

Le mémoire de Gauss sur les surfaces courbes et la naissance de la géométrie différentielle intrinsèque

Groupe histoire des mathématiques : Claude Merker – Hombeline Languereau

Introduction	1
1 - Autour de Gauss	3
Éléments historiques situant le mémoire de Gauss	3
2 - Le contenu du mémoire.....	19
3 - Image sphérique et définition géométrique de la courbure d'une surface. Exemples de courbures de surfaces obtenues sans calcul, «purement géométriquement».....	21
Image sphérique et définition de Gauss de la courbure d'une surface.....	21
Quelques images sphériques obtenues par la seule géométrie	23
Le plan	23
Le cylindre	23
La sphère.....	24
Le tore.....	24
Le signe de la courbure. L'orientation de l'image sphérique	24
Le tore, suite	27
4 - L'élément de longueur ds^2	29
Distance sur la surface, Pythagore infinitésimal	29
Les trois représentations analytiques.....	29
Les coefficients E, F, G en coordonnées curvilignes.....	30
Signification géométrique de E, F, G	31
Quelques calculs de ds^2	31
1. Le plan.....	32
2. La sphère	32
3. La pseudo-sphère	32
4. Un cône.....	33
5. Une surface avec F non nul	33
Les préoccupations à l'époque de Gauss	33
5 - Isométries locales	35
Définition donnée à partir du cas du cylindre	35
Transformation de S dans S' , repérées en coordonnées locales.....	36
Définition d'une isométrie locale	36
Gauss s'intéresse aux propriétés conservées par les isométries	36

Cône et plan.....	37
Caténoïde et hélicoïde à pas carré.....	38
Recherche des équations paramétriques d'un ruban de Möbius fabriqué selon la recette traditionnelle	40
Pseudo-sphère sous la forme sensible que lui donne Beltrami, et sous la forme abstraite que lui donne Poincaré	42
Question qu'il est légitime de se poser.....	43
6- Le theorema egregium.....	45
Résumé très anachronique de ces quatre paragraphes-clé du mémoire de Gauss... ..	62
7 - Calcul intrinsèque des courbures (i.e. sans sortir de la surface)	67
1. Leplan.....	67
2. Le cône	68
3. Le cylindre.....	68
4. La sphère	68
5. La bande de Möbius donnée par ses équations classiques	69
6. L'hélicoïde à pas carré, et la caténoïde	69
7. Le tore sensible	70
8. Le tore plat.....	71
9. La pseudo-sphère de Beltrami, et le demi-plan de Poincaré.....	71
Conclusion.....	72
Conclusion par quels cheminements la constante de la géométrie non euclidienne s'est finalement avérée être la courbure gaussienne d'une surface	73
Les visages de la constante	73
Ce que Beltrami a apporté en 1868.....	76
Pourquoi on n'a pas trouvé avant	78
Les apports de Beltrami, l'originalité de ses idées.....	78
Bibliographie	81