience de pensée

1. Exprimer le temps *t* en fonction de la célérité de la lumière *c* et de la distance *d*.

$t = \frac{d}{c}$.

2. Calculer le temps mis par l'image de l'élève pour parvenir jusqu'au professeur.

$t = \frac{d}{c} = \frac{900}{3} = 300.$

Le temps mis par l'image de l'élève pour parvenir jusqu'au professeur est 300 s, soit 5 minutes.

Le résultat que vous avez trouvé peut-il expliquer le différent qui oppose l'élève au professeur ? Qui a raison ? L'élève disant qu'il est arrivé à 8h00 ou l'enseignant disant qu'il était 8h05 ?

Expliquer.

L'élève est arrivé à la porte de la classe à 8h00 soit 5 minutes après la sonnerie. L'image de son arrivée n'est parvenue au professeur que 5 minutes plus tard c'est à dire à 8h05 soit 10 minutes après la sonnerie.

Les 2 ont raison !
C'est une question de positionnement dans la classe et de vitesse de la lumière.
La notion de « temps » est donc intimement liée à la notion d'« espace ».
On parle d'« espace-temps ».

5.3. Séquence 2 : "Relativité restreinte : relativité du temps et des distances"

5.3.1. Document élève

A. Composition des vitesses

Comme nous l'avons dit précédemment, d'après les connaissances et les expériences actuelles, il semble qu'on ne puisse pas mesurer de vitesse supérieure à la vitesse de la lumière. Tout se passe comme si la vitesse de la lumière était une vitesse limite dans l'univers. Il semble que rien ne puisse se déplacer plus vite.

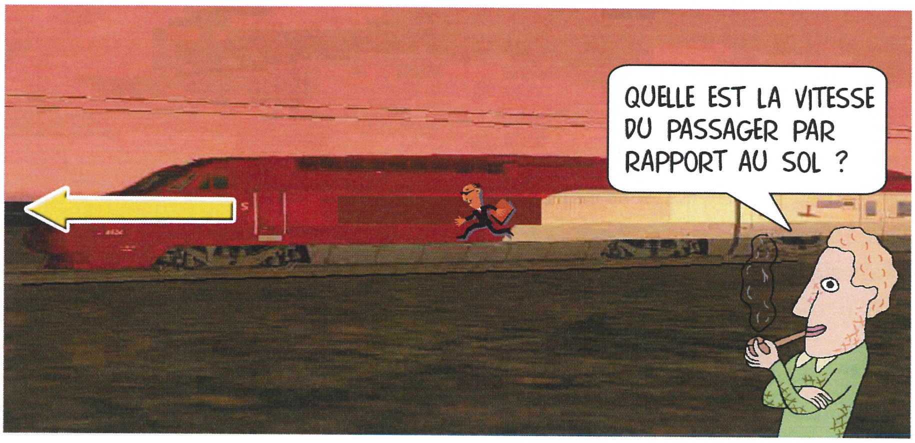
Cela peut être contraire à notre logique.

Dans toute la suite de l'exposé, la vitesse de la lumière est considérée constante.

1. Le cas des petites vitesses dites classiques

Un train grande vitesse se déplace à 290 km/h. Un passager très sportif court à 20 km/h dans le couloir du train dans le sens du déplacement.

Vitesse du train/sol = 290 km/h **Vitesse du passager/train = 20 km/h**



Quelle est la vitesse du passager pour un observateur situé à l'extérieur du train ?

.... = ...

Additionner les vitesses paraît logique et semble conforme à la réalité mais pose un problème si l'on considère que la vitesse de la lumière est la vitesse maximum.

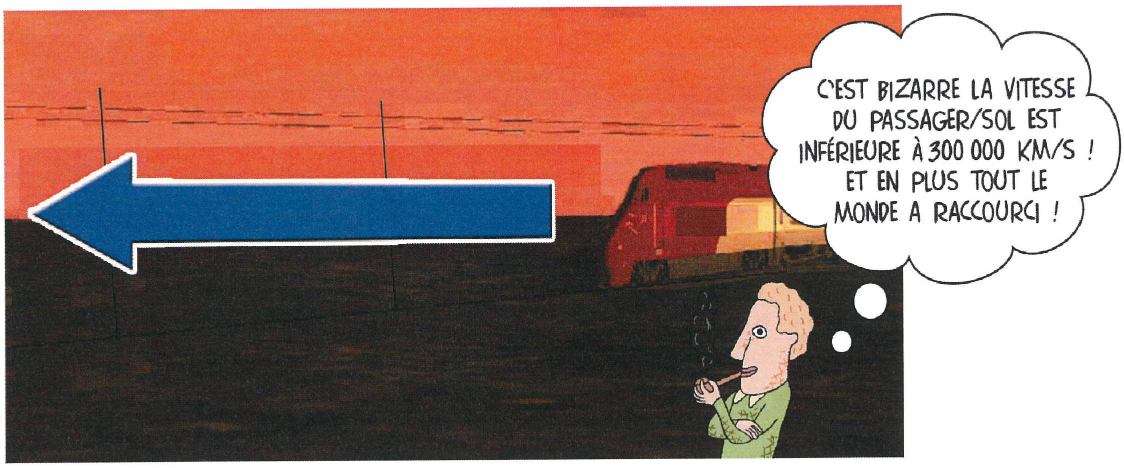
Faisons maintenant une expérience de pensée.

2. Le cas des très grandes vitesses dites relativistes

Faisons comme si ce même train se déplaçait à 290 000 km/s avec un passager « particulièrement sportif » qui courrait dans le train à une vitesse de 20 000 km/s. En raisonnant comme précédemment, pour un observateur extérieur, ce passager aurait une vitesse de.........

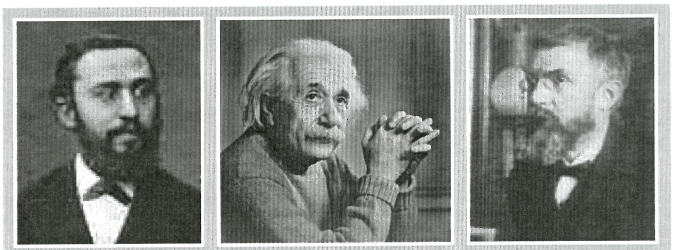
Or c'est contradictoire avec la vitesse qu'on pourrait mesurer et qui doit être inférieure à la vitesse de la lumière soit c = 300 000 km/s environ.

