

Les Publications de l'IREM de BESANÇON

Directrice de série ANNE-MARIE AEBISCHER

Culture scientifique en LP, Groupe Lycée Professionnel
ISBN 978-2-84867-257-1, 2009

Les fonctions en mathématiques et en sciences physiques
Groupe Mathématiques-Sciences physiques, ISBN 978-2-84867-228-1, 2008

Instruments géométriques à l'école élémentaire
Groupe Élémentaire, ISBN 978-2-84867-222-9, 2008

De la sphère au plan
Groupe Cartographie, Groupe Lycée, ISBN 978-2-84867-098-0, 2005

Parutions récentes dans la série DIDACTIQUES mathématiques

Servois ou la géométrie à l'école de l'artillerie
Anne-Marie Aebischer, Hombeline Languereau, ISBN 978-2-84867-299-1, 2010

Du trinôme du second degré à la théorie de Galois. Une croisière conceptuelle
Jean Merker, ISBN 978-2-84867-205-2, 2007

Le calcul mental, entre sens et technique
Denis Butlen, ISBN 978-2-84867-198-7, 2007

Autour de la modélisation en probabilités
Michel Henry, ISBN 978-2-84627-018-2, 2001

IREM de Franche-Comté

Le cube dans tous ses états

Activités de géométrie et d'analyse

Groupe LYCÉE

IREM de LYON
BIBLIOTHEQUE
Université Claude Bernard -LYON I
43, Bd du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE Cedex

Les auteurs

Françoise de Labachelorie, professeure agrégée de mathématiques au lycée Duhamel de Dole, est animatrice à l'Irem de Franche-Comté où elle est responsable du groupe « Liaison mathématiques-sciences physiques au lycée ». Elle participe également au groupe « Lycée ». Elle a participé à la commission inter-Irem « second cycle ».

Michel Magnenet, professeur agrégé de mathématiques honoraire, est animateur à l'Irem de Franche-Comté où il met ses disponibilités au service des groupes « Liaison mathématiques-sciences physiques au lycée », « Lycée » et « Rallye Mathématique de Franche-Comté ». Il a longtemps participé à la commission inter-Irem « second cycle ».

Daniel Parent est professeur agrégé de mathématiques. Après avoir été animateur à l'Irem de Franche-Comté et participé au groupe « Lycée » dont il a eu la responsabilité, il est actuellement proviseur adjoint au lycée Viette à Montbéliard.

Alain Parmentelat, professeur agrégé de mathématiques au lycée Hyacinthe Friant de Poligny, est animateur à l'Irem de Franche-Comté. Il participe au groupe « Lycée » dont il a la responsabilité, ainsi qu'au groupe « Rallye Mathématique de Franche-Comté ».

Philippe Speyer-Pays est professeur certifié de mathématiques au lycée Jean-Michel de Lons-le-Saunier. Il a été animateur à l'Irem de Franche-Comté et a participé au groupe « Lycée » dont il a eu la responsabilité.

Avec la participation de **Philippe Biétry** professeur certifié de mathématiques au lycée Pasteur de Besançon.

Les auteurs remercient chaleureusement :

- Jean-Pierre Raoult, professeur émérite des universités et Dominique Tournès, professeur à l'université de la Réunion pour leurs expertises constructives et attentives,
- Julie Gillet des Presses universitaires de Franche-Comté pour la valeur ajoutée de mise en page qu'elle a su apporter à cet ouvrage.

Action de l'IREM de Franche-Comté

avec le soutien financier

*de l'Université de Franche-Comté,
dans le cadre du plan quadriennal 2008-2011*

avec les moyens horaires

du rectorat de l'académie de Besançon,

de l'Université de Franche-Comté,

*des ministères de l'Éducation nationale et de l'Enseignement supérieur et de la Recherche,
(DGESCO).*

Sommaire

Introduction	9
Chapitre 1. Le cube en position α	11
1. Représentation en perspective cavalière du cube en position α	11
2. Lignes, surfaces de niveau et solides associés	11
1. Lignes de niveau	12
2. Surfaces de niveau	13
3. Solides associés	13
3. Fonctions associées	14
1. Longueur des lignes de niveau	14
2. Aire des surfaces de niveau	14
3. Volume des solides associés	14
Chapitre 2. Le cube en position β	15
1. Représentation en perspective cavalière du cube en position β	15
2. Lignes de niveau, surfaces de niveau et solides associés	16
1. Lignes de niveau	16
2. Surfaces de niveau	19
3. Solides associés	19
4. Complément : projection orthogonale d'une ligne de niveau	20
3. Fonctions associées	21
1. Longueur des lignes de niveau	21
2. Aire des surfaces de niveau	22
3. Volume des solides associés	25
4. Jauge	27
5. Étude mathématique de ψ	29
6. Remplissage	32

Chapitre 3. Le cube en position γ	37
1. Représentation en perspective cavalière du cube en position γ	37
1. Propriétés du cube utilisées dans ce paragraphe	37
2. Construction du cube en position γ	38
2. Lignes et surfaces de niveau	40
1. Lignes de niveau	40
2. Surfaces de niveau	43
3. Fonctions associées	44
1. Longueur des lignes de niveau	44
2. Aire des surfaces de niveau	45
3. Volume des solides associés	46
Chapitre 4. Activités commentées	53
1. Cube en position α : fonctions en géométrie de l'espace	53
2. De la position α à la position β	55
3. Cube en position β	56
Exercice 1 : Cuve à mazout	56
Exercice 2 : Courbe représentative d'une fonction	57
4. De la position α à la position γ	60
Annexe. Représentations en perspective cavalière	63
1. La perspective cavalière	63
1. Règles de dessin en perspective cavalière	63
2. Propriétés de la perspective cavalière	63
2. Variante de la position α	64
1. Analyse de la configuration dans le plan (Q)	65
2. Construction	65
3. Représentation du cube après rotation	67
3. Variante de la position γ	68
1. Une propriété du cube	68
2. Représentation en perspective cavalière du cube dans la position γ	69
4. De la position α à la position γ	70
Bibliographie	75

Introduction

Le groupe « Lycée » de l'IREM de Franche-Comté travaille depuis plusieurs années sur des problématiques issues de la géométrie permettant de créer des activités élèves dont la résolution fait appel à plusieurs parties du programme. Après la publication de la brochure *De la sphère au plan*, le groupe s'est orienté vers l'étude du cube, autre objet de l'espace. Objet apparemment élémentaire, le cube est source de questions mathématiques non triviales. La recherche des plus courts chemins sur le cube a déjà été détaillée dans la brochure *De la sphère au plan* comme activité liminaire à des études de cartographie.

La présente brochure étudie le cube dans trois positions particulières (voir représentations de la page suivante) :

- l'une des faces est horizontale (position α) ;
- deux arêtes opposées parallèles sont dans un même plan horizontal (position β) ;
- une grande diagonale est verticale (position γ).

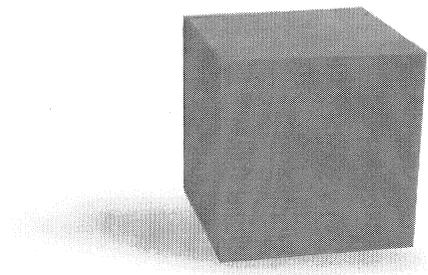
Le cube est ici perçu comme un objet creux limité à ses six faces transparentes qui peut ainsi contenir une certaine quantité de liquide. On étudie le remplissage de ce cube par un liquide coloré dans ces diverses situations. On s'intéresse, dans cette expérience, à la forme de la surface du liquide, à l'aire de cette surface et au volume de liquide utilisé lorsque le remplissage atteint une hauteur fixée. La visualisation de l'expérience utilise une représentation en perspective cavalière du cube. La résolution des problèmes posés nécessite des connaissances sur les configurations de l'espace et conduit à étudier des fonctions. Conformément aux programmes de lycée, l'étude de ces fonctions n'est pas ici une fin en soi. Les différentes fonctions étudiées apparaissent naturellement dans le cadre du problème physique et leur étude va permettre de répondre à des questions concrètes : problèmes d'optimisation, réalisation d'une jauge...

Les trois premiers chapitres de cette brochure sont respectivement consacrés à l'étude du cube dans les différentes positions définies ci-dessus. Ils sont structurés de la même façon : représentation en perspective cavalière du cube dans la position choisie, étude géométrique des lignes, surfaces de niveaux et solides associés puis étude des fonctions correspondantes. Le quatrième chapitre présente des activités expérimentées en classe de seconde, première et terminale. Un complément sur la perspective cavalière est proposé en annexe.

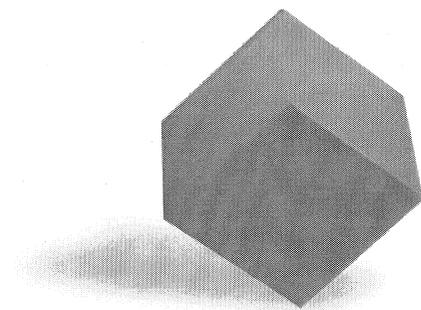
La variété des thèmes proposés permettra à l'enseignant d'organiser des travaux différenciés au sein de sa classe dès la classe de troisième. Les fonctions issues du problème physique étudié dans cette brochure sont intéressantes à étudier de la seconde à la terminale et permettent de déployer toute la palette des outils d'analyse aux programmes de ces classes.

Les différentes positions étudiées

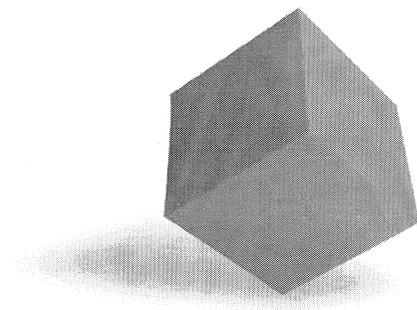
Position α (classique) : une des faces du cube est posée sur un plan horizontal, une autre est dans le plan frontal.



Position β : le cube est posé sur une arête contenue dans un plan horizontal et une diagonale de la face frontale est verticale.

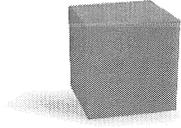


Position γ : une des diagonales du cube est verticale.



Chapitre 1

Le cube en position α



1. Représentation en perspective cavalière du cube en position α

Dans cette position, une des faces du cube est dans le plan horizontal. Le cube est dessiné en perspective cavalière. Nous avons choisi l'une des faces du cube comme plan frontal. Ainsi, les plans frontal et horizontal sont perpendiculaires et leur droite d'intersection est une des arêtes du cube. Dans toute la brochure, le réel positif a désigne la longueur de l'arête du cube.

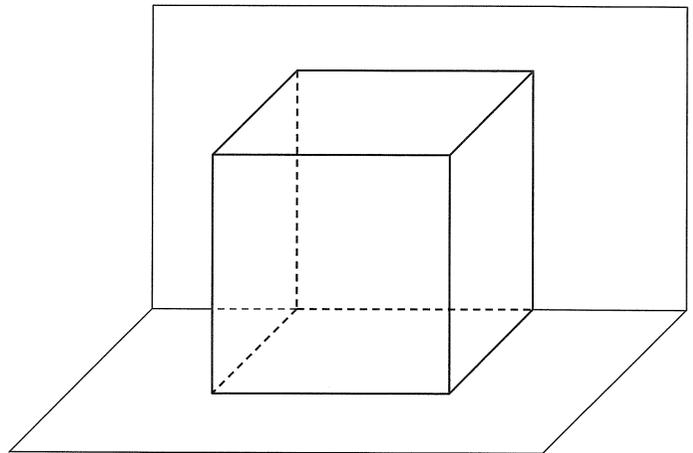


Figure 1 : Le cube en position α .

2. Lignes, surfaces de niveau et solides associés

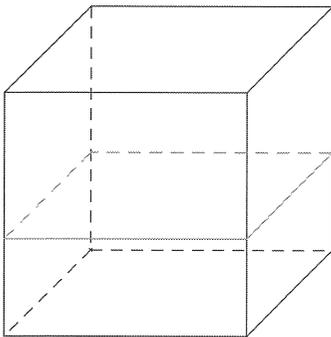


Figure 2 : Ligne de niveau.

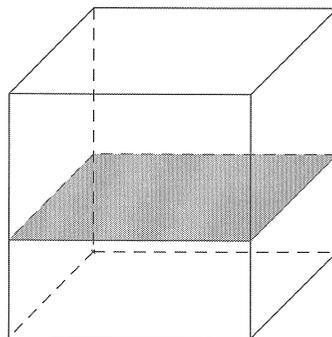


Figure 3 : Surface.

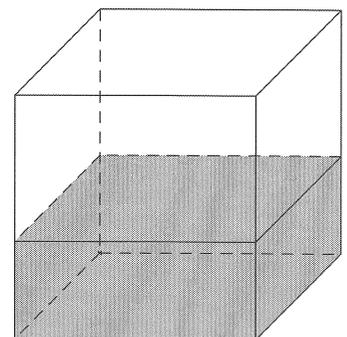


Figure 4 : Solide associé.

1. Lignes de niveau

Désignons par (Σ) la surface constituée des six carrés du cube creux. Π est le plan horizontal passant par A et P_h est le plan horizontal situé à la distance h du plan Π , situé dans le demi-espace de frontière Π contenant le cube. Les plans P_0 et Π sont confondus.

La ligne de niveau notée L_h est la section de (Σ) par le plan horizontal P_h .

On note L_h la ligne de niveau de cote h , h étant un réel de l'intervalle $[0 ; a]$.

Montrons que L_h est un carré.

Démonstration utilisant les propriétés d'incidence (programme actuel de Seconde¹)

Déterminer une ligne de niveau L_h , c'est déterminer l'intersection de (Σ) avec P_h , h étant un réel appartenant à l'intervalle $[0 ; a]$

Le plan P_h coupe les plans parallèles (ABCD) et (EFGH) suivant deux droites parallèles (IJ) et (KL). Le plan P_h coupe les plans parallèles (AEHD) et (BFGC) suivant deux droites parallèles (IL) et (JK). Par conséquent, IJKL est un *parallélogramme*.

Le plan (ABCD) coupe les plans parallèles (ABFE) et P_h suivant deux droites parallèles (AB) et (IJ).

Le plan (BFGC) coupe les plans parallèles (ABFE) et P_h suivant deux droites parallèles (BF) et (JK).

Les droites (AB) et (BF) étant perpendiculaires, il en est de même des droites (IJ) et (JK).

Ainsi, IJKL est un *rectangle*.

Les droites (AB) et (IJ) ainsi que les droites (AI) et (BJ) étant parallèles, ABJI est un parallélogramme, donc $AB = IJ$.

Les droites (BF) et (JK) ainsi que les droites (KF) et (BJ) étant parallèles, BFKJ est un parallélogramme, donc $JK = BF$.

Or $BF = AB$, on en déduit alors que $IJ = JK$.

En conclusion, IJKL est un *carré* dont le côté est l'arête de longueur a du cube.

Les lignes de niveau sont des carrés dont les côtés ont pour longueur a .

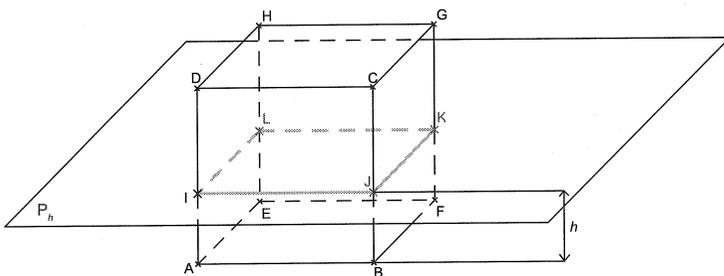


Figure 5 : Section du cube par un plan horizontal.

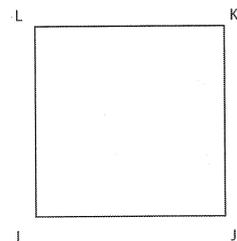


Figure 6 : Ligne de niveau en vraie grandeur.

¹ Utilisation d'une translation de l'espace permet une démonstration rapide et efficace.

2. Surfaces de niveau

Les surfaces de niveau considérées sont les sections du cube plein avec une famille de plans horizontaux. Dans le cas du remplissage du cube, la surface du liquide représente cette section.

Les surfaces de niveau sont des carrés pleins délimités par les lignes de niveau définies au paragraphe précédent.

