

# Du trinôme du second degré à la théorie de Galois

## Une croisière conceptuelle

Jean Merker

Présentation .....	7
Mode d'emploi .....	9
Chapitre I : Le trinôme du second degré.....	15
1. Les quatre opérations.....	15
2. Le trinôme du second degré.....	17
3. L'idée de l'équation générale .....	20
Chapitre II : Le calcul avec une indéterminée .....	27
1. L'addition et la multiplication des formes.....	27
2. L'algorithme de la division euclidienne .....	29
3. Propriétés arithmétiques des entiers ou des formes .....	31
Chapitre III : De l'égalité et de l'indiscernabilité.....	39
1. Théorie des ensembles ou langage des ensembles ? .....	39
2. Rapport fondamental entre les concepts d'égalité, de groupe, d'indiscernabilité .....	42
3. Groupe de Galois (absolu) d'un ensemble structuré .....	46
Chapitre IV : De nouveaux nombres .....	53
1. Les nombres entiers circulaires.....	53
2. Les polynômes circulaires .....	55
3. D'autres nombres "complexes" .....	57
4. Cas général : l'équation irréductible de degré $n$ .....	60
Chapitre V : Le concept de dimension .....	65
1. Un concept simple de dimension .....	65
2. L'espace des $n$ -uplets. Les espaces linéaires .....	67
3. Dimension d'un espace linéaire.....	71
Chapitre VI : On fait le point .....	79
1. Retour sur le corps des fractions rationnelles et le corps de rupture $K(\alpha)$ d'un polynôme $P$ .....	79

2. Combien de racines de $P$ sont dans un corps de rupture ?	
Définition du groupe de Galois relatif.....	81
Chapitre VII : Cap sur l'équation générale de degré $n$ .....	89
1. Groupe de Galois de l'équation $x^n - 1 = 0$ sur $\mathbb{Q}$ avec $n$ premier. Corps fixe .....	89
2. L'équation radicale $x^p - a = 0$ avec $p$ premier .....	93
3. Extensions successives. Adjonctions multiples .....	94
4. Groupe de Galois de l'équation générale de degré $n$ .....	98
Chapitre VIII : Un voyage imaginaire intergalactique.....	105
1. Questions d'objectivité et d'invariance .....	105
2. Embryon de la « correspondance de Galois ».....	109
Chapitre IX : La non-résolubilité .....	113
1 Structure du groupe symétrique $S_n$ .....	113
2. La démonstration proprement dite .....	117
Chapitre X : Fête d'adieu.....	129
Introduction .....	129
1. Le cas d'une équation quelconque.....	130
2. Résolution par une tour intérieure.....	135
3. Cas d'une tour extérieure : cas général.....	149
4. Le mot de la fin ou d'un nouveau départ .....	152
Chapitre XI : Le tout début de la théorie des groupes finis	
et des corps finis.....	161
I. Égalités relatives dans un groupe .....	161
II. Premières propriétés et exemples de groupes cycliques ...	169
III. Exemples de groupes résolubles.....	175
IV. Remarque finale sur les quotients .....	183
Notes .....	187
Annexes .....	195
Conclusion .....	215
Bibliographie .....	217