Vitesse du train/sol = 290 000 km/s **Vitesse du passager/train = 20 000 km/s**



Jusqu'à présent, personne n'a mesuré de vitesse supérieure à celle de la lumière : c = 300 000 km/s

On admet donc que 300 000 km/s est la vitesse maximum. Il nous faut donc remettre en cause le fait que les vitesses s'ajoutent comme on pourrait le penser. Par ailleurs, on remarque que les objets qui se déplacent à une vitesse proche de celle de la lumière semblent rétrécir, se contracter dans le sens du mouvement.



Poincaré (1854-1912) Einstein (1879-1955) Lorentz (1853–1928)

Ces phénomènes conduisent à remettre en cause nos conceptions. Le premier qui a pu construire une théorie adaptée est A. Einstein en 1905. D'autres savants, comme Poincaré, Lorentz, avaient approché cette théorie mais sans lui donner la portée générale qu'Einstein a pu lui trouver.

3. Formule de composition des vitesses

En fait les vitesses du train et du passager par rapport à un observateur extérieur ne s'ajoutent pas comme on pourrait le penser mais se calculent selon la formule suivante dite formule de composition des vitesses :

$$v_{ps} = \frac{v_{pt} + v_{ts}}{1 + \dfrac{v_{pt} \times v_{ts}}{c^2}}$$

v_{ps} = vitesse du passager par rapport au sol
v_{pt} = vitesse du passager par rapport au train
v_{ts} = vitesse du train par rapport au sol
c = vitesse de la lumière = 300 000 km/s ou 3.10^8 m/s ou 1 080 000 000 km/h

Utiliser la formule de composition des vitesses pour calculer la vitesse du passager par rapport au sol dans les deux cas précédents (arrondir le résultat à l'unité).

1er cas : v_{pt} = vitesse du passager par rapport au train = 20 km/h
v_{ts} = vitesse du train par rapport au Sol = 290 km/h
c = vitesse de la lumière = 1 080 000 000 km/h

$$v_{ps} = \cfrac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots + \cfrac{\dots\dots}{\dots\dots}}$$

Donc v_{ps} la vitesse du passager par rapport au sol est de .... km/h.
On retrouve donc ici avec ces vitesses classiques le résultat intuitif : $v_{ps} = v_{pt} + v_{ts}$
Expliquer pourquoi :

....

....

2^e^ cas : v_{pt} = vitesse du passager par rapport au train = 20 000 km/s
v_{ts} = vitesse du train par rapport au Sol = 290 000 km/s
c = vitesse de la lumière = 300 000 km/s

$$v_{ps} = \cfrac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots + \cfrac{\dots\dots}{\dots\dots}}$$

Donc v_{ps} la vitesse du passager par rapport au sol est de .... km/s.
Retrouve t–on ici l'égalité $v_{ps} = v_{pt} + v_{ts}$?
Expliquer pourquoi :

....

....

Conclusion

Lorsque des vitesses sont celles dont nous avons l'habitude, dites classiques, la formule de composition des vitesses est équivalente à la formule intuitive d'additivité des vitesses.

En revanche, lorsque les vitesses deviennent très grandes, proches de la vitesse de la lumière (des milliers de km par seconde), la vitesse observée est inférieure à la somme des vitesses.

À chaque fois que l'on calcule une vitesse avec la formule de composition des vitesses, on trouve une vitesse inférieure à celle de la lumière. Cela est conforme à l'expérience.

B. Relativité du temps et des distances

Si on accepte le fait qu'avec notre façon de mesurer le temps et les distances, on ne peut observer de vitesse supérieure à celle de la lumière soit environ 300 000 km/s, il faut admettre comme Einstein que notre façon de mesurer le temps et les distances n'est pas absolue mais « relative ». Cela veut dire par exemple que pour nous, un même événement n'a pas la même durée selon qu'il se produit dans un véhicule immobile ou bien dans un véhicule qui se déplace par rapport à nous. Cela veut dire aussi par exemple que pour nous, une règle n'a pas la même mesure si on l'observe dans un véhicule immobile ou bien dans un véhicule qui se déplace par rapport à nous.

Quand on observe un objet se déplaçant à des « vitesses relativistes », c'est-à-dire de l'ordre du millier de km/s, on peut constater la « dilatation du temps » et la « contraction des longueurs » dans le sens du mouvement.

Voici un moyen de calculer la dilatation du temps et la contraction des longueurs :

$$t_e = \frac{t_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,^{*} \qquad\qquad d_e = d_i\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Où t_e, d_e : temps et distance mesurés par l'observateur extérieur, immobile.

t_i, d_i: temps et distance mesurés par un observateur se trouvant à l'intérieur de l'objet en mouvement.

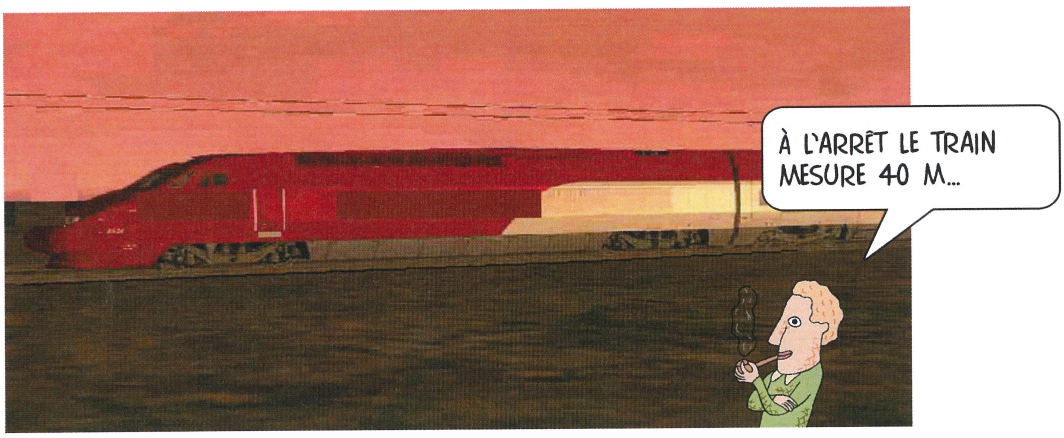
v : vitesse de l'objet par rapport à l'observateur immobile

c = vitesse de la lumière = 300 000 km/s ou $3 \,.\, 10^8$ m/s ou 1 080 000 000 km/h