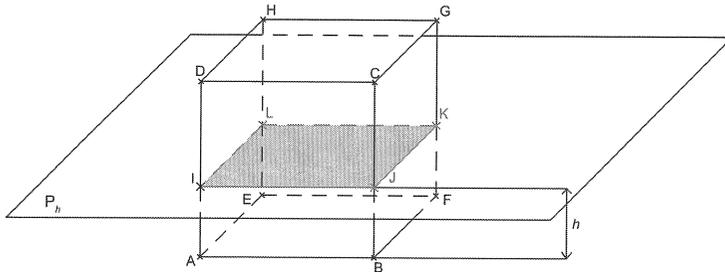


Figure 7 : Section du cube par un plan horizontal.

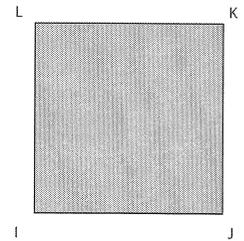


Figure 8 : Surface de niveau en vraie grandeur.

3. Solides associés

Supposons maintenant que l'on remplit le cube d'un liquide coloré jusqu'au plan P_h .

Le liquide coloré définit un parallélépipède rectangle (pavé droit) dont la section est la surface de niveau du paragraphe précédent et la hauteur le nombre h .

Le solide est un parallélépipède rectangle de base carrée de côté a et de hauteur h .

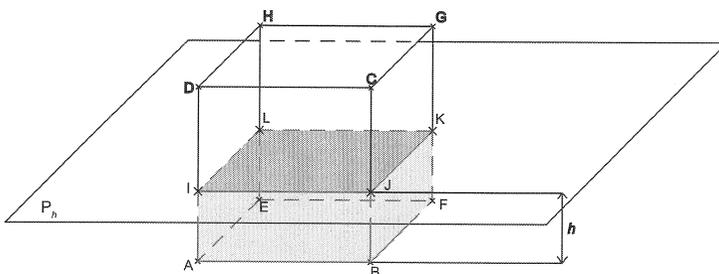


Figure 9 : Section du cube par un plan horizontal.

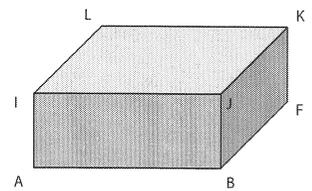


Figure 10 : Vue en perspective cavalière du solide obtenu.

3. Fonctions associées

Nous étudierons successivement les fonctions définies respectivement par la longueur des lignes de niveaux, l'aire des surfaces de niveaux et le volume de liquide contenu.

1. Longueur des lignes de niveau

La longueur des lignes de niveau L_h précédentes peut s'exprimer en fonction de la hauteur h de liquide contenu.

Notons \mathcal{L} la fonction qui, à tout réel h de l'intervalle $[0 ; a]$, associe la longueur de la ligne de niveau L_h .

Nous obtenons alors pour tout h de $[0 ; a]$:

$$\mathcal{L}(h) = 4a.$$

La fonction longueur est constante sur $[0 ; a]$.

2. Aire des surfaces de niveau

L'aire des surfaces de niveau peut s'exprimer en fonction de la hauteur h de liquide contenu.

Soit \mathcal{S} la fonction qui, à tout réel h de l'intervalle $[0 ; a]$, associe l'aire de la surface de niveau de cote h .

Nous obtenons, pour tout h de $[0 ; a]$:

$$\mathcal{S}(h) = a^2.$$

La fonction aire est constante sur $[0 ; a]$.

3. Volume des solides associés

Exprimons le volume des solides associés au remplissage du cube en fonction de la hauteur h de liquide contenu.

Notons φ la fonction, qui à tout réel h de l'intervalle $[0 ; a]$, associe le volume v contenu dans le cube. Il s'agit du volume d'un pavé droit de dimensions a et h .

Nous obtenons, pour tout h de $[0 ; a]$:

$$\varphi(h) = a^2h.$$

La fonction volume est linéaire sur $[0 ; a]$.

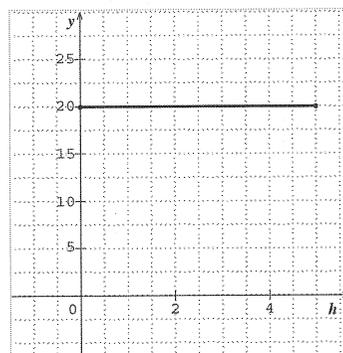


Figure 11 : Représentation graphique avec $a = 5$.

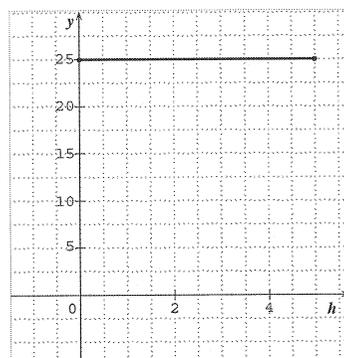


Figure 12 : Représentation graphique avec $a = 5$.

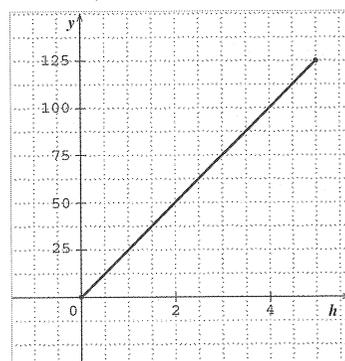
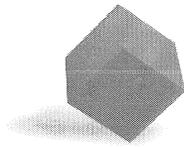


Figure 13 : Représentation graphique avec $a = 5$.



Chapitre 2

Le cube en position β

1. Représentation en perspective cavalière du cube en position β

Le plan frontal contient une face du cube dont une diagonale est verticale. Une représentation possible de ce cube, d'arête a est obtenue à partir de celle d'un parallélépipède rectangle dont la face située dans un plan frontal est un carré de côté $a\sqrt{2}$, les arêtes perpendiculaires à cette face étant de longueur a .

Ainsi, le pavé droit utilisé a pour dimensions a et $a\sqrt{2}$ (base), et $a\sqrt{2}$ (hauteur). Le cube ABCDEFGH a ses arêtes de longueur a . Les plans (AEGC) et (ABCD) sont verticaux. Le plan (BDHF) est horizontal.

Nous notons Π le plan horizontal contenant l'arête [CG].

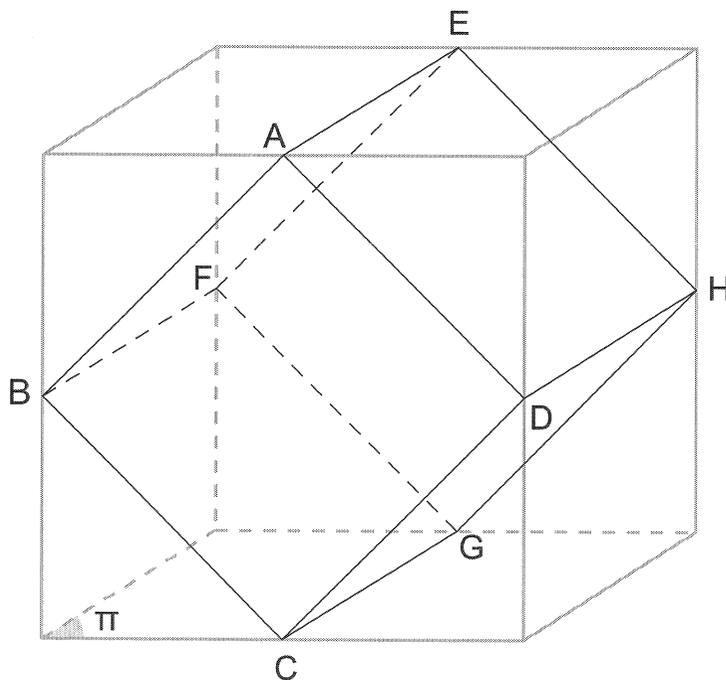


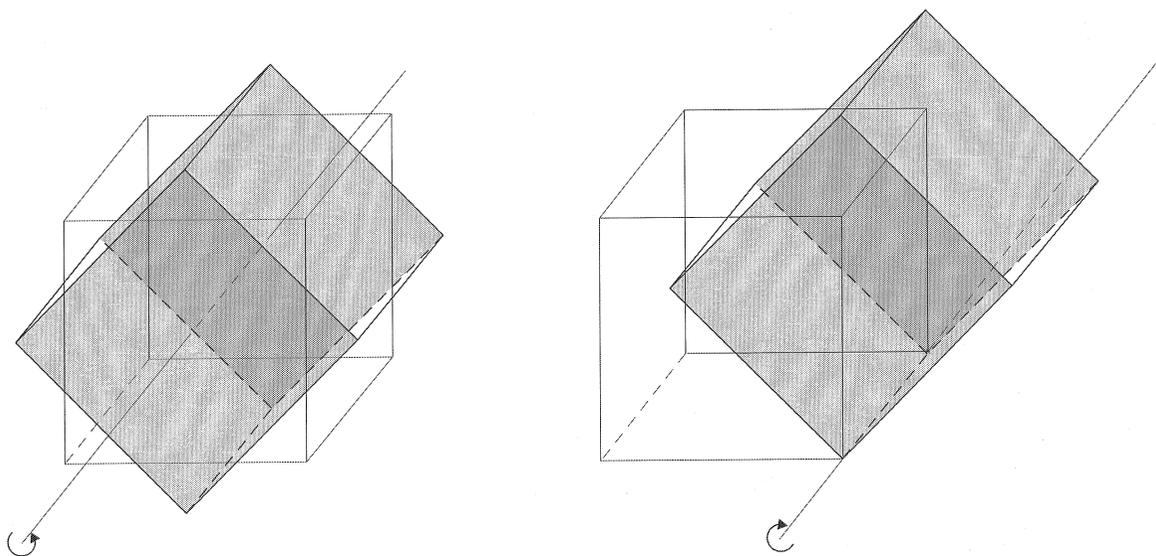
Figure 14 : Le cube β dans un pavé droit .

Remarque

Pour obtenir cette représentation, nous pouvons aussi utiliser une rotation de l'espace. Ainsi, le cube en position β est :

- image du cube en position α par une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour d'un axe joignant les centres de deux faces verticales opposées ;
- image du cube en position α par une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour d'un axe support d'une arête située dans un plan horizontal.

Dans l'annexe 2, nous proposons une représentation du cube obtenu après rotation.



Figures 15 et 16 : Le cube β obtenu par rotations d'un cube α .

2. Lignes de niveau, surfaces de niveau et solides associés

1. Lignes de niveau

Désignons par (Σ) la surface constituée des six carrés du cube creux. Π est le plan horizontal passant par G et P_h est le plan horizontal situé à la distance h du plan Π , situé dans le demi-espace de frontière Π contenant le cube. Les plans P_0 et Π sont confondus. La ligne de niveau notée L_h est la section de (Σ) par le plan horizontal P_h , h étant un réel de l'intervalle $[0 ; a\sqrt{2}]$. L_h est représentée en gras sur les figures ci-dessous.

- 1^{er} cas : si $h = 0$
alors $L_0 = [CG]$.

► 2^e cas : si $h \in]0; a\sqrt{2}[$
 alors $L_h = [IJ] \cup [JK] \cup [KL] \cup [LI]$.

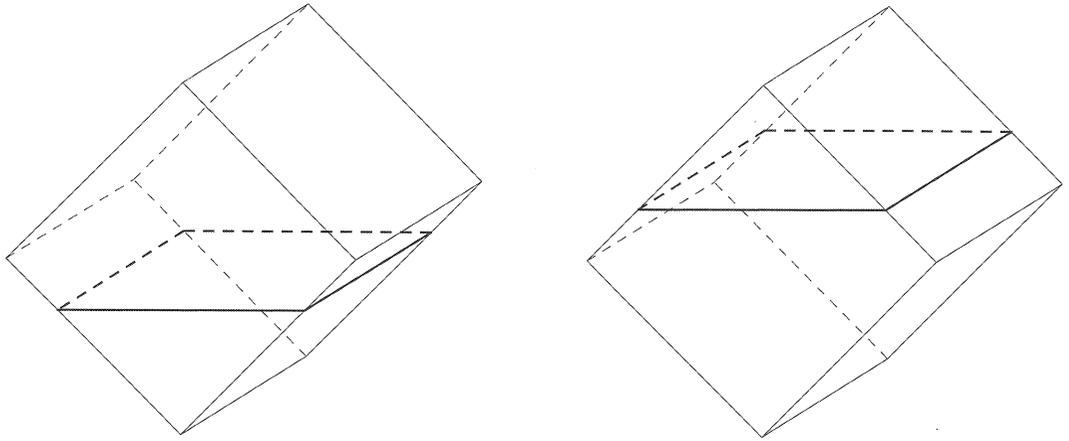


Figure 17 et 18 : Ligne de niveau dans le 2^e cas.

(BDHF) est un plan horizontal P_h et (BDHF) sont donc parallèles. Sachant que deux plans parallèles coupent un plan suivant deux droites parallèles, nous obtenons $(IJ) \parallel (BD)$ et $(LK) \parallel (FH)$.

De plus, $(BD) \parallel (FH)$. Il vient donc $(IJ) \parallel (LK)$. De même, nous obtenons $(IL) \parallel (BF)$ et $(JK) \parallel (DH)$. Comme de plus, $(BF) \parallel (DH)$. Il vient donc $(IL) \parallel (JK)$.

Ainsi, $(IJ) \parallel (LK)$ et $(IL) \parallel (JK)$. Le quadrilatère IJKL est alors un parallélogramme.

En outre, on a $(IJ) \parallel (BD)$, $(IL) \parallel (BF)$ et $(BD) \perp (BF)$ donc $(IJ) \perp (IL)$. Par conséquent, IJKL est un rectangle.

Dans le cas où $h \in]0; \frac{a\sqrt{2}}{2}]$, les dimensions de ce rectangle sont JK et IJ, de mesures respectives a et $2h$.

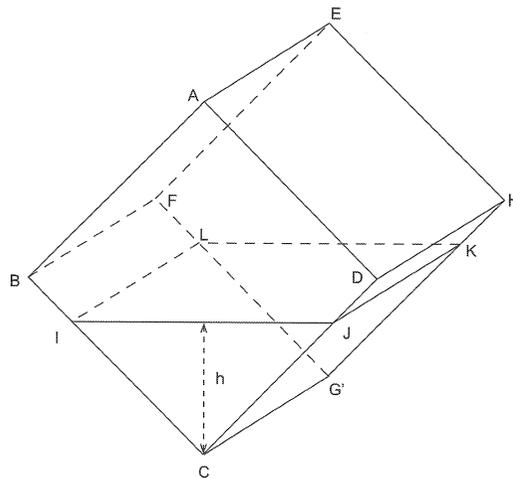


Figure 19 : L_h avec $h \in]0; \frac{a\sqrt{2}}{2}]$.

En effet, à l'aide des angles correspondants, on montre que le triangle ICJ est rectangle isocèle en C, de hauteur h et donc $IJ = 2h$. (On peut aussi exploiter le parallélisme de (IJ) et (BD) et appliquer le théorème de Thalès pour conclure.)

La ligne de niveau L_h est un rectangle de dimensions a et $2h$ lorsque $h \in]0 ; \frac{a\sqrt{2}}{2}]$.

Dans le cas où $h \in]\frac{a\sqrt{2}}{2} ; a\sqrt{2}[$, on montre de manière analogue que le triangle JAI est rectangle isocèle en A et que $IJ = 2a\sqrt{2} - 2h$.

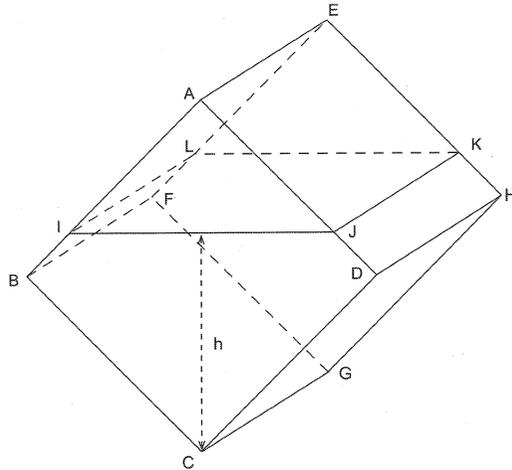


Figure 20 : L_h avec $h \in]\frac{a\sqrt{2}}{2} ; a\sqrt{2}[$.

La ligne de niveau L_h est un rectangle de dimensions a et $2a\sqrt{2} - 2h$ lorsque $h \in]\frac{a\sqrt{2}}{2} ; a\sqrt{2}[$.

► 3° cas : si $h = a\sqrt{2}$

alors $L_{a\sqrt{2}} = [AE]$.