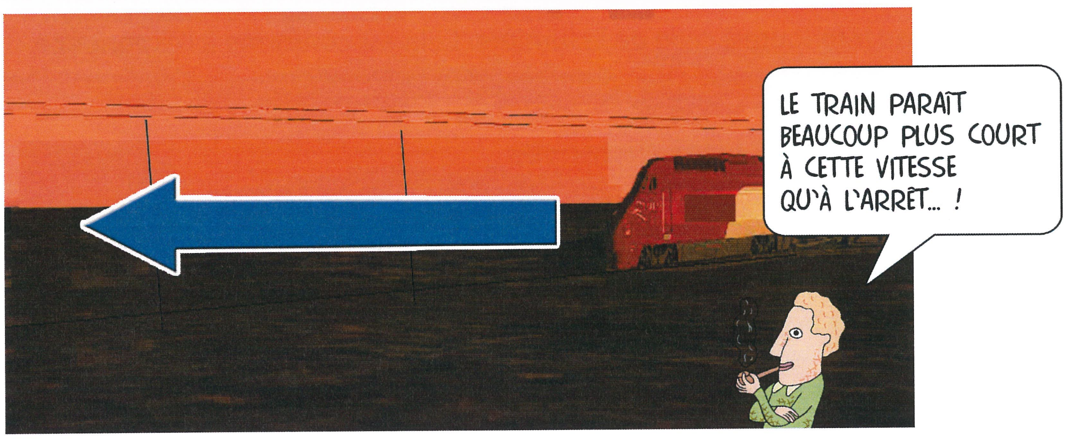
1. Contraction des longueurs

La longueur des 2 rames du train, mesurée lorsque le train est à l'arrêt, est de 40 m.

Train à l'arrêt



Ce train se déplace à la vitesse de 290 000 km/s.



* Cette formule est relativement facile à démontrer grâce au théorème de Pythagore : voir l'annexe en fin d'activité.

Quelle est sa longueur pour l'observateur qui regarde le train passer ?

Pour cela, calculer, grâce à la formule donnée précédemment, la longueur d_e en m que mesure le train pour cet observateur extérieur immobile (arrondir le résultat à l'unité).

$$d_e = d_i\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(avec d_i = 40 m, v = 290 000 km/s et c = 300 000 km/s)

d_e = ...

Pour un observateur extérieur la longueur du train roulant à 290 000 km/s est maintenant d'environ .... m (alors qu'elle était de 40 m à l'arrêt !).

C'est la « contraction des longueurs » pour un observateur extérieur regardant un objet se déplaçant à très grande vitesse.

2. Dilatation du temps

Imaginons maintenant que le passager du train regarde sur son ordinateur portable un DVD pour « passer le temps » pendant son voyage. Le film a une durée officielle de 2h.

Le passager du train et l'observateur extérieur sont en contact direct. Le passager du train et l'observateur extérieur déclenchent ensemble leur chronomètre lorsque le film commence et l'arrêtent quand il se termine.

Evidemment le passager du train a l'indication suivante sur son chronomètre :
(temps mesuré à l'intérieur du train) t_i = 2 heures.

Grâce à la formule donnée précédemment, vous pouvez trouver l'indication du chronomètre de l'observateur extérieur t_e en heure (arrondir le résultat à l'unité).

$$t_e = \frac{t_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

avec :
v (vitesse du train) = 290 000 km/s,
c (vitesse de la lumière) = 300 000 km/s,
t_i (temps mesuré à l'intérieur du train) = 2 heures.

t_e = ...

Donc pour un observateur extérieur le film dure .... heures environ !

C'est la « dilatation du temps » pour un observateur extérieur regardant un objet se déplaçant à très grande vitesse.

3. Explication

Comment, pour un observateur extérieur, un train peut–il à la fois mesurer 40 m au repos et .... m quand il roule à 290 000 km/s ?

Comment, pour un observateur extérieur, un film de 2 h peut–il durer .... h dans un train se déplaçant à 290 000 km/s ?

Pour comprendre ces expériences de pensées qui ne sont pas intuitives, on peut les comparer à la représentation en perspective. À savoir, un objet très grand devient petit quand on le regarde de très loin.

Observons cette photo sur laquelle un homme « tient la Lune entre ses mains »

Quel est le diamètre de la Lune ?

C. Relativité dans la vie quotidienne

1. Vitesses normales non relativistes

Comme nous l'avons vu dans le cas du train, à des vitesses « normales », non relativistes, les effets de la contraction des distances et de la dilatation du temps ne sont pas perceptibles. Il faudrait des instruments de mesure extrêmement précis pour les mettre en évidence. Montrons cela à l'aide de l'exemple ci–dessous.

Un avion à réaction vole à Mach 2, c'est–à–dire à une vitesse de 2 448 km/h ou 680 m/s (deux fois la vitesse du son).

La tour de contrôle veut vérifier la théorie de la relativité restreinte. Pour cela, un avion vole à Mach 2 pendant 5 jours.

Calculer la durée en secondes :

.... = ... secondes.

Le contrôleur du ciel donne le top du départ et les pilotes de l'avion déclenchent leur chronomètre embarqué exactement au même moment.

Au bout des 5 jours soit exactement 432 000 secondes, le contrôleur demande aux pilotes de stopper leur chronomètre.

Pour vérifier la durée mesurée à bord de l'avion, nous allons nous servir des formules que nous rappelons ci–dessous :

$$t_e = \frac{t_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où v est la vitesse de l'avion, c la vitesse de la lumière soit 300 000 000 m/s, t_e le temps mesuré par la tour de contrôle et t_i le temps mesuré à l'intérieur de l'avion.

$t_i =$ .... = ... = ...

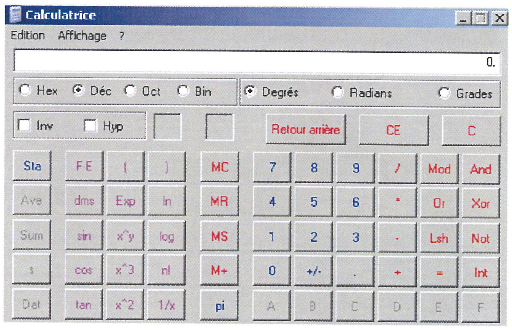
Vous avez effectué ce calcul avec votre calculatrice et vous avez trouvé le résultat attendu soit $t_i = 432\,000$ s exactement.

Vous concluez donc que le temps mesuré à l'intérieur de l'avion t_i est le même que le temps mesuré à l'extérieur de l'avion par la tour de contrôle t_e soit 5 jours exactement ou 432 000 secondes. La dilatation du temps n'est dons pas mesurée.

Pourquoi cela ?

Refaisons ce calcul avec un instrument précis, par exemple la calculatrice scientifique du système d'exploitation de votre ordinateur.

Pour Windows, il faut suivre le chemin : Démarrer/ Programmes/accessoires/calculatrice (une fois que la calculatrice est ouverte allez dans affichage/calculatrice scientifique).



Nous obtenons ainsi une calculatrice affichant un nombre très important de chiffres après la virgule.

Calculez t_i et arrondissez le résultat au millionième de seconde, c'est-à-dire à 10^{-6} près (soit 6 chiffres après la virgule).

$t_i =$ ....

donc $t_i \approx$ .... secondes.

On trouve donc un temps mesuré dans l'avion t_i inférieur d'environ .... millionième de seconde au temps mesuré par la tour de contrôle.

Donc, nous constatons qu'à des vitesses non relativistes, les effets de la contraction des distances et de la dilatation du temps ne sont pas mesurables avec les instruments usuels.

2. Le GPS (Global Positioning System)

Décrivons rapidement le système :

Les 24 satellites GPS se déplacent à une vitesse de 3 874 m/s soit 13 946 km/h et sont à une altitude de 20 200 km. Ils se déplacent donc par rapport à la Terre ; ils ne sont pas géostationnaires. Dans cette activité nous allons étudier l'effet de la vitesse de déplacement des satellites par rapport à la Terre. Pour ce travail, nous ne tiendrons pas compte, bien qu'ils soient loin d'être négligeables, des effets de la gravitation.

Pour connaître notre position exacte sur la Terre, il nous faut au minimum recevoir les informations de trois satellites.

Le principe est le suivant : chaque satellite D1, D2, D3 dont la position est connue émet des ondes se déplaçant à la vitesse de la lumière. Ces ondes sont reçues par notre récepteur GPS M. Le système GPS mesure le temps *t* mis par ces ondes pour parvenir jusqu'à M.

Ainsi grâce à la formule $D = \frac{c}{t}$, la distance entre chaque satellite et le récepteur GPS est connue.

Le recoupement des 3 distances D1, D2, D3 fournies par les 3 satellites 1, 2, 3 permet de déterminer avec exactitude la position M du récepteur GPS sur la Terre.

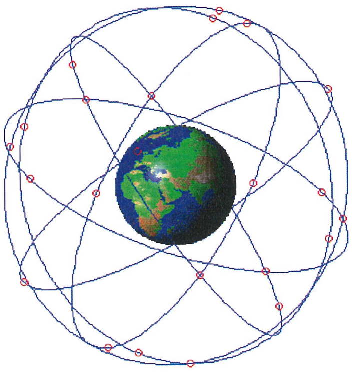
D'après la théorie de la relativité restreinte, la vitesse des satellites doit engendrer pour un observateur sur la Terre la dilatation du temps.

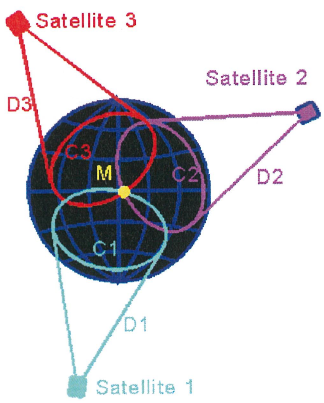
Calculons cette dilatation.

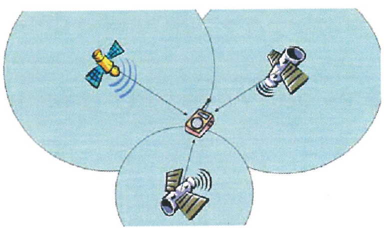
Le temps mesuré par l'horloge du récepteur M est de $t_e = 24$ h soit .... s.

Satellite GPS

Récepteur GPS







Le temps mesuré par l'horloge de l'émetteur satellite GPS est t_i.

Or $t_i = t_e\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

où v est la vitesse du .... soit .... m/s et c est la vitesse de .. .. et t_e est le temps mesuré par .... soit .... s.

On obtient :

$$t_i = \ldots\ldots\ldots \sqrt{1 - \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}} \approx \ldots\ldots\ldots$$

Vous venez de trouver t_i = 86 399,999 992 8 s. Nous avons maintenant tous les éléments pour calculer la dilatation

$t_e - t_i$ = ... − .... = ...

soit $t_e - t_i \approx$ .... µs.

Pour conclure, l'horloge du satellite retarde de .... microsecondes par jour par rapport à l'horloge du récepteur M.

Cet écart de temps qui nous semble négligeable ne l'est pas tant que cela pour la détermination de notre position.

Que se passe–t–il si l'on se trompe de 7,2 microsecondes par jour ?

Calculons l'erreur produite sur la distance si l'on ne tient pas compte de ces 7,2 microsecondes par jour.

Rappelons nous que $d = c.t$ où c est .... et vaut .... m/s, où t vaut .... s

Ainsi d = ...

L'erreur produite au bout de 1 journée est donc d'environ ....