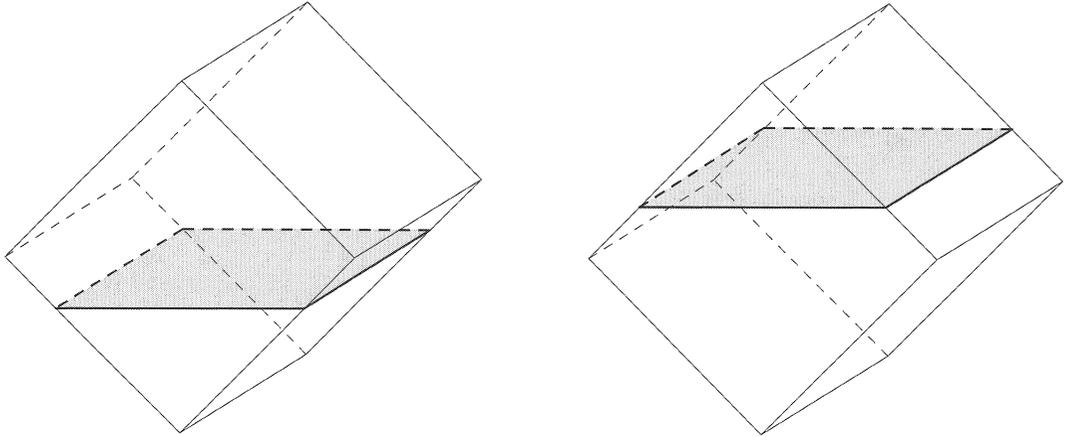
Cas particuliers

Pour $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $L_{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$ est le rectangle BDHF.

Pour $h = \frac{a}{2}$ et pour $h = a\sqrt{2} - \frac{a}{2}$, L_h est un carré de côté a .

2. Surfaces de niveau

Les surfaces de niveau considérées sont les sections du cube plein avec la famille de plans horizontaux. Elles sont délimitées par les lignes de niveau définies précédemment.



Figures 21 et 22 : Surfaces de niveau.

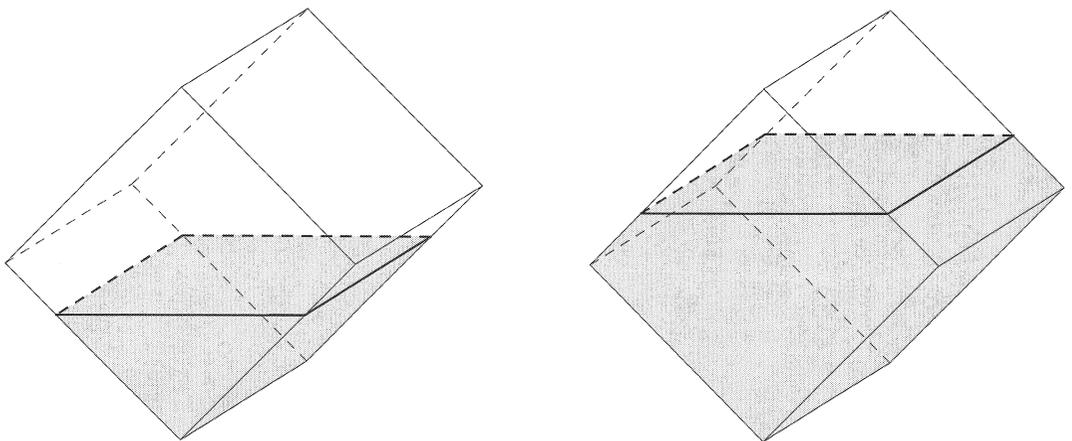
Les surfaces de niveau sont des rectangles pleins lorsque $h \in]0 ; a\sqrt{2}[$.

3. Solides associés

Supposons maintenant que l'on remplit le cube d'un liquide coloré jusqu'au plan P_h . Le liquide coloré définit un solide que l'on peut visualiser à l'aide des figures ci-dessous :

Lorsque $h \in]0 ; \frac{a\sqrt{2}}{2}]$, il s'agit d'un prisme de hauteur a et de base un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse $2h$.

Lorsque $h \in]\frac{a\sqrt{2}}{2} ; a\sqrt{2}[$, il s'agit d'un prisme à base pentagonale, ou du cube initial privé d'un prisme de hauteur a et de base un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse $2a\sqrt{2} - 2h$.



Figures 23 et 24 : Solides associés.

4. Complément : projection orthogonale d'une ligne de niveau

Soit p la projection orthogonale sur le plan Π .

$M' = p(M)$ si et seulement si $\begin{cases} M \text{ et } M' \text{ appartiennent à la droite passant par } M \text{ et orthogonale à } \Pi. \\ M' \text{ appartient à } \Pi. \end{cases}$

On a $p(A) = C$; $p(C) = C$; $p(G) = G$ et $p(E) = G$.

Notons $B', D', H', F', I', J', K', L'$ les projetés respectifs sur Π de B, D, H, F, I, J, K, L .

$BDHF$ est un rectangle de côtés a et $a\sqrt{2}$ et $B'D'H'F'$ est un rectangle isométrique à $BDHF$.

$IJKL$ étant un rectangle de côtés a et $2h$ ou a et $2a\sqrt{2} - 2h$ situé dans un plan horizontal, son projeté orthogonal sur le plan horizontal Π est un rectangle $I'J'K'L'$ qui lui est isométrique.

Remarquons que la représentation dans le plan Π nous donne ligne et surface de niveau en vraie grandeur.

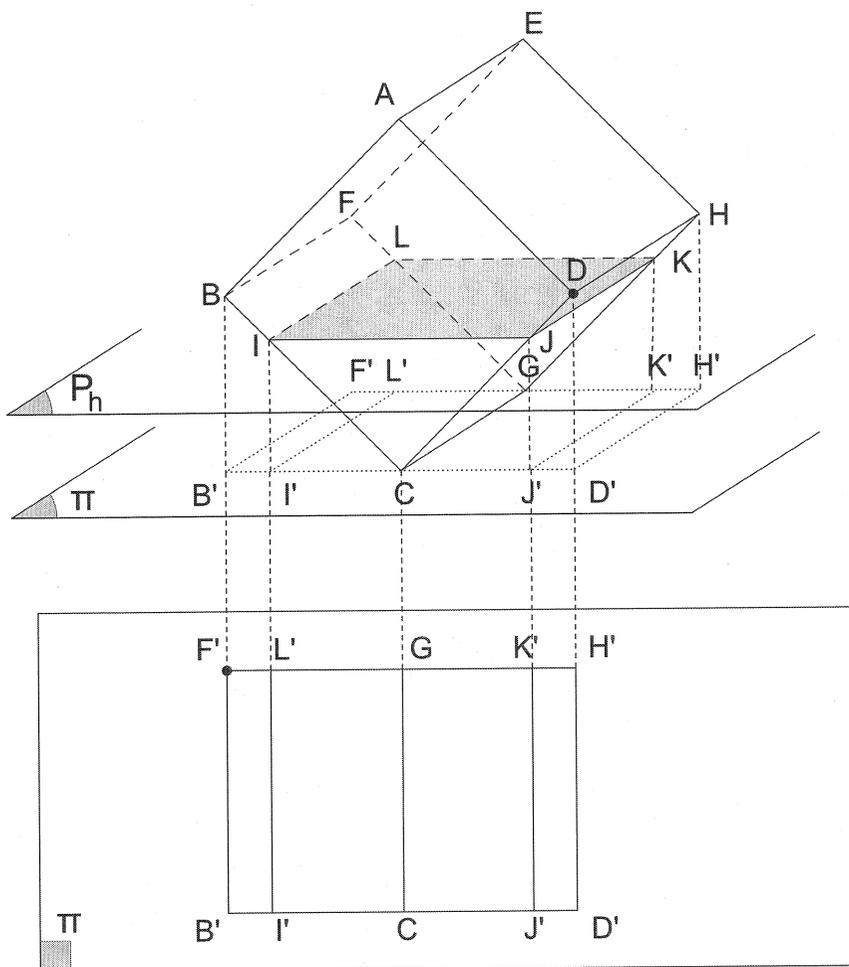


Figure 25 : Vue frontale du plan Π .

3. Fonctions associées

Étudions respectivement les fonctions définies par la longueur des lignes de niveau, l'aire des surfaces de niveau et le volume contenu lors du remplissage du cube en position β par un liquide coloré.

1. Longueur des lignes de niveau

La longueur de la ligne de niveau L_h est fonction de la hauteur h de liquide contenu. Soit \mathcal{L} la fonction qui à h associe la longueur de la ligne de niveau matérialisée sur le cube. Cherchons son expression.

► 1^{er} cas : $h = 0$ ou $h = a\sqrt{2}$

Les lignes de niveaux correspondantes sont réduites chacune à un segment de longueur a .

$$\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(a\sqrt{2}) = a$$

► 2^e cas : $h \in]0; \frac{a\sqrt{2}}{2}]$

La ligne de niveau L_h est un rectangle de dimensions a et $2h$.

Par conséquent, pour tout $h \in]0; \frac{a\sqrt{2}}{2}]$

$$\mathcal{L}(h) = 4h + 2a$$

En particulier, $\mathcal{L}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = 2(1 + \sqrt{2})a$.

► 3^e cas : $h \in [\frac{a\sqrt{2}}{2}; a\sqrt{2}[$

La ligne de niveau L_h est un rectangle de dimensions a et $2a\sqrt{2} - 2h$.

Par conséquent, pour tout $h \in [\frac{a\sqrt{2}}{2}; a\sqrt{2}[$

$$\mathcal{L}(h) = 4(a\sqrt{2} - h) + 2a$$

Nous retrouvons bien $\mathcal{L}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = 2(1 + \sqrt{2})a$.

Remarque 1

La fonction \mathcal{L} admet son maximum lorsque $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. La ligne de niveau associée est alors le rectangle BDHF.

Remarque 2

La fonction \mathcal{L} est continue sur $]0 ; a\sqrt{2}[$, mais elle n'est continue ni en 0, ni en $a\sqrt{2}$.

Nous avons volontairement parlé de longueur et non de périmètre de la ligne de niveau. En effet, la notion de périmètre peut avoir différentes interprétations dans le cas d'un segment.

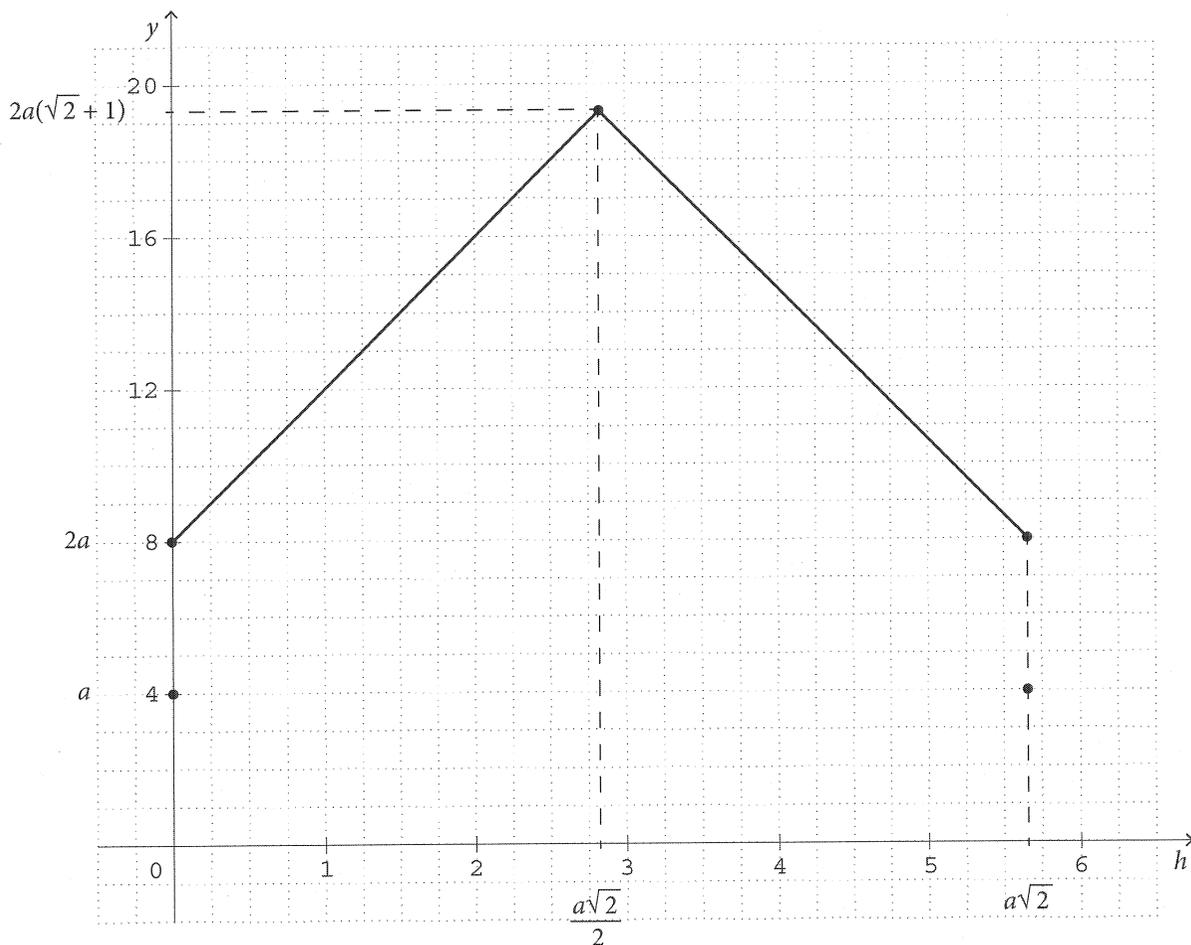


Figure 26 : Représentation graphique en repère orthogonal de la fonction \mathcal{L} sur $[0 ; a\sqrt{2}]$ lorsque $a = 4$

2. Aire des surfaces de niveau

L'aire des surfaces de niveau est fonction de la hauteur de liquide contenu. Notons \mathcal{S} la fonction qui, à la hauteur de liquide h , associe l'aire de la surface de niveau matérialisée sur le cube. Cherchons son expression.

► 1^{er} cas : $h = 0$ ou $h = a\sqrt{2}$

Les surfaces de niveau correspondantes sont réduites chacune à un segment de longueur a .

$$\mathcal{S}(0) = 0 \text{ et } \mathcal{S}(a\sqrt{2}) = 0.$$

► 2^e cas : $h \in]0; \frac{a\sqrt{2}}{2}]$

Les surfaces de niveau sont des rectangles « pleins » dont deux côtés consécutifs ont pour mesures respectives a et $2h$.

Par conséquent, lorsque $h \in]0; \frac{a\sqrt{2}}{2}]$,

$$\mathcal{S}(h) = 2ah.$$

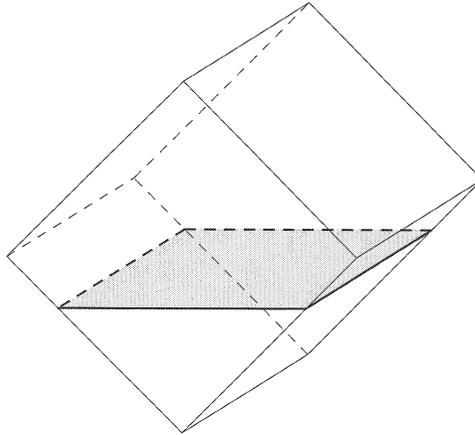


Figure 27 : 2^e cas.

► 3^e cas : $h \in [\frac{a\sqrt{2}}{2}; a\sqrt{2}[$

Les surfaces de niveau sont des rectangles « pleins » dont deux côtés consécutifs ont pour mesures respectives a et $2(a\sqrt{2} - h)$.

Par conséquent, lorsque $h \in [\frac{a\sqrt{2}}{2}; a\sqrt{2}[$,

$$\mathcal{S}(h) = 2a(a\sqrt{2} - h).$$

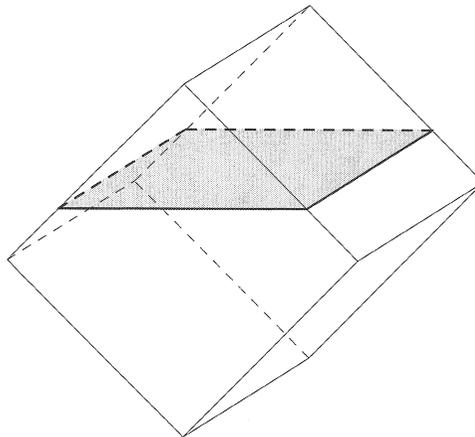


Figure 28 : 3^e cas.