Il est donc nécessaire de tenir compte de la dilatation du temps due à la vitesse du satellite GPS (13 946 km/h) si on ne veut pas que chaque jour l'erreur de positionnement augmente de 2 km environ. Pour la corriger il faut donc avancer l'horloge du satellite d'environ 7,2 microsecondes par jour.

D. La « preuve » par le muon

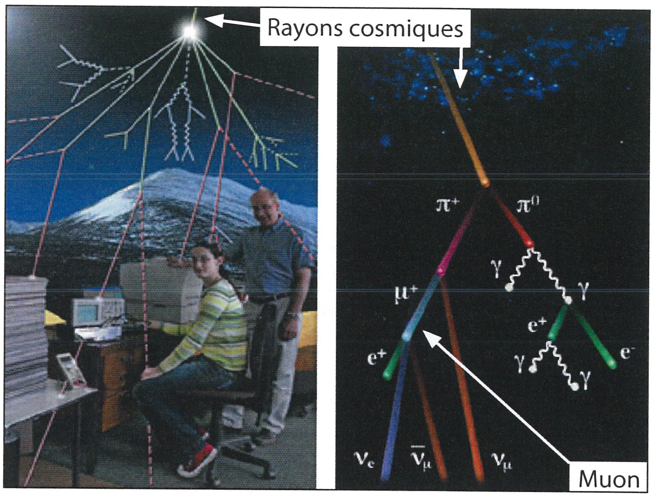
Vous connaissez la structure de l'atome : un noyau et des électrons, particules infiniment petites gravitant autour. Vous ne savez peut-être pas qu'il existe beaucoup d'autres particules infiniment petites telles que les muons.

Un muon est une particule instable ; elle ne vit que 2 µs. Elle est produite quand des atomes se percutent à des vitesses très grandes.

Les accélérateurs de particules permettent de provoquer des chocs entre les noyaux des atomes. Des muons sont émis, puis se désintègrent en d'autres particules. Le même phénomène se produit naturellement dans l'atmosphère. Les rayons cosmiques (flots de noyaux d'atomes provenant du Soleil ou d'autres étoiles) percutent à des vitesses proches de celle de la lumière, les atomes des molécules de l'air à environ 15 000 mètres d'altitude.

Des détecteurs nous permettent de constater que des muons atteignent la surface de la Terre alors qu'ils sont émis à environ 15 000 mètres d'altitude.

Les schémas ci-contre représentent les particules émises après les chocs entre les rayons cosmiques et les atomes des molécules d'air dont le muon émis à une vitesse poche de celle de la lumière.



Calculons la distance d parcourue par un muon pendant $t = 2 . 10^{-6}$ s à la vitesse $v = 299\,940\,000$ m/s en utilisant la relation classique $d = vt$.

$d =$ .... $=$ ....

$d \approx$ .... m (arrondir au m près)

Ce calcul montre que les muons produits dans la haute atmosphère ne devraient parcourir que .... mètres avant de se désintégrer.

Le calcul est-il cohérent avec le constat ? ....

Dans ce calcul, nous n'avons pas tenu compte du fait que les muons se déplacent à une vitesse proche de la vitesse de la lumière.

La théorie de la relativité restreinte permet d'effectuer un calcul cohérent avec l'observation.

La durée de vie d'un muon est de 2.10^{-6} s quand il est quasiment au repos ou avec une vitesse non relativiste pour un observateur extérieur. Mais rappelons nous que la formule de Lorentz prévoit une dilatation du temps pour l'observateur extérieur quand on atteint des vitesses relativistes c'est–à–dire proches de celle de la lumière.

Calculons, grâce à la formule de Lorentz, la durée de vie d'un muon t_e quand il se déplace par exemple à 299 940 000 m/s :

$$t_e = \frac{t_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$ où :

v est la vitesse du .... qui vaut .... m/s,

c est la vitesse de .... qui vaut .... m/s,

t_i est la durée de vie du muon au .... soit 2.10^{-6} s,

$t_e =$ ....

donc $t_e \approx$ .... $\times 10^{-6}$ secondes

Ainsi pour un observateur extérieur, la durée de vie d'un muon se déplaçant à 299 940 000 m/s est .... fois plus grande que la durée de vie d'un muon au repos.

Calculer maintenant la distance parcourue par un muon pendant 100×10^{-6} s à la vitesse de 299 940 000 m/s.

$v = \dfrac{d}{t}$ donc $d =$ .... = ...

Ainsi $d =$ .... m.

Donc certains muons produits dans la haute atmosphère à des vitesses relativistes peuvent parcourir plus de 15 000 m et atteindre la surface de la Terre.

La théorie de la relativité restreinte nous rend compte de ce phénomène.

Conclusion

Les formules de composition des vitesses, de dilatation du temps et de contraction des longueurs étaient connues avant Einstein. Le problème résidait dans leur interprétation.

Pour Einstein, les distances et le temps sont « élastiques » du point de vue de notre observation des phénomènes. C'est la théorie de la relativité restreinte. Ce modèle semble bien fonctionner et être accepté par la communauté scientifique. Il est résumé pour le grand public en « tout est relatif ». Le début du 20e siècle a remis en question la mécanique classique et a vu la naissance de la théorie de la relativité ; le 21e siècle verra–t–il la remise en question de la théorie de la relativité et l'élaboration d'une nouvelle mécanique ?

5.3.2. Document professeur

A. Composition des vitesses

1. Le cas des petites vitesses dites classiques

La vitesse du passager pour un observateur situé à l'extérieur du train est de 310 km/h (290 + 20).

2. Le cas des très grandes vitesses dites vitesses relativistes

Faisons comme si ce même train se déplaçait à 290 000 km/s avec un passager « particulièrement sportif » qui courrait dans le train à une vitesse de 20 000 km/s. En raisonnant comme précédemment, pour un observateur extérieur, ce passager aurait une vitesse de 310 000 km/s.