Remarque

Les deux expressions de $\mathcal{S}(h)$ fournissent $\mathcal{S}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = a^2\sqrt{2}$

En résumé, la fonction \mathcal{S} est affine par intervalles et continue sur l'intervalle $[0 ; a\sqrt{2}]$.

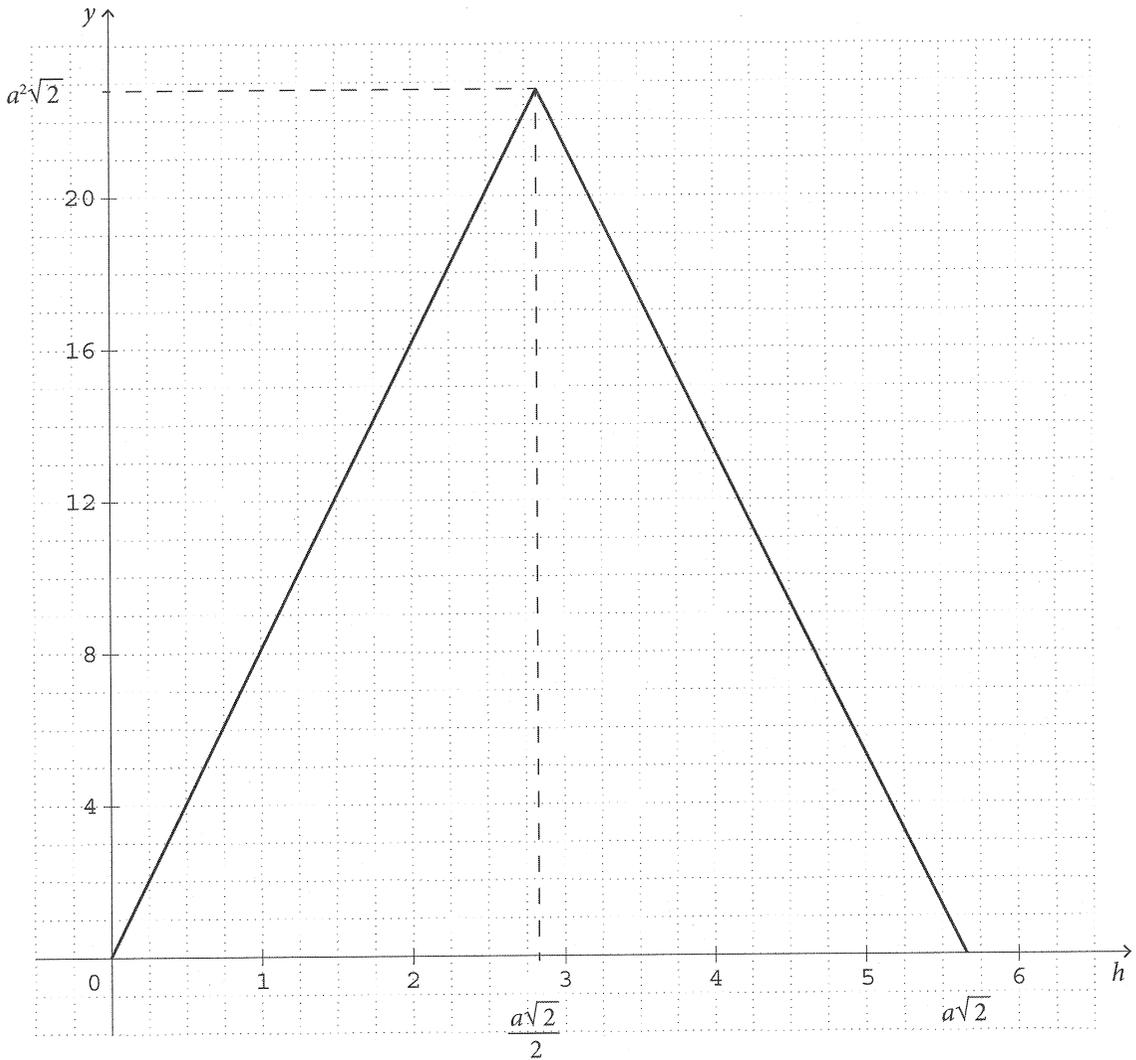


Figure 29 : Représentation graphique en repère orthogonal de la fonction \mathcal{S} sur $[0 ; a\sqrt{2}]$ lorsque $a = 4$.

3. Volume des solides associés

Notons φ la fonction définie sur $[0 ; a\sqrt{2}]$ qui à h associe le volume v de liquide coloré contenu dans le cube. Nous avons bien sûr $\varphi(0) = 0$ (pour le cube vide) et $\varphi(a\sqrt{2}) = a^3$ (pour le cube plein).

Distinguons deux cas.

► 1^{er} cas : $h \in] 0 ; \frac{a\sqrt{2}}{2}]$

Le liquide remplit un prisme de hauteur et de base un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse mesure $2h$.

Ainsi, $\varphi(h) = \frac{1}{2}h \times 2h \times a$.

Par conséquent, pour tout $h \in] 0 ; \frac{a\sqrt{2}}{2}]$, $\varphi(h) = ah^2$

En particulier, on obtient $\varphi(\frac{a\sqrt{2}}{2}) = \frac{a^3}{2}$ (cube à moitié plein).

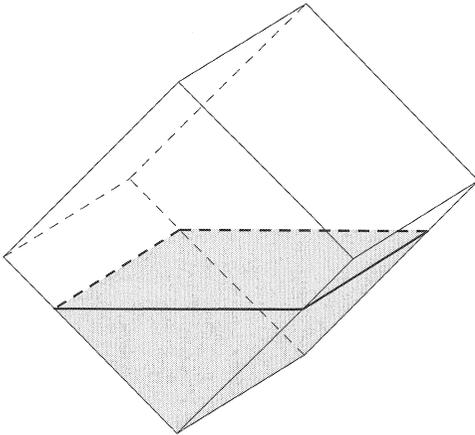


Figure 30 : 1^{er} cas.

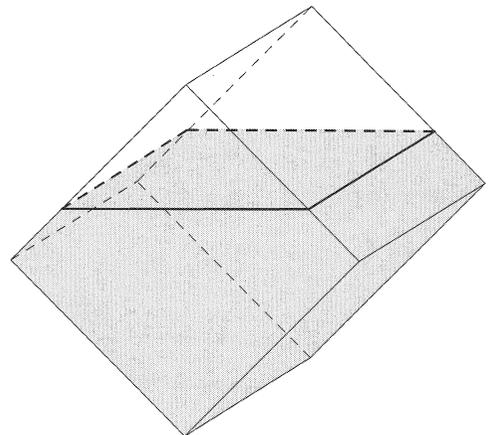


Figure 31 : 2^e cas.

► 2^e cas : $h \in [\frac{a\sqrt{2}}{2} ; a\sqrt{2} [$

La partie non remplie du cube détermine un prisme de hauteur a et de base un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse mesure $a\sqrt{2} - h$. Le volume de ce prisme est $a(a\sqrt{2} - h)^2$.

Donc, par complémentarité, on obtient $\varphi(h) = a^3 - a(a\sqrt{2} - h)^2$.

Par conséquent, pour tout $h \in [\frac{a\sqrt{2}}{2} ; a\sqrt{2} [$, on obtient : $\varphi(h) = a^3 - a(a\sqrt{2} - h)^2$.

On retrouve $\varphi(\frac{a\sqrt{2}}{2}) = \frac{a^3}{2}$.

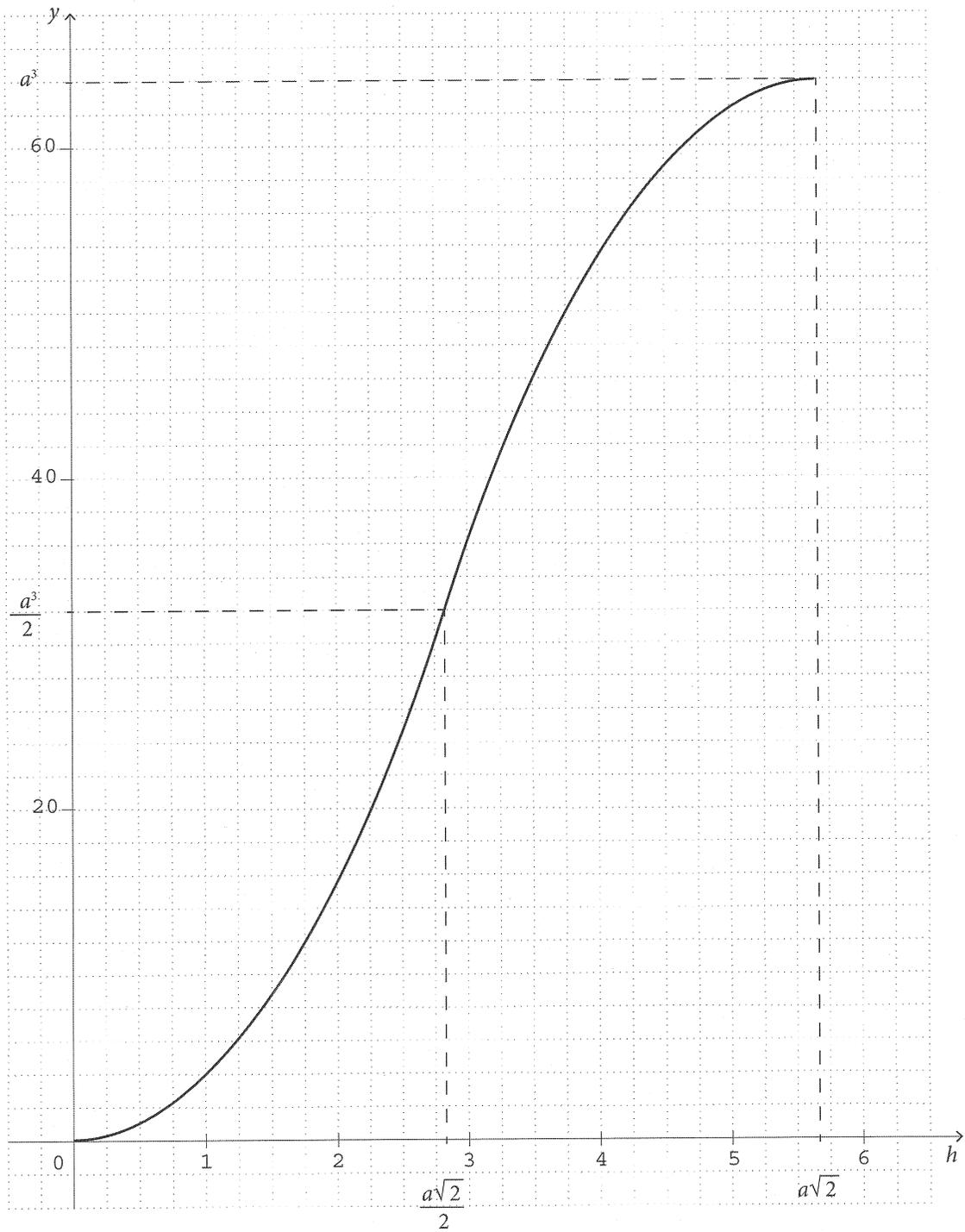


Figure 29 : Représentation graphique en repère orthogonal de la fonction φ lorsque $a = 4$.

Remarque

φ est une fonction polynôme de degré 2 par intervalles. φ réalise une bijection continue, strictement croissante de $[0 ; a\sqrt{2}]$ sur $[0 ; a^3]$.

Nous pouvons montrer, pour tout h de $[0 ; a\sqrt{2}]$, l'égalité $\varphi(a\sqrt{2} - h) + \varphi(h) = a^3$. Ainsi, les deux arcs de parabole constituant la représentation graphique de φ sont symétriques par rapport au point de coordonnées $(\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a^3}{2})$.

4. Jauge

Une jauge est un dispositif destiné à indiquer la quantité de liquide stocké dans un réservoir. La réalisation d'une jauge sur la face frontale du cube peut se faire à l'aide du graphique ci-contre, représentant la fonction φ associant le volume à la hauteur de liquide sur la face frontale.

Pour obtenir une graduation de la jauge, utilisons la fonction réciproque de la fonction φ . Notons ψ cette fonction définie sur $[0 ; a^3]$ qui, au volume v , associe la hauteur h correspondante.

► 1^{er} cas : $v \in [0 ; a^3]$

Pour un volume v appartenant à cet intervalle, nous avons obtenu $v = \varphi(h) = ah^2$.

Soit $h^2 = \frac{v}{a}$. Puisque h désigne un réel positif ou nul, nous avons donc $h = \sqrt{\frac{v}{a}}$.

Ainsi, pour tout réel $v \in [0 ; \frac{a^3}{2}]$, $\psi(v) = \sqrt{\frac{v}{a}}$

On obtient en particulier $\psi(0) = 0$ (hauteur du liquide lorsque le cube est vide) et $\psi(\frac{a^3}{2}) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (hauteur du liquide lorsque le cube est à moitié plein).

► 2^e cas : $v \in [\frac{a^3}{2}; a^3]$

Nous avons obtenu $v = \varphi(h) = a^3 - a(a\sqrt{2} - h)^2$ d'où $(a\sqrt{2} - h)^2 = \frac{a^3 - v}{a}$.

Notons que $0 \leq h \leq a\sqrt{2}$, par suite $a\sqrt{2} - h \geq 0$.

Par conséquent, $a\sqrt{2} - h = \sqrt{\frac{a^3 - v}{a}}$, par suite $h = a\sqrt{2} - \sqrt{\frac{a^3 - v}{a}}$. Ainsi, pour tout réel $v \in [\frac{a^3}{2}; a^3]$,

$$\psi(v) = a\sqrt{2} - \sqrt{\frac{a^3 - v}{a}}.$$

Nous retrouvons $\psi(\frac{a^3}{2}) = a\sqrt{2} - \sqrt{\frac{a^3 - \frac{a^3}{2}}{a}} = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ comme dans le premier cas.

Enfin, $\psi(a^3) = a\sqrt{2}$ (hauteur du liquide lorsque le cube est plein).

Nous pouvons montrer, pour tout h de $[0 ; a^3]$, l'égalité $\psi(a^3 - h) + \psi(h) = a\sqrt{2}$. La représentation graphique de ψ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(\frac{a^3}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2})$.

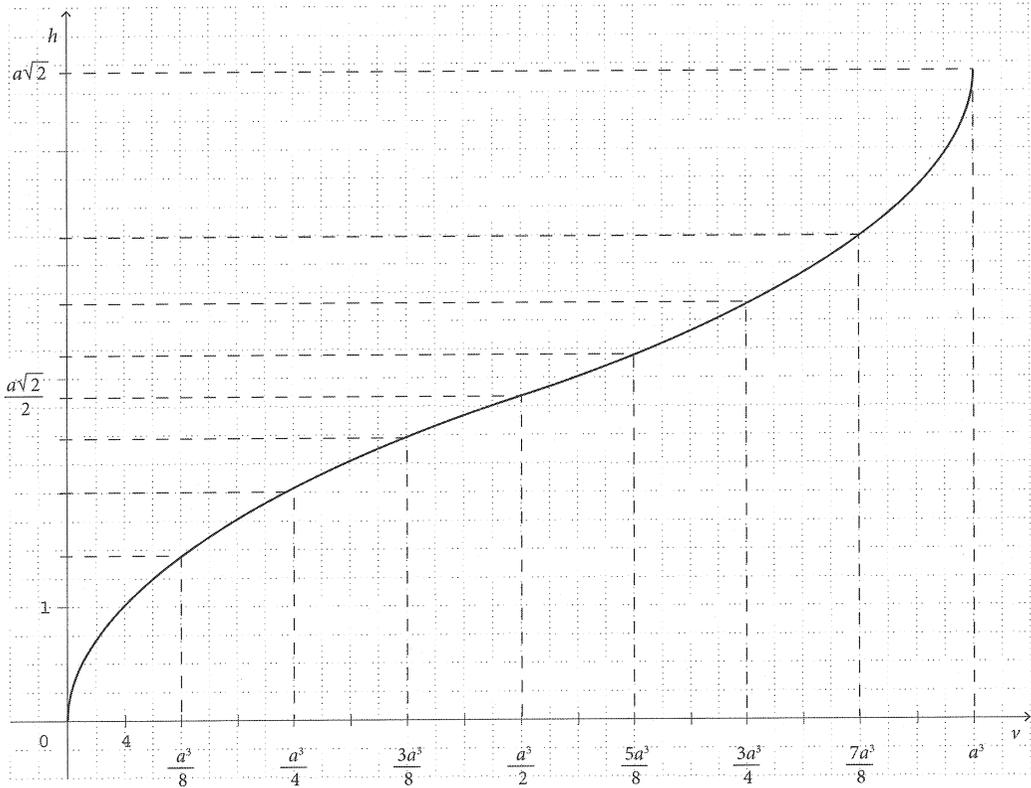


Figure 33 : Représentation graphique en repère orthogonal de la fonction ψ lorsque $a = 4$.