3. Formule de composition des vitesses

1er cas : v_{pt} = vitesse du passager par rapport au train = 20 km/h,
v_{ts} = vitesse du train par rapport au sol = 290 km/h,
c = vitesse de la lumière = 1 080 000 000 km/h,

$$v_{ps} = \frac{20 + 290}{1 + \dfrac{20 \times 290}{1\,080\,000\,000^2}} \approx 310.$$

Donc la vitesse du passager par rapport au sol est de *310* km/h.
On retrouve donc ici avec ces vitesses classiques le résultat intuitif : $v_{ps} = v_{pt} + v_{ts}$.

Les vitesses du train et du passager sont négligeables par rapport à la vitesse de la lumière.

2e cas : v_{pt} = vitesse du passager par rapport au train = 20 000 km/s,
v_{ts} = vitesse du train par rapport au Sol = 290 000 km/s,
c = vitesse de la lumière = 300 000 km/s,

$$v_{ps} = \frac{20\,000 + 290\,000}{1 + \dfrac{20\,000 \times 290\,000}{300\,000^2}} \approx 291\,232.$$

Donc la vitesse du passager par rapport au sol est de 291 232 km/s.
On ne retrouve pas l'égalité $v_{ps} = v_{pt} + v_{ts}$ car les vitesses du train et du passager ne sont pas négligeables par rapport à la vitesse de la lumière.

Cette partie pourra faire l'objet d'un travail sur les puissances de dix avec l'impact du rapport $\dfrac{20 \times 290}{(108 \text{ x } 10^7)^2}$ très petit devant 1 dans le premier cas et dans le second cas une valeur $6{,}44 \times 10^2$ non négligeable devant 1.

B. Relativité du temps et des distances

1. Contraction des longueurs

La longueur des 2 rames du train, mesurées lorsque le train est à l'arrêt, est de 40 m.

Lorsque ce train se déplace à la vitesse de 290 000 km/s, sa longueur pour l'observateur qui regarde le train passer est de 10 m. En effet $d_e = 40\sqrt{1 - \frac{290\,000^2}{300\,000^2}} \approx 10$ m.

2. Dilatation du temps

Le passager du train lit sur son chronomètre le temps mesuré à l'intérieur du train $t_i = 2$ heures.

Le temps t_e de l'observateur extérieur t_e est $t_e = \sqrt{\frac{t_i}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Puisque $v = 290\,000$ km/s,

C = 300 000 km/s et $t_i = 2$ heures, nous obtenons $t_e = \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{290\,000^2}{300\,000^2}}} \approx 8$ h.

Donc pour un observateur extérieur le film dure 8 heures environ.

3. Explication

Comment, pour un observateur extérieur, un train peut-il à la fois mesurer 40 m au repos et *10* m quand il roule à 290 000 km/s ?

Comment, pour un observateur extérieur, un film de 2 h peut-il durer *8* h dans un train se déplaçant à 290 000 km/s ?

Pour comprendre ces expériences de pensées qui ne sont pas intuitives, on peut les comparer à la représentation en perspective. À savoir, un objet très grand devient petit quand on le regarde de très loin.

Les réponses que l'on peut attendre des élèves sont par exemples :

Le diamètre de la Lune est d'environ 3 475 km d'après les encyclopédies. Il est d'environ 50 cm si l'on regarde la distance entre les 2 mains de l'homme et que l'on estime sa taille sur la plage. Il est d'environ 0,75 cm si l'on mesure le diamètre de la Lune sur la photo.

La conclusion orale que nous avons privilégiée dans nos classes est :

Toutes ces distances correspondent à une certaine réalité.

Tout dépend du point de vue et de l'endroit où l'on se place..., tout est « relatif ». À chacun sa réalité.

Si la Lune semble tenir dans les mains d'un homme, c'est qu'elle est suffisamment loin, pour qu'en perspective son diamètre apparent soit d'une taille vraiment petite. Nous sommes habitués à utiliser la perspective dans le domaine spatial. La relativité restreinte nous montre qu'il faut nous habituer à une « perspective » temporelle.

La trace écrite par nos élèves sur leurs fiches est par exemple :

Le train peut mesurer 40 m ou 10 m selon le point de vue de l'observateur, de même qu'un film peut durer 2 h ou 8 h selon l'état de mouvement de l'observateur... C'est toujours le même train et le même film mais selon l'état de mouvement de l'observateur, les mesures des distances et du temps peuvent varier.

Comme l'a dit Einstein : tout est relatif.

C. Relativité dans la vie quotidienne

1. Vitesses normales non relativistes

Un avion à réaction vole à Mach 2 c'est-à-dire à une vitesse de 2 448 km/h ou 680 m/s.

5 jours c'est $5 \times 24 \times 60 \times 60 = 432\,000$ secondes.

Au bout des 5 jours soit exactement 432 000 secondes, le contrôleur demande aux pilotes de stopper leur chronomètre.

$v = 680$ m/s, $c = 300\,000\,000$ m/s, $t_e = 432\,000$ s.

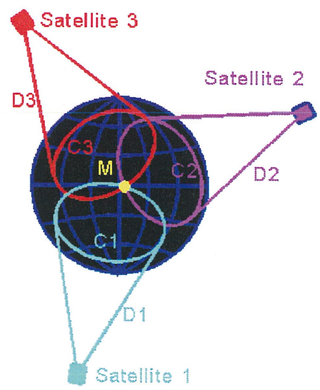
$$\text{Ainsi } t_i = t_e\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 432\,000\sqrt{1 - \frac{680^2}{300\,000\,000^2}} \text{ s.}$$

Le résultat est obtenu par les élèves à l'aide de leur calculatrice (il leur faut parfois recommencer les calculs et mettre les parenthèses au bon endroit). Nous leur faisons remarquer que le résultat trouvé est conforme à celui que l'on attend. Ainsi nous concluons que la théorie de la relativité n'est pas contradictoire avec la mécanique classique. Dans le cas où la théorie de la mécanique classique s'applique, il est inutile de compliquer les calculs. Nous insistons également sur le fait que cela est dû à la calculatrice qui n'a pas la précision suffisante pour mettre en évidence la différence entre les 2 chronomètres (le nombre de chiffres affichés après la virgule n'est pas suffisant pour observer la différence de temps entre les 2 chronomètres). Nous faisons refaire le calcul avec un instrument précis, par exemple la calculatrice scientifique du système d'exploitation de l'ordinateur. En affichant le résultat du calcul à 10^{-6} près, nous lisons 431 999, 999 999 soit $t_i = 431\,999{,}999\,999$s. Le temps mesuré dans l'avion est donc inférieur d'un millionième de seconde au temps mesuré par la tour de contrôle.

Donc, nous constatons qu'à des vitesses non relativistes, les effets de la contraction des distances et de la dilatation du temps ne sont pas mesurables avec les instruments usuels.

L'activité suivante a pour but de montrer que si des phénomènes ne sont pas mesurables, ne pas en tenir compte peut entraîner des erreurs grossières.

2. Le GPS (Global positioning system)



Reprenons uniquement le schéma représentatif du dispositif. Nous pouvons faire prendre conscience aux élèves de la nécessité des trois satellites.

Un seul satellite permet de se situer sur un cercle, deux nous situent à l'intersection de deux cercles : il n'y a que deux positions possibles. L'intersection de trois cercles est vide en général. C'est comme si le troisième satellite avait pour rôle de choisir entre deux points et de vérifier les calculs.

Calculons la dilatation du temps.

Le temps mesuré par l'horloge du récepteur M est $t_e = 24$ h soit 86 400 s.

Le temps mesuré par l'horloge de l'émetteur satellite GPS est t_i.

$$\text{Or } t_i = t_e\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \text{ où } v = 3\,874 \text{ m/s et } c = 300\,000\,000 \text{ m/s et } t_e = 86\,400 \text{ s.}$$

On obtient :

$$t_i = 86\,400\sqrt{1 - \frac{3\,874^2}{300\,000\,000^2}} \approx 86\,399{,}999\,992\,8 \text{ s.}$$

La dilatation $t_e - t_i \approx 86\,400 - 86\,399,999\,992\,8 = 0,000\,007\,2$ s.

Soit ≈ 7,2 micro secondes.

Conclusion : l'horloge du satellite retarde de *7,2* microsecondes par jour par rapport à l'horloge du récepteur M.

Nous pouvons conclure, comme précédemment que cet écart de temps qui est vraiment non perceptible à notre échelle peut être négligeable mais nous sensibilisons les élèves au fait qu'il faut se méfier des idées pré conçues. C'est l'objet de la question suivante.

Que se passe-t-il si l'on se trompe de 7,2 microsecondes par jour ?

Calculons l'erreur produite sur la distance *d* si l'on ne tient pas compte de ces 7,2 microsecondes par jour.

De la relation $d = c.t$, nous obtenons $d = 300\,000\,000 \times 0,000\,0072 = 2\,160$.

L'erreur produite au bout d'une journée est donc d'environ *2 160* m.

En conclusion de l'activité

La précision géographique attendue par un utilisateur de GPS étant en général supérieure à 2 km, il est donc nécessaire de tenir compte de la dilatation du temps due à la vitesse du satellite GPS (13 946 km/h) si on ne veut pas que chaque jour l'erreur de positionnement augmente de 2 km environ. Pour la corriger, il faut donc avancer l'horloge du satellite d'environ 7,2 microsecondes par jour.

Étonnant non ?

La gravitation (attraction exercée par la Terre) provoque elle aussi d'importantes variations dans notre perception de l'écoulement du temps.

Le satellite évoluant à 20 200 km d'altitude ne subit pas la même attraction que le récepteur M situé sur la Terre.

L'horloge du satellite GPS va cette fois avancer de 45,7 microsecondes par jour par rapport à l'horloge du récepteur M sous l'effet de la différence de gravité.

Si on combine les 2 effets qui influencent notre perception du temps (la vitesse et la gravité) il faut donc en réalité retarder l'horloge du satellite de 38,5 microseconde par jour (avance de 45,7 µs – retard de 7,2 µs) pour éviter les erreurs de positionnement GPS.

D. La « preuve » par le muon

Des détecteurs nous permettent de constater que des muons atteignent la surface de la Terre alors qu'ils sont émis à environ 15 000 mètres d'altitude.

Calculons la distance *d* parcourue par un muon pendant $t = 2.10^{-6}$ *s* à la vitesse $v = 299\,940\,000$ m/s en utilisant la relation classique $d = vt$.

$d = 299\,940\,000 \times 2.10^{-6} \approx 600$ m.

Ce calcul montre que les muons produits dans la haute atmosphère ne devraient parcourir que 600 mètres avant de se désintégrer. Ainsi le calcul est contradictoire avec l'observation des scientifiques. Nous n'avons pas tenu compte du fait que les muons se déplacent à une vitesse proche de la vitesse de la lumière. C'est la théorie de la relativité restreinte qui permet d'effectuer un calcul cohérent avec l'observation.

Utilisons à nouveau la relation $t_e = \dfrac{t_i}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ où v est la vitesse du muon soit 299 940 000 m/s,

c est la vitesse de la lumière et t_i est la durée de vie du muon au repos soit 2.10^{-6} s.

donc $t_e = \dfrac{2 \times 10^{-6}}{1 - \sqrt{\dfrac{299\,940\,000^2}{300\,000\,000^2}}} \approx 10^{-4} \approx 100 \times 10^{-6}$ secondes soit 10 micro secondes,

soit $t_e = 100 \times 10^{-v6}$ secondes.

Ainsi pour un observateur extérieur, la durée de vie d'un muon se déplaçant à 299 940 000 m/s est donc *50* fois plus grande que la durée de vie d'un muon au repos.

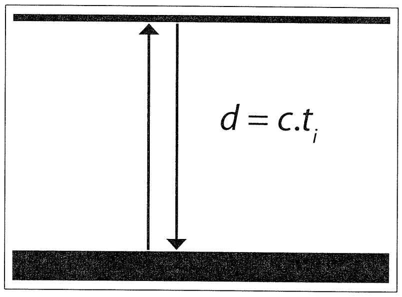
La distance parcourue par un muon pendant 100×10^{-6} s à la vitesse de 299 940 000 m/s est $d = vt$ soit $299\,940\,000 \times 100 \times 10^{-6} = 29\,994$.