En pratique, nous obtenons sur l'axe des ordonnées une jauge de la diagonale de la face frontale, graduée ici en huitièmes de volume total du cube.

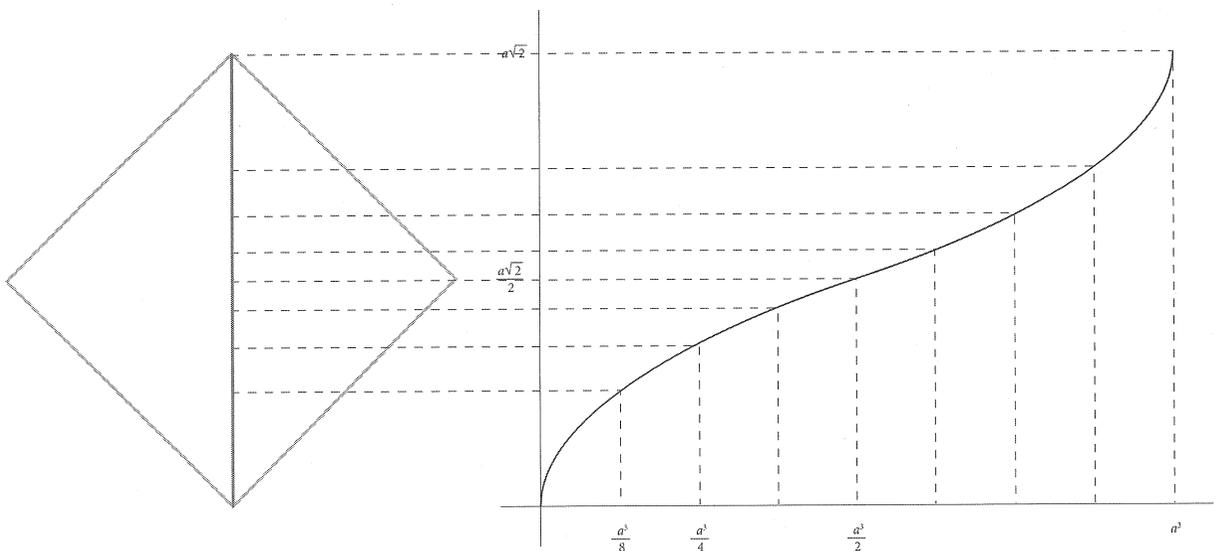


Figure 34 : Réalisation pratique de la jauge.

5. Étude mathématique de ψ

► Étude de la dérivabilité de ψ

Cette étude est réalisée avec les outils disponibles dans les programmes de lycée¹. φ réalise une bijection continue, strictement croissante de $[0 ; a\sqrt{2}]$ sur $[0 ; a^3]$, sa bijection réciproque ψ est alors strictement croissante sur $[0 ; a^3]$. Effectuons une étude locale complète aux points d'abscisse $0, \frac{a^3}{2}, a^3$, soit au début, au milieu et à la fin du remplissage.

Pour tout réel $v \in [0 ; \frac{a^3}{2}]$, $\psi(v) = \sqrt{\frac{v}{a}}$. ψ est alors dérivable sur $]0 ; \frac{a^3}{2}[$ et $\psi'(v) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{av}}$.

Pour tout réel $v \in [\frac{a^3}{2} ; a^3]$, $\psi(v) = a\sqrt{2} - \sqrt{\frac{a^3 - v}{a}}$. ψ est alors dérivable sur $] \frac{a^3}{2} ; a^3[$ et $\psi'(v) = \frac{1}{2\sqrt{a^4 - av}}$.

Étudions la dérivabilité à droite de ψ en 0.

Le taux d'accroissement s'écrit $\frac{\psi(v) - \psi(0)}{v} = \frac{1}{\sqrt{av}}$ et donc $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\psi(v) - \psi(0)}{v} = +\infty$

On en déduit que ψ n'est pas dérivable à droite en 0.

Étudions la dérivabilité à gauche de ψ en $\frac{a^3}{2}$.

Le taux d'accroissement s'écrit $\frac{\psi(v) - \psi(\frac{a^3}{2})}{v - \frac{a^3}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{v}{a}} - a \frac{\sqrt{2}}{2}}{v - \frac{a^3}{2}}$

soit après calcul $\frac{\psi(v) - \psi(\frac{a^3}{2})}{v - \frac{a^3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{v}{a}} + a \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

On en déduit enfin : $\lim_{v \rightarrow \frac{a^3}{2}} \frac{\psi(v) - \psi(\frac{a^3}{2})}{v - \frac{a^3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}a^2}$.

ψ est dérivable à gauche en $\frac{a^3}{2}$ et $\psi'_g(\frac{a^3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}a^2}$.

Par symétrie de la représentation graphique de la fonction ψ , nous en déduisons que

ψ est dérivable à droite en $\frac{a^3}{2}$ et $\psi'_d(\frac{a^3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}a^2}$.

¹ Le théorème de prolongement de la dérivée permet de conclure sans utiliser les taux d'accroissement.

La fonction ψ est donc dérivable en $\frac{a^3}{2}$ puisqu'elle est dérivable à gauche et à droite en ce point et que ses nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux.

$$\text{On a } \psi'\left(\frac{a^3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}a^2}.$$

Toujours par symétrie, la non dérivabilité à droite de ψ en 0 implique la non dérivabilité à gauche de ψ en a^3 .

Enfin, les fonctions en jeu étant dérivables sur $]0 ; a^3[$, nous pouvons "dériver l'égalité" $\psi(a^3 - v) + \psi(v) = a\sqrt{2}$ et prouver ainsi l'égalité $\psi'(a^3 - v) = \psi'(v)$ pour tout v de $]0 ; a^3[$.

Ceci nous prouve que, dans un repère orthogonal, la droite d'équation $v = \frac{a^3}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de ψ .

En résumé, la fonction est définie continue sur l'intervalle $[0 ; a^3]$ et dérivable sur l'intervalle $]0 ; a^3[$ (elle n'est dérivable ni en 0, ni en a^3).

► Étude de la dérivabilité de ψ'

Rappelons que ψ est dérivable sur $]0 ; \frac{a^3}{2}[$ et $\psi'(v) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{av}}$.

ψ' est alors dérivable sur $]0 ; \frac{a^3}{2}[$ et $\psi''(v) = \frac{1}{2} \frac{-\frac{1}{av^2}}{2\sqrt{\frac{1}{av}}}$ soit $\psi''(v) = -\frac{1}{4v\sqrt{av}}$.

ψ'' est strictement négative sur $]0 ; \frac{a^3}{2}[$.

Rappelons que ψ est dérivable sur $]\frac{a^3}{2} ; a^3[$ et $\psi'(v) = \frac{1}{2\sqrt{a^4 - av}}$.

ψ' est alors dérivable sur $]\frac{a^3}{2} ; a^3[$ et $\psi''(v) = \frac{a}{4} (a^4 - av)^{-\frac{3}{2}}$.

ψ'' est strictement positive sur $]\frac{a^3}{2} ; a^3[$.

Étudions la dérivabilité à gauche de ψ' en $\frac{a^3}{2}$.

Lorsque $v \in]0 ; \frac{a^3}{2}[$, $\psi'(v) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{av}}$.

$$\frac{\psi'(v) - \psi'\left(\frac{a^3}{2}\right)}{v - \frac{a^3}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{av}} - \frac{1}{a^2\sqrt{2}}}{v - \frac{a^3}{2}} \text{ soit } \frac{\psi'(v) - \psi'\left(\frac{a^3}{2}\right)}{v - \frac{a^3}{2}} = \frac{-1}{a^2(a\sqrt{av} + v\sqrt{2})}.$$

On obtient enfin
$$\lim_{\nu \rightarrow \frac{a^3}{2}} \frac{\psi'(\nu) - \psi'(\frac{a^3}{2})}{\nu - \frac{a^3}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}a^5}.$$

ψ' est dérivable à gauche en $\frac{a^3}{2}$ et $\psi''_g(\frac{a^3}{2}) = \frac{-1}{\sqrt{2}a^5}.$

Étudions la dérivabilité (à droite) de ψ' en a^3 .

La relation $\psi'(a^3 - \nu) = \psi'(\nu)$ pour tout ν de $[0 ; a^3]$ et la symétrie de la représentation graphique de ψ' , nous permettent de conclure que :

ψ' est dérivable à droite en $\frac{a^3}{2}$ et $\psi''_d(\frac{a^3}{2}) = \frac{-1}{\sqrt{2}a^5}.$

► **En résumé**

ψ' est dérivable sur chacun des intervalles $]0 ; \frac{a^3}{2}[$ et $] \frac{a^3}{2} ; a^3[$. ψ' n'est pas dérivable en $\frac{a^3}{2}$, mais est néanmoins dérivable à gauche et à droite en ce point, ses dérivées à gauche et à droite étant opposées.

Les fonctions en jeu étant dérivables sur les intervalles $]0 ; \frac{a^3}{2}[$ et $] \frac{a^3}{2} ; a^3[$, nous pouvons “dériver l'égalité” $\psi'(a^3 - \nu) = \psi'(\nu)$ et prouver ainsi l'égalité $\psi''(a^3 - \nu) = -\psi''(\nu)$ pour tout ν de $]0 ; \frac{a^3}{2}[\cup] \frac{a^3}{2} ; a^3[$.

Le point de coordonnées $(\frac{a^3}{2} ; 0)$ est par conséquent centre de symétrie de la courbe représentative de ψ'' .

► **Récapitulatif sous forme de tableau**

ν	0	$\frac{a^3}{2}$	a^3
signe de ψ''	-		+
ψ'	$+\infty$	$\frac{1}{\sqrt{2}a^2}$	$+\infty$
signe de ψ'	-		+
ψ	0	$a \frac{\sqrt{2}}{2}$	$a\sqrt{2}$

Tableau 1 : Tableau de variation des fonctions ψ et ψ' .

6. Remplissage

Un liquide est versé à débit constant dans le cube initialement vide. Nous étudions ici l'évolution de la hauteur de liquide, en fonction du temps, au cours du remplissage.

► Notations et unités

a est la constante arête du cube (en dm).

D est la constante débit de remplissage (en $\text{dm}^3 \text{s}^{-1}$)

t est la variable temps (en s).

$M(t)$ est le point de contact du liquide et de la diagonale $[CA]$ au cours du remplissage.

$V(t)$ est le volume de liquide à l'instant t (en dm^3).

$H(t)$ est la hauteur de liquide à l'instant t (en dm).

Les fonctions V et H sont définies sur un intervalle de temps I .

► Détermination de l'intervalle I

On a $V(t) = Dt$. V est une fonction linéaire.

Le cube est plein lorsque $V(t) = a^3$ soit lorsque $t = \frac{a^3}{D}$.

L'intervalle I est ainsi $[0 ; \frac{a^3}{D}]$.

La fonction V est définie et strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; \frac{a^3}{D}]$.

► Étude de la fonction H sur l'intervalle $I = [0 ; \frac{a^3}{D}]$

Remarquons que $H = \psi \circ V$ ou encore $H(t) = \psi \circ V(t)$.

La fonction V est continue, strictement croissante de $[0 ; \frac{a^3}{D}]$ sur $[0 ; a^3]$ et la fonction ψ est continue, strictement croissante de $[0 ; a^3]$ sur $[0 ; a\sqrt{2}]$.

Par composition, H est continue, strictement croissante de $[0 ; \frac{a^3}{D}]$ sur $[0 ; a\sqrt{2}]$.

Remarquons que cette croissance est évidente, étant une conséquence directe de l'expression du remplissage du cube.

La fonction linéaire V étant dérivable sur I , le théorème de composition nous permet de donner les résultats suivants :

H est définie continue sur l'intervalle $[0 ; \frac{a^3}{D}]$, dérivable sur l'intervalle $]0 ; \frac{a^3}{D}[$.

H n'est dérivable ni en 0, ni en $\frac{a^3}{D}$.

H' est dérivable sur les intervalles $]0 ; \frac{a^3}{2D}[$ et $]\frac{a^3}{2D} ; \frac{a^3}{D}[$.

H' n'est pas dérivable en $\frac{a^3}{2D}$, mais est néanmoins dérivable à gauche et à droite en ce point, ses dérivées à gauche et à droite étant opposées.

Nous avons enfin les propriétés graphiques :

- Le point de coordonnées $(\frac{a^3}{2D}; \frac{a\sqrt{2}}{2})$ est centre de symétrie de la courbe représentative de H ;
- Dans un repère orthogonal, la droite d'équation $t = \frac{a^3}{2D}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de H' ;
- Le point de coordonnées $(\frac{a^3}{2D}; 0)$ est le centre de symétrie de la courbe représentative de H'' .

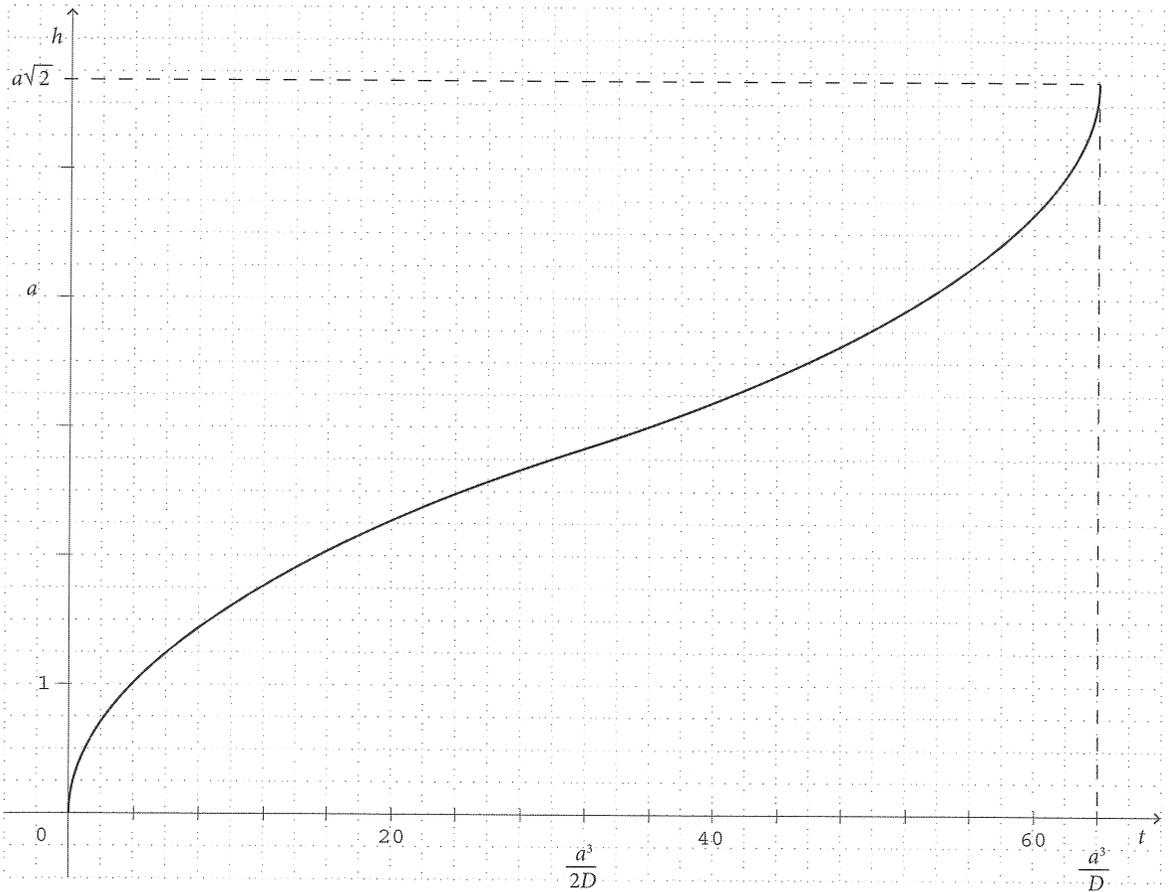


Figure 35 : Représentation graphique en repère orthogonal de la fonction H définie sur $[0; \frac{a^3}{D}]$ lorsque $a = 4$ dm et $D = 1$ dm³s⁻¹.