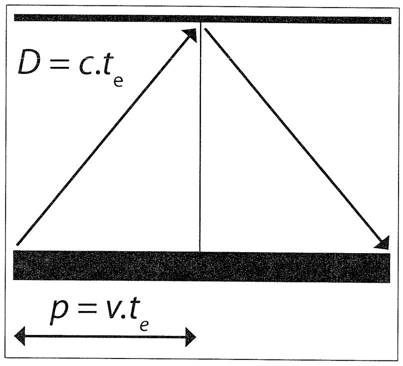
Ainsi $d = 29\,994\ m$.

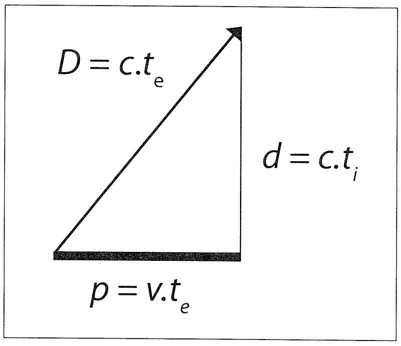
On peut donc détecter des muons à la surface de la Terre.

Annexe

Démontrons le résultat $t_e = \dfrac{t_i}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ à l'aide du théorème de Pythagore.







Imaginons dans un train roulant à une vitesse v un rayon lumineux partant du plancher et se réfléchissant sur un miroir au plafond.

Un observateur, à l'intérieur du train, mesure la distance d entre le sol et le plancher et constate que le rayon lumineux met le temps t_i pour effectuer cette distance.

Le rayon lumineux se déplaçant à la vitesse de la lumière c on a : $c = \dfrac{d}{t_i}$ ou $d = c.t_i$.

Un observateur extérieur verra la réflexion du rayon lumineux de la façon schématisée ci-dessous puisque le train se déplace à la vitesse v.

Pour l'observateur extérieur, la distance D parcourue par le rayon lumineux est supérieure à la distance d observée par l'observateur à l'intérieur du train.

L'observateur extérieur va mesurer le temps t_e que met le rayon lumineux pour parcourir la distance D.

La vitesse de la lumière étant constante, on obtient : $D = c.t_e$.

Le train se déplaçant à la vitesse v, la distance p parcourue par le train pendant que le rayon lumineux va du sol au plafond est donc égale à :

$p = v.t_e$

On obtient ainsi un triangle rectangle dans lequel on peut appliquer le théorème de Pythagore.

On a :

$D^2 = d^2 + p^2$

$(c.t_e)^2=(c.t_i)^2 + (v.t_e)^2$

$c^2.t_e{}^2= c^2.t_i{}^2 + v^2.t_e{}^2$

$$t_e{}^2 = \frac{t_i^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donc $t_e = \dfrac{t_i}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}}$

Bibliographie

Vincent R., *Nombre d'or et créativité*, édition Chalagam, Paris, 2001

Vigoureux J.-M., *Les pommes de Newton*, Albin Michel, Paris 2003, seconde édition

Hakenholte C., *Nombre d'or et mathématiques*, édition Chalagam, Paris, 2001

Chalavoux R., *Nombre d'or : nature et œuvre humaine*, édition Chalagam, Paris, 2001

Sciences et vie junior, Einstein, 100 ans de révolution, hors-série n° 59, Janvier 2005

Groupe d'histoire des mathématiques, *Une bibliographie du nombre d'or,* IREM de Toulouse, 2008

Ressources Internet

Site du rectorat de l'académie de Besançon
http://missiontice.ac-besancon.fr/lp_maths_sciences/

Site de l'université de St Andrews
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html

Site de la commission inter IREM « histoire et épistémologie des mathématiques »
http://www.univ-irem.fr/commissions/epistemologie/ressouces/ressources.htm

Presses universitaires de Franche-Comté
Université de Franche-Comté
Place Saint-Jacques - 25030 Besançon Cedex

Mise en page et couverture
Julie Gillet

Imprimé par DICOLOR
21121 Ahuy

Dépôt légal : 2e trimestre 2009
09-05-1168

Auteurs	Groupe LYCÉE PROFESSIONNEL Stéphane Bernard, Sylvie Brunner, Ludovic Degrandcourt	
Titre	**Culture scientifique en LP** Nombre d'or, relativité et autres divertissements scientifiques au lycée professionnel (LP)	
Langage	Français	

Caractéristiques de l'édition

Édition	Première édition
Éditeur	Presses universitaires de Franche-Comté
Diffuseur	IREM de Franche-Comté
Année	2009
Format	21 x 29,7 cm (A4) 82 pages recto verso support papier
Dépôt légal	2e trimestre 2009
ISBN	978-2-84867-257-1

Public — Formateurs et enseignants de mathématiques ou de sciences physiques du second degré.

Résumé — Cette brochure est écrite par des enseignants de lycée professionnel, animateurs à l'IREM de l'Université de Franche-Comté. Elle propose des séquences d'enseignement expérimentées dans des classes de lycée professionnel, présentées dans les documents élèves et analysées par les auteurs dans les documents professeurs. Les thèmes abordés (système solaire, calendriers, nombre d'or, vitesse du son, relativité restreinte) privilégient la démarche thématique préconisée par les instructions officielles. Les documents élèves sont directement exploitables par les enseignants qui trouveront dans les documents professeurs des pistes de réflexion et des compléments d'activité. Cette brochure sera également source d'activités originales en collège et en lycée.

Mots clés — Nombre d'or, planètes, système solaire, puissances de dix, proportionnalité, échelle, calendrier julien, calendrier grégorien, vitesse du son, vitesse de la lumière, lycée professionnel, mathématiques, physique, IREM, Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté.

Presses universitaires de Franche-Comté
http://presses-ufc.univ-fcomte.fr

Prix public : 12 euro

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
de l'Université de Franche-Comté

Département de Mathématiques - UFR Sciences et Techniques
16 route de Gray - 25030 BESANÇON Cedex - France

Tél. : 03 81 66 62 25 - Fax : 03 81 66 66 23
Courriel : iremfc@univ-fcomte.fr – http : //www-irem.univ-fcomte.fr/

Presses universitaires de Franche-Comté

UFC UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