Remarque

Nous avons pour tout t de I , $H(t) = \psi(Dt)$.

Ainsi, la courbe de H , hauteur de liquide en fonction du temps, se déduit de la courbe de ψ , hauteur de liquide en fonction de V , par affinité orthogonale d'axe (Oy) et de rapport $1/D$. Dans le cas particulier choisi où $D = 1$, les représentations graphiques des fonctions H et ψ sont confondues.

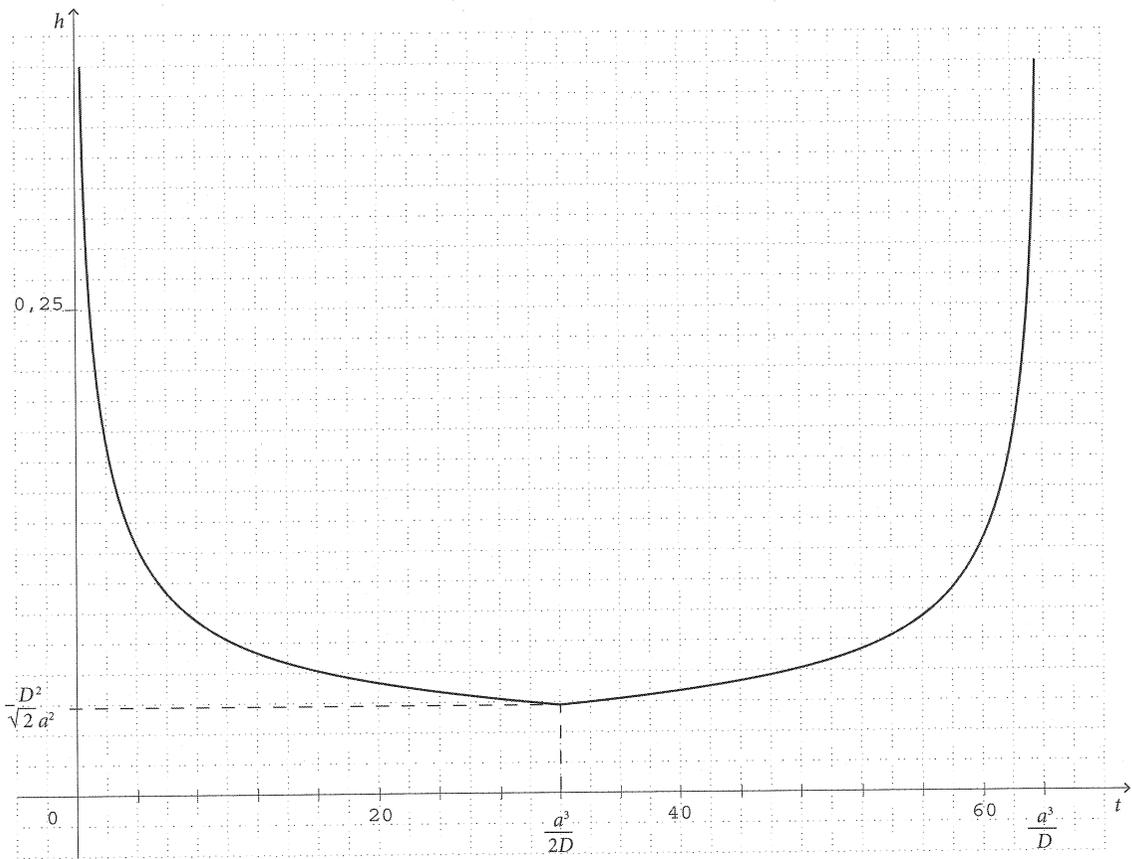


Figure 36 : Représentation graphique en repère orthogonal de la fonction H' lorsque $a = 4$ dm et $D = 1$ dm³s⁻¹.

Observons un agrandissement de la courbe précédente centré au point d'abscisse $\frac{a^3}{2D}$. La non dérivabilité de H' au point d'abscisse $\frac{a^3}{2D}$ se traduit graphiquement par un point anguleux.

La courbe représentative de H' (en gras) est située au dessus de ses demi-tangentes (en pointillés) au point minimum.

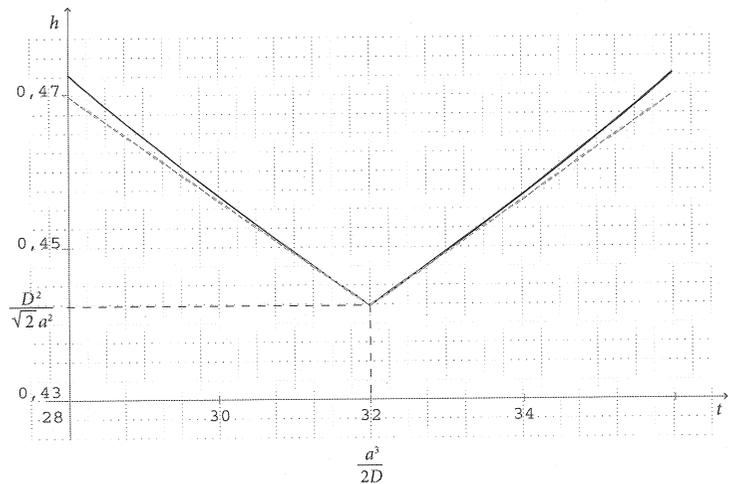


Figure 37 : Représentation locale de la fonction H' .

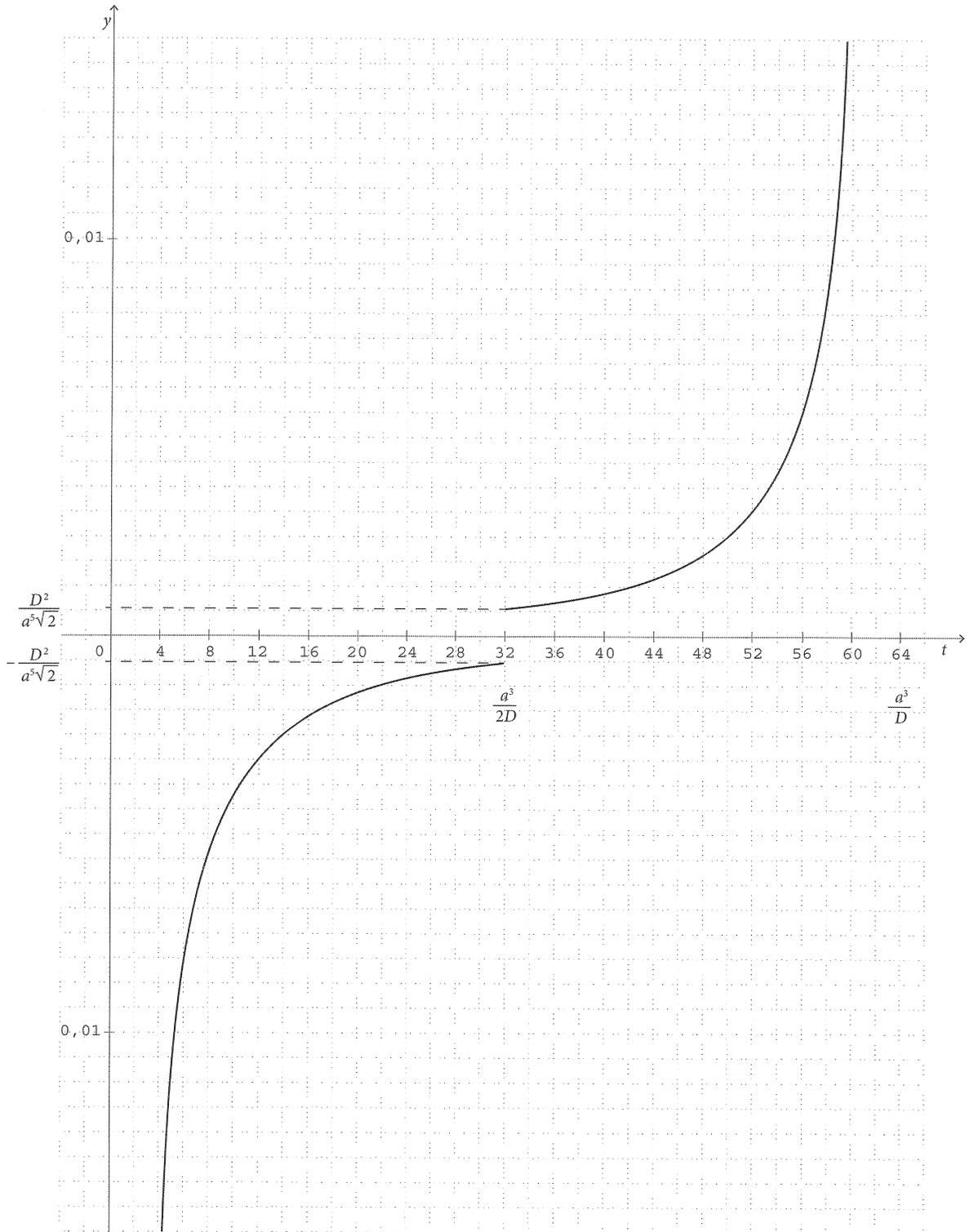


Figure 38 : Représentation graphique en repère orthogonal de la fonction H' lorsque $a = 4$ dm et $D = 1$ dm³s⁻¹.

► **Interprétation cinématique**

On s'intéresse au remplissage d'un cube d'arête a de longueur 4 dm à un débit constant D égal à $1 \text{ dm}^3\text{s}^{-1}$. La hauteur de remplissage, définie par la fonction H , croît continûment de 0 dm à $4\sqrt{2}$ dm. Le point $M(t)$ va de C à A lorsque t passe de 0 à 64 secondes. La vitesse du point $M(t)$, définie par la fonction H' décroît durant la première moitié du remplissage (32 secondes). Elle vaut $2,5 \text{ dm s}^{-1}$ lorsque $t = 0,01 \text{ s}$; elle vaut $0,25 \text{ dm s}^{-1}$ lorsque $t = 1 \text{ s}$. Elle atteint son minimum $\frac{1}{16\sqrt{2}}$, soit environ $0,044 \text{ dm s}^{-1}$ lorsque $t = 32 \text{ s}$.

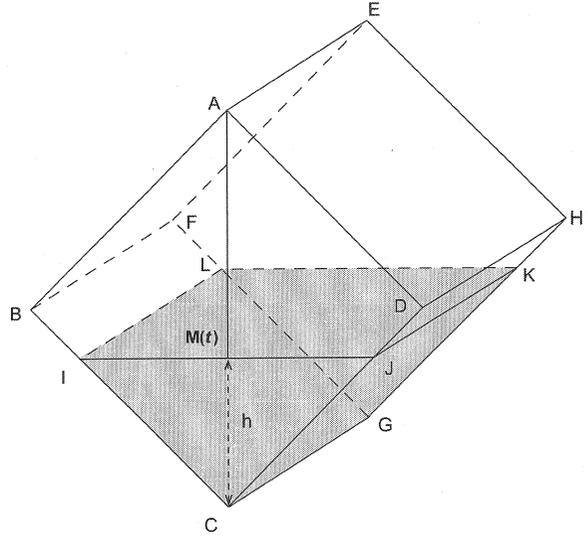


Figure 39 : Remplissage du cube.

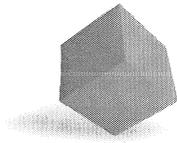
Le mouvement de M est retardé sur $[0 ; 32]$

L'accélération de $M(t)$, donnée par $H''(t)$ est donc négative lorsque $t \in] 0 ; 32 [$. Elle vaut -125 dm s^{-2} au temps $0,01 \text{ s}$; elle vaut $-0,125 \text{ dm s}^{-2}$ au temps 1 s . Elle s'approche de $\frac{-1}{1024\sqrt{2}}$, soit environ $-0,00069 \text{ dm s}^{-2}$ au voisinage de 32 s (avec $t < 32$). Ainsi, elle vaut environ $-0,00072 \text{ dm s}^{-2}$ au temps 31 s . La vitesse du point $M(t)$ croît durant la deuxième moitié du remplissage (32 secondes). Elle atteint donc son minimum $\frac{1}{16\sqrt{2}}$, soit environ $0,044 \text{ dm s}^{-1}$ au temps 32 s . Elle vaut $0,05 \text{ dm s}^{-1}$ au temps 39s . Elle vaut $0,25 \text{ dm s}^{-1}$ au temps 63 s et elle vaut $2,5 \text{ dm s}^{-1}$ au temps $63,99 \text{ s}$.

Le mouvement de M est accéléré sur $[32 ; 64]$

Cette fois, le demi-cube se « resserre », l'aire de la surface du liquide décroît, donc la vitesse de remplissage devient croissante. L'accélération de $M(t)$, donnée par $H''(t)$ est donc positive lorsque $t \in] 32 ; 64 [$. Elle est proche de $\frac{1}{1024\sqrt{2}}$, soit environ $0,00069 \text{ dm s}^{-2}$ lorsque t est voisin de 32 s ($t > 32$). Ainsi, elle vaut environ $0,00072 \text{ dm s}^{-2}$ au temps 33 s . Elle vaut $0,125 \text{ dm s}^{-2}$ au temps 63 s et elle vaut 125 dm s^{-2} au temps $63,99 \text{ s}$.

Remarquons qu'au milieu du remplissage, le mouvement du point $M(t)$ passe de retardé à accéléré sans que l'accélération ne s'annule. Il y a une « rupture » dans les variations de la vitesse de remplissage, cette rupture correspond ainsi à la discontinuité de H'' en 32 . Nous pouvons penser que l'angle droit entre les faces $ABFE$ et $BCGF$ est la cause de cette rupture. Dans le cas du remplissage d'une sphère ou d'un cylindre, on ne trouverait pas cette rupture.



Chapitre 3

Le cube en position γ

1. Représentation en perspective cavalière du cube en position γ

1. Propriétés du cube utilisées dans ce paragraphe

Le cube ci-dessous est représenté en perspective cavalière dans la position α . La droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE) et coupe celui-ci en O_1 . La droite (AG) est également perpendiculaire au plan (CFH) et coupe celui-ci en O_2 .

O_1 est le centre du triangle équilatéral BDE et O_2 est le centre du triangle équilatéral CFH.

Si a désigne la longueur de l'arête du cube, alors :

$$AG = a\sqrt{3},$$

$$AO_1 = a \frac{\sqrt{3}}{3}, O_1O_2 = a \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } O_2G = a \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ces propriétés sont démontrées dans l'annexe 3.

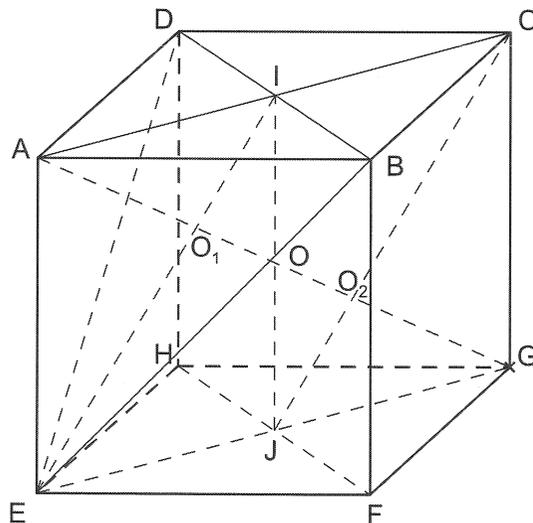


Figure 40 : le cube en position α .

2. Construction du cube en position γ

À partir de la position α , représentons ce cube en perspective cavalière dans la position γ . Le plan frontal est choisi parallèle au plan (AEGC) la droite (AG) est verticale. Rappelons qu'alors, les plans (EDB) et (FHC) sont horizontaux.

Constructions préalables

► Construction d'un segment de longueur $a\sqrt{3}$ partagé en trois parties égales et de son milieu

Les tracés peuvent être réalisés à la règle et au compas à partir d'un segment de longueur a . Le segment de longueur $a\sqrt{3}$, permettra de construire le segment vertical [AG]. En utilisant une situation de Thalès, nous pouvons partager ce segment en trois segments de même longueur et également construire le milieu de ce segment. Sur la diagonale [AG], nous obtenons donc les points O_1, O et O_2 .

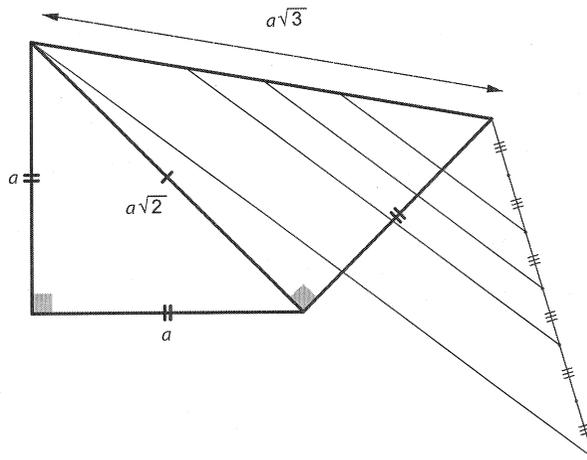


Figure 41.

► Construction du segment $[EO_1]$ représenté en vraie grandeur

Il suffit de reporter la longueur $a\sqrt{2}$ obtenue dans la construction précédente, puis de construire un triangle équilatéral de côté $a\sqrt{2}$ et deux médianes de ce triangle. Le segment [EI] appartient au plan (AEGC) et sera représenté en vraie grandeur. D'autre part, (AG) est perpendiculaire au plan (BDE) et en particulier à la droite (EI) au point O_1 .

Nous terminons la construction en remarquant que la droite (BD) est perpendiculaire au plan (AEGC) puisqu'elle est à la fois perpendiculaire à (AC) et à (EI) qui sont deux droites sécantes de ce plan. [BD] est ainsi construit à partir de son milieu I parallèlement à une fuyante (δ).

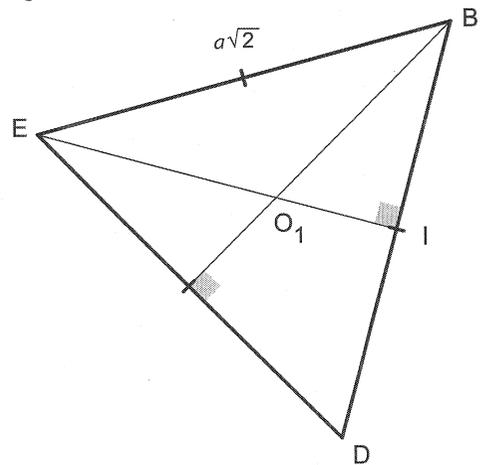


Figure 42.

C est le symétrique de A par rapport à I (et de E par rapport à O, milieu de [AG]). Il ne reste plus qu'à construire les symétriques de B et D par rapport au milieu O de [AG] et à compléter le tracé du cube.

Sur le cube dessiné en position α , on a laissé apparents les traits de construction qui permettent de tracer un segment de longueur $a\sqrt{2}$ dans la direction (δ) des fuyantes.

On a construit dans l'ordre les points A, G, O₁, O, O₂, E, C, I, B, D, F, H et J avant de compléter le cube.

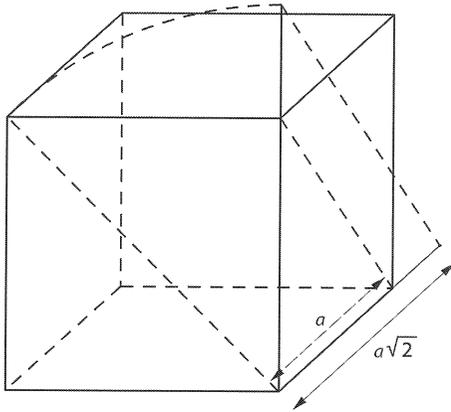


Figure 43.

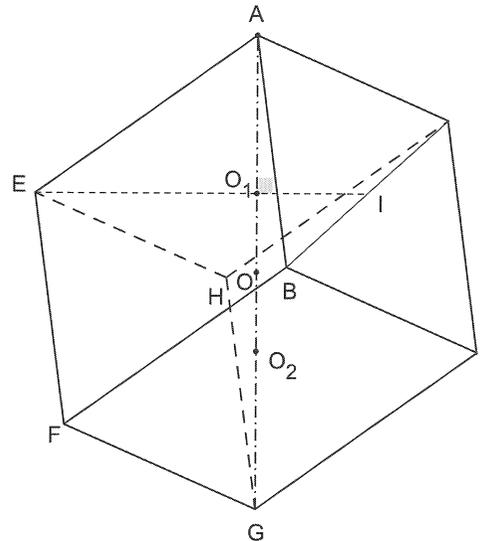


Figure 44.

Remarque

La section du cube avec le plan passant par A et parallèle au plan frontal est le rectangle ACGE. Si on appelle C' et E' les projetés orthogonaux de C et E sur la droite Δ perpendiculaire à (AG) dans le plan décrit ci-dessus, on obtient la figure ci-contre :

θ et θ' sont deux angles complémentaires, donc

$$\cos \theta = \sin \theta' = \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Par suite, $GC' = a \frac{\sqrt{6}}{3}$.

De plus, O est le milieu de [CE], donc G est le milieu de [C'E'].

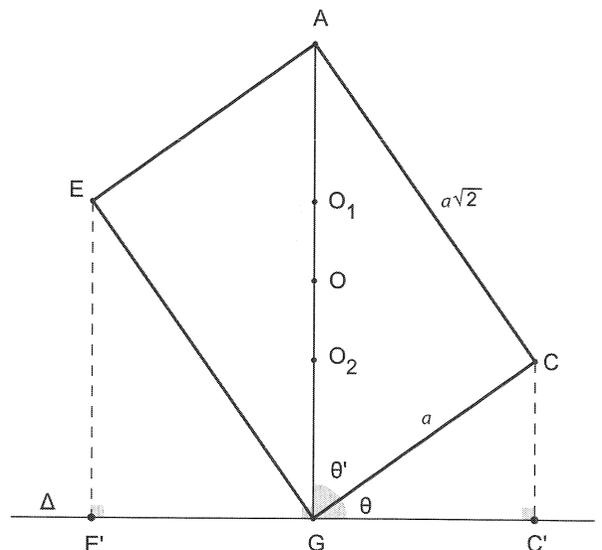


Figure 45.

Conclusion

Voici la représentation du cube en position γ avec en pointillés la diagonale $[AG]$ verticale. Les triangles équilatéraux BDE et CFH ont pour centres respectifs O_1 et O_2 et sont inclus dans des plans horizontaux.

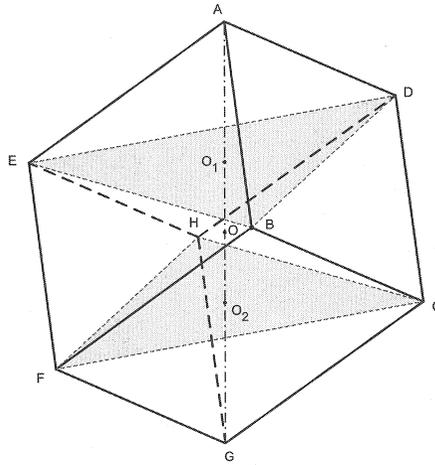


Figure 46 : Représentation du cube en position γ .

2. Lignes et surfaces de niveau

1. Lignes de niveau

Désignons par (Σ) la surface constituée des six carrés du cube creux. Π est le plan horizontal passant par G et P_h est le plan horizontal situé à la distance h du plan Π , situé dans le demi-espace de frontière Π contenant le cube. Les plans P_0 et Π sont confondus. La ligne de niveau notée L_h est la section de (Σ) par le plan horizontal P_h . Notons K_h l'intersection du plan P_h avec (AG) : on a alors $GK_h = h$.

La famille de plans P_h est une famille de plans orthogonaux à (AG) . L'intersection de P_h et de (Σ) est non vide si et seulement si $h \in [0 ; a\sqrt{3}]$.

Trois cas sont alors à envisager.

► 1^{er} cas : $h \in [0 ; \frac{a\sqrt{3}}{3}]$.

P_h est alors situé entre les plans horizontaux Π et (FCH) . P_h ne coupe alors que les trois faces $BCDF$, $CDHG$ et $EFGH$ du cube.

Les intersections d'un plan avec deux plans parallèles sont deux droites parallèles. Il en résulte que :

- l'intersection de P_h avec la face $BCGF$ du cube est le segment $[M_h N_h]$ parallèle à (CF) ;
- l'intersection de P_h avec la face $CDHG$ du cube est le segment $[N_h T_h]$ parallèle à (CH) ;
- l'intersection de P_h avec la face $EFGH$ du cube est le segment $[T_h M_h]$ parallèle à (HF) .

Ainsi, L_h est un triangle $M_h N_h T_h$ tel que $M_h \in [FG]$, $N_h \in [GC]$ et $T_h \in [GH]$.

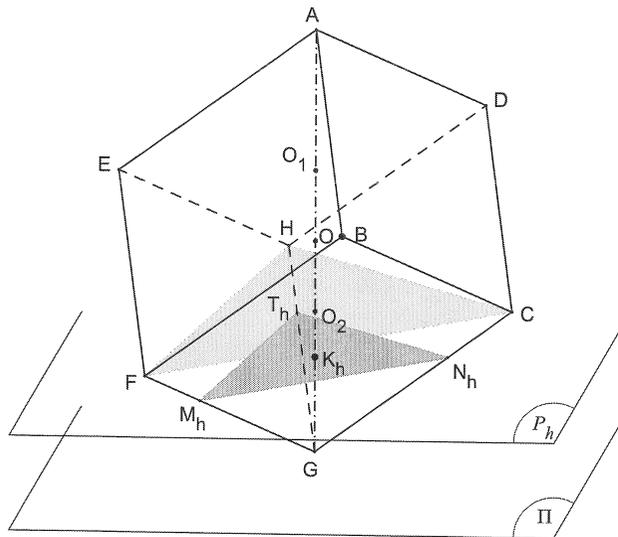


Figure 47 : 1^{er} cas.

À l'aide du théorème de Thalès, on montre les égalités suivantes :

$$\frac{GK_h}{GO_h} = \frac{GM_h}{GF} = \frac{M_hN_h}{FC} = \frac{N_hT_h}{CH} = \frac{T_hM_h}{FH} = \frac{h}{a \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{h\sqrt{3}}{a}.$$

Il en résulte que : $M_hN_h = N_hT_h = T_hM_h = \frac{h\sqrt{3}}{3a} \times a\sqrt{2} = h\sqrt{6}$.

Ainsi, le triangle $M_hN_hT_h$ est un triangle équilatéral de côté $h\sqrt{6}$. Remarquons que ce triangle $M_hN_hT_h$ est image du triangle équilatéral FHI par une homothétie de centre G.

Lorsque $h \in [0 ; \frac{a\sqrt{3}}{3}]$, la ligne de niveau L_h est un triangle équilatéral de côté $h\sqrt{6}$.

Remarque

La ligne de niveau $L_{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$ est le triangle équilatéral CFH et L_0 est réduite au point G.

► 2^e cas : $h \in]\frac{a\sqrt{3}}{3} ; \frac{2a\sqrt{3}}{3}[$.

Le plan P_h est alors situé entre les plans horizontaux (FCH) et (BED). Il coupe alors les six faces du cube.

Les trois plans horizontaux P_h , (BDE) et (CFH) sont parallèles et tous trois sont orthogonaux à (AG). Sachant que les intersections de deux plans parallèles avec un troisième plan sont deux droites parallèles, on prouve que :

- l'intersection de P_h avec la face ABCD du cube est un segment $[\alpha\beta]$ parallèle à (BD) ;
- l'intersection de P_h avec la face DCGH du cube est le segment $[\beta\gamma]$ parallèle à (CH) ;

- l'intersection de P_h avec la face AEHD du cube est le segment $[\gamma\delta]$ parallèle à (DE) ;
- l'intersection de P_h avec la face EFGH du cube est le segment $[\delta\varepsilon]$ parallèle à (FH) ;
- l'intersection de P_h avec la face ABFE du cube est le segment $[\varepsilon\omega]$ parallèle à (BE) ;
- l'intersection de P_h avec la face BCFG du cube est le segment $[\omega\alpha]$ parallèle à (CF).

L_h est alors un hexagone.

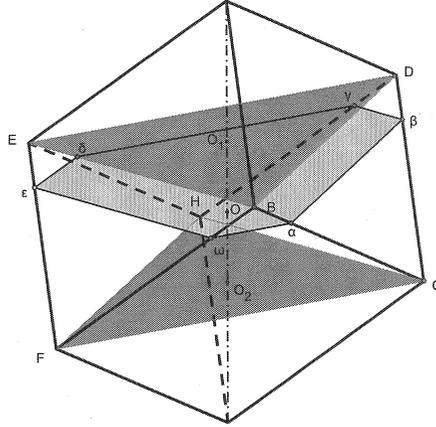


Figure 48 : 2° cas.

Appelons M_h l'intersection du segment $[GA]$ avec le plan P_h et posons :

$$k = \frac{o_2 M_h}{o_2 o_1} = \frac{h - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{h\sqrt{3}}{a} - 1.$$

O_2, M_h et O_1 sont les projetés orthogonaux respectifs de C, α et B sur la droite (GA) , donc $\frac{Ca}{CB} = k$ et par le théorème de Thalès $\frac{\alpha\beta}{BD} = k$. On en déduit : $\alpha\beta = ka\sqrt{2}$.

De même, O_2, M_h et O_1 sont les projetés orthogonaux respectifs de C, β et D sur la droite (GA) , donc $\frac{D\beta}{DC} = \frac{O_1 M_h}{O_1 O_2} = \frac{O_1 O_2 - O_2 M_h}{O_1 O_2} = 1 - k = \frac{\beta\gamma}{CH}$. D'où $\beta\gamma = (1 - k)a\sqrt{2}$.

On obtient finalement $\gamma\delta = \varepsilon\omega = \alpha\beta = ka\sqrt{2}$ et $\delta\varepsilon = \omega\alpha = \beta\gamma = (1 - k)a\sqrt{2}$.

Remarquons que la somme de deux côtés consécutifs de l'hexagone est constante et égale à $a\sqrt{2}$, que le périmètre de cet hexagone est donc constant et égal à $3a\sqrt{2}$ et enfin que les côtés opposés sont deux à deux parallèles, soit $(\alpha\beta), (\beta\gamma)$ et $(\gamma\delta)$ respectivement parallèles à $(\delta\omega), (\omega\varepsilon)$ et $(\varepsilon\alpha)$.

Remarquons également que pour $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, on a $k = \frac{1}{2}$, les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \omega$ sont les milieux respectifs des côtés $[BC], [CF], [FE], [EH], [HD]$ et $[DB]$. L'hexagone est alors régulier.

Lorsque $h \in]\frac{a\sqrt{3}}{3}; \frac{2a\sqrt{3}}{3}[$, la ligne de niveau L_h est un hexagone dont les côtés sont trois à trois de même longueur.

► 3^e cas : $h \in [\frac{2a\sqrt{3}}{3}; a\sqrt{3}]$.

P_h est alors situé au-dessus du plan horizontal (BDE) et au-dessous du sommet A. P_h ne coupe alors que les trois faces ABCD, ABEF et ADHE du cube.

Le plan P_h est le symétrique du plan $P_{a\sqrt{3}-h}$ par rapport au centre O du cube, donc l'intersection de ce plan avec le cube est symétrique de la ligne de niveau $a\sqrt{3}-h$ avec $a\sqrt{3}-h \in [0; \frac{a\sqrt{3}}{3}]$.

Cette ligne de niveau est un triangle équilatéral dont la longueur du côté est : $3a\sqrt{2} - h\sqrt{6}$.

Lorsque $h \in [\frac{2a\sqrt{3}}{3}; a\sqrt{3}]$, la ligne de niveau L_h est un triangle équilatéral de côté $3a\sqrt{2} - h\sqrt{6}$.

2. Surfaces de niveau

Les surfaces de niveau considérées sont les sections du cube plein avec une famille de plans horizontaux. Elles sont délimitées par les lignes de niveau définies précédemment. Nous obtenons :

► 1^{er} cas : $h \in [0; \frac{a\sqrt{3}}{3}]$ ou $h \in [\frac{2a\sqrt{3}}{3}; a\sqrt{3}]$

Les surfaces de niveau sont des triangles équilatéraux pleins de côtés $h\sqrt{6}$ ou $3a\sqrt{2} - h\sqrt{6}$.

► 2^e cas : $h \in]\frac{a\sqrt{3}}{3}; \frac{2a\sqrt{3}}{3}[$

Les surfaces de niveau sont des hexagones pleins dont certaines propriétés ont été étudiées dans le paragraphe précédent.

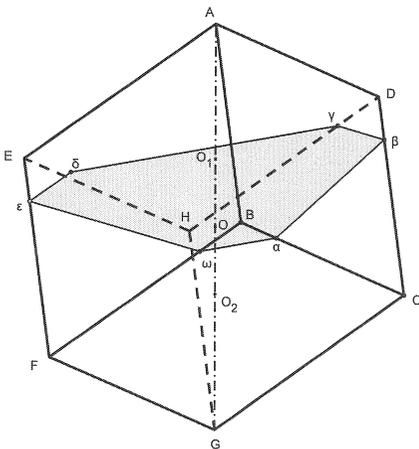


Figure 49 : Surface de niveau hexagonale.

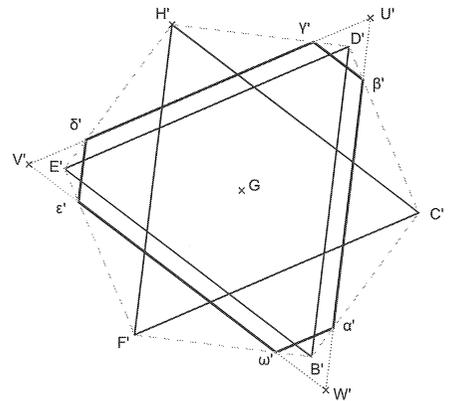


Figure 50 : Représentation en vraie grandeur

Projetons orthogonalement cet hexagone sur le plan horizontal Π . Projetons de même les deux triangles équilatéraux BDE et CFH. Ces trois lignes de niveau sont alors obtenues en vraie grandeur puisqu'elles sont situées dans des plans parallèles à Π (voir figure 50).

Les points A, O_1 , O, O_2 et G ont pour projeté G. De plus, comme les triangles BDE et CFH sont symétriques par rapport à O, les triangles projetés sont symétriques par rapport à G. Appelons U' le point d'intersection des droites $(\alpha'\beta')$ et $(\gamma'\delta')$, V' le point d'intersection des droites $(\epsilon'\omega')$ et $(\gamma'\delta')$ et W' le point d'intersection des droites $(\alpha'\beta')$ et $(\epsilon'\omega')$. Les triangles $\alpha'\omega'W'$, $\beta'\gamma'U'$ et $\delta'\epsilon'V'$ sont des triangles équilatéraux puisque leurs côtés sont respectivement parallèles aux côtés du triangle équilatéral C'F'H'. D'après le paragraphe précédent, ils sont isométriques. Le triangle U'V'W' est également équilatéral.

En conclusion, l'hexagone $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\epsilon'\omega'$ peut s'obtenir en retirant d'un triangle équilatéral de côté $(\alpha'\beta'+2\beta'\gamma')$ trois triangles équilatéraux de côté $\beta'\gamma'$.

3. Fonctions associées

Nous étudierons successivement les fonctions définies respectivement par la longueur des lignes de niveaux, l'aire des surfaces de niveaux et le volume de liquide contenu.

1. Longueur des lignes de niveau

La longueur de la ligne de niveau L_h peut s'exprimer en fonction de la hauteur h de liquide contenu. Notons \mathcal{L} la fonction, qui à tout réel h de l'intervalle $[0; a]$, associe la longueur de la ligne de niveau L_h . L'étude précédente des lignes de niveau nous permet de déterminer la fonction \mathcal{L} pour tout h de $[0; a\sqrt{3}]$:

- Si $h \in [0; \frac{a\sqrt{3}}{3}]$, $\mathcal{L}(h) = 3h\sqrt{6}$;
- Si $h \in]\frac{a\sqrt{3}}{3}; \frac{2a\sqrt{3}}{3}[$, $\mathcal{L}(h) = 3a\sqrt{2}$;
- Si $h \in [\frac{2a\sqrt{3}}{3}; a\sqrt{3}]$, $\mathcal{L}(h) = 3(3a\sqrt{2} - h\sqrt{6})$.

La fonction \mathcal{L} est affine par intervalles sur $[0; a\sqrt{3}]$.

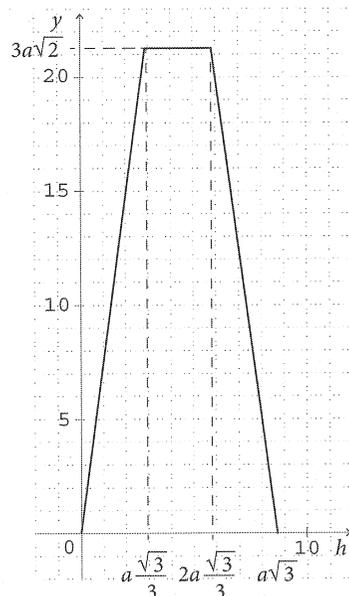


Figure 51 : Représentation graphique avec $a = 5$.

2. Aire des surfaces de niveau

L'aire des surfaces de niveau est une fonction de la hauteur h de liquide contenu.

Notons \mathcal{S} la fonction qui, à tout réel h de l'intervalle $[0 ; a\sqrt{3}]$, associe l'aire de la surface de niveau associée à L_h .

\mathcal{S} est définie pour tout h de $[0 ; a\sqrt{3}]$ de la façon suivante.

► 1^{er} cas : $h \in [0 ; \frac{a\sqrt{3}}{3}]$.

La surface de niveau h est un triangle équilatéral de côté $h\sqrt{6}$. Son aire est : $\mathcal{S}(h) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} h\sqrt{6} \times h\sqrt{6}$.

$$\mathcal{S}(h) = \frac{3\sqrt{3}}{2} h^2.$$

► 2^e cas : $h \in]\frac{a\sqrt{3}}{3} ; \frac{2a\sqrt{3}}{3}[$.

La surface de niveau h est un hexagone. Nous avons vu précédemment que cet hexagone $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\epsilon'\omega'$ peut s'obtenir en retirant d'un triangle équilatéral de côté $(\alpha'\beta' + 2\beta'\gamma')$ trois triangles équilatéraux de côté $\beta'\gamma'$.

Nous avons $\beta'\gamma' = \beta\gamma = (1 - k)a\sqrt{2}$, $\alpha'\beta' = \alpha\beta = ka\sqrt{2}$ avec $k = \frac{h\sqrt{3}}{a} - 1$. En remplaçant k par cette dernière valeur, nous obtenons

$$\alpha'\beta' + 2\beta'\gamma' = 3a\sqrt{2} - h\sqrt{6} \text{ et } \beta'\gamma' = 2a\sqrt{2} - h\sqrt{6}.$$

$$\text{On a alors } \mathcal{S}(h) = \frac{\sqrt{3}}{4} ((3a\sqrt{2} - h\sqrt{6})^2 - 3(2a\sqrt{2} - h\sqrt{6})^2).$$

Après développement, nous obtenons alors

$$\mathcal{S}(h) = \frac{\sqrt{3}}{4} (-6a^2 - 12h^2 + 12ah\sqrt{3}).$$

$$\mathcal{S}(h) = \frac{3\sqrt{3}}{4} (-2a^2 - 4h^2 + 4ah\sqrt{3}).$$

$$\mathcal{S}(h) = \frac{3\sqrt{3}}{4} (a^2 - (2h - a\sqrt{3})^2).$$

► 3^e cas : $h \in [\frac{2a\sqrt{3}}{3} ; a\sqrt{3}]$.

La surface de niveau h est un triangle équilatéral isométrique à la surface de niveau $a\sqrt{3} - h$ et d'aire :

$$\mathcal{S}(h) = \frac{3\sqrt{3}}{2} (a\sqrt{3} - h)^2.$$

La fonction aire est définie sur $[0 ; a\sqrt{3}]$ par intervalles à l'aide de polynômes de degré 2.

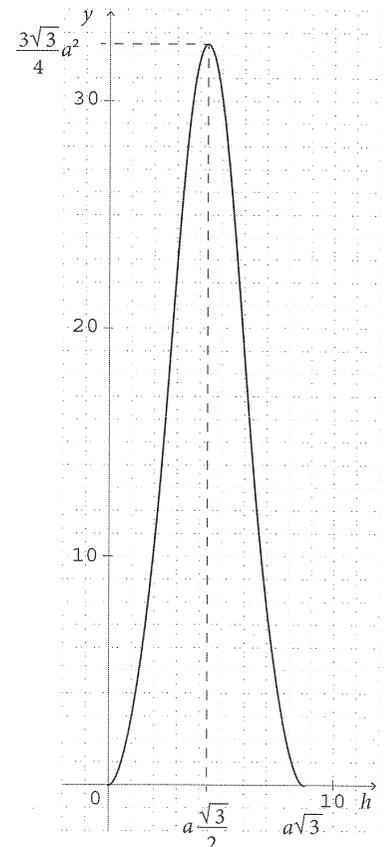


Figure 52 : Représentation graphique avec $a = 5$.

Remarque

L'aire atteint son maximum lorsque $h = a \frac{\sqrt{3}}{2}$ et ce maximum a pour valeur $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. Cette fonction est continue et dérivable sur $[0 ; a\sqrt{3}]$. Les trois arcs se raccordent tangentiellement. D'autre part, la droite d'équation $h = a \frac{\sqrt{3}}{2}$ est axe de symétrie de sa courbe représentative. Enfin, pour cette valeur de h , la surface de niveau est un hexagone régulier.

3. Volume des solides associés

Le volume des solides associés au remplissage est fonction de la hauteur h de liquide contenu. φ est la fonction qui, à tout réel h de l'intervalle $[0 ; a\sqrt{3}]$, associe le volume v contenu dans le cube.

► 1^{er} cas : $h \in [0 ; \frac{a\sqrt{3}}{3}]$.

Le solide associé est un tétraèdre dont une face est un triangle équilatéral de côté $h\sqrt{6}$ et dont la hauteur correspondante est h . Le volume est donc $\varphi(h) = \frac{1}{3}h \frac{3\sqrt{3}}{2}h^2$.

$$\varphi(h) = \frac{\sqrt{3}}{2}h^3.$$

► 2^e cas : $h \in]\frac{a\sqrt{3}}{3} ; \frac{2a\sqrt{3}}{3}[$.

Le solide associé est la réunion d'un tétraèdre et d'un tronç d'antiprisme, de volume

$$\varphi(h) = \frac{1}{6}a^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2(h - \frac{a\sqrt{3}}{3}) + \frac{3}{2}a(h - \frac{a\sqrt{3}}{3})^2 - \sqrt{3}(h - \frac{a\sqrt{3}}{3})^3.$$

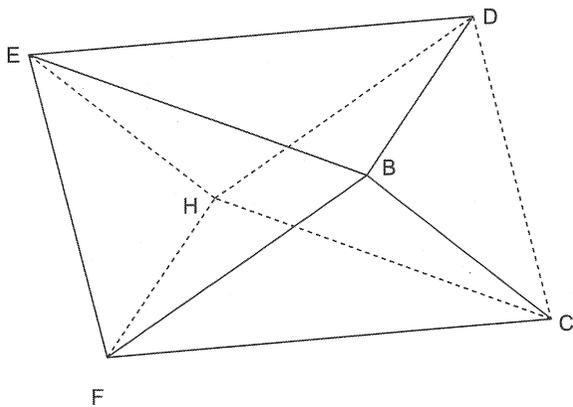


Figure 53 : Représentation en perspective cavalière de l'antiprisme CFHDBE.

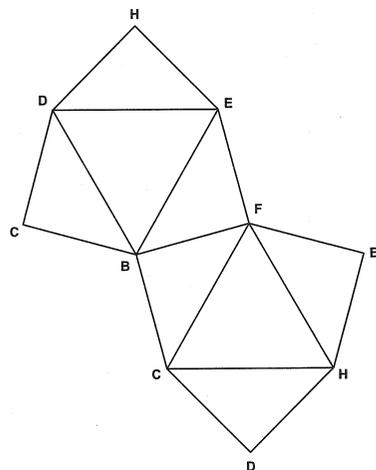


Figure 54 : Un patron de l'antiprisme CFHDBE.

Le solide CFHDBE est un antiprisme¹ droit. Il compte 6 sommets, 8 faces et 12 arêtes. Les deux bases sont les faces BED et CFH. Ce sont des triangles équilatéraux de côté de longueur $a\sqrt{2}$, symétriques par rapport à O et donc situés dans deux plans horizontaux parallèles. La surface latérale est constituée de six faces isométriques. Ce sont des triangles rectangles isocèles de côté de longueur a et d'hypoténuse de longueur $a\sqrt{2}$.

Démontrons le résultat concernant le volume $\varphi(h)$

Le tétraèdre trirectangle GCFH a une face qui est un triangle équilatéral de côté $a\sqrt{2}$ et dont la hauteur correspondante est $a\frac{\sqrt{3}}{3}$. Son volume est donc $\frac{1}{3}a\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}2a^2$, soit $\frac{1}{6}a^3$. Le cube, de volume a^3 , est la réunion de cet antiprisme et de deux tétraèdres GCFH et AEBD de volume $\frac{1}{6}a^3$. Par différence, le volume de l'antiprisme vaut donc $\frac{2}{3}a^3$. Remarquons qu'en juxtaposant sur chacune des 6 faces de la surface latérale un même tétraèdre (trois tétraèdres dans la position 1 et trois tétraèdres dans la position 2), nous obtenons un prisme dont la base est un hexagone régulier dont le côté est de longueur $a\frac{\sqrt{6}}{3}$ et dont la hauteur est $a\frac{\sqrt{3}}{3}$. Le volume de ce prisme est $6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{2}{3} a^2 \times a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, soit a^3 (voir figure 56).

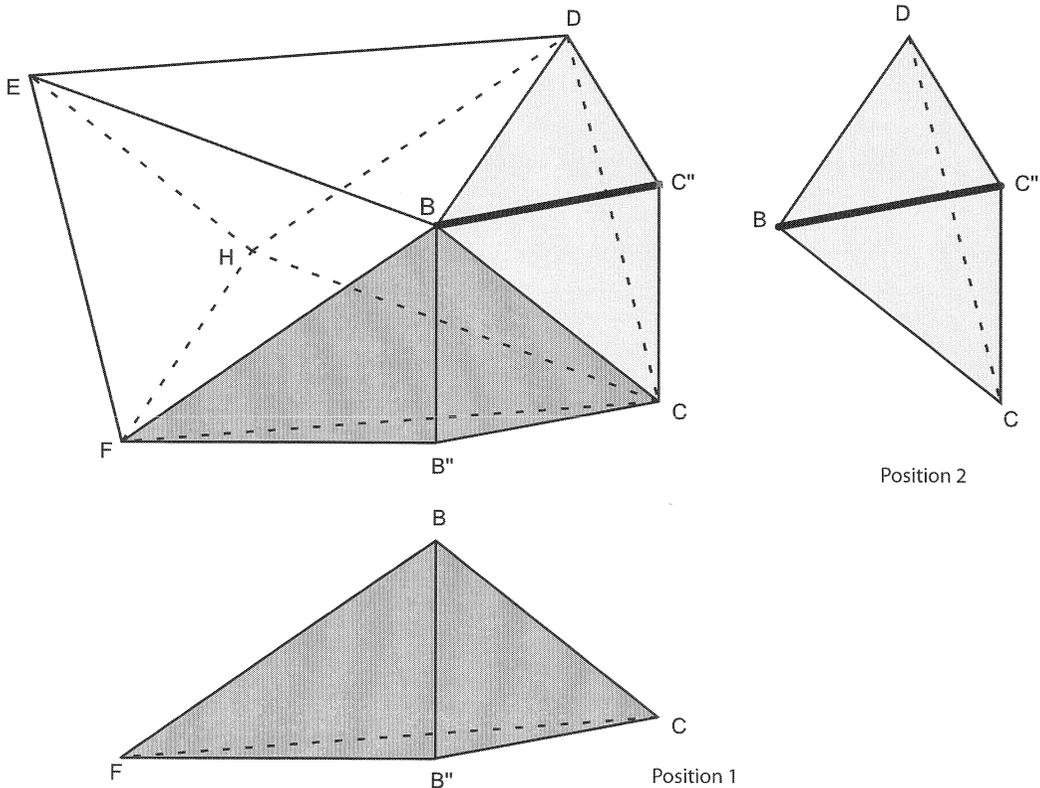


Figure 55 : De l'antiprisme au prisme.

¹ Un antiprisme d'ordre n (ou n -gonal) est un polyèdre ayant deux faces parallèles (ses bases) à n côtés, chacun des sommets de l'une étant joint par deux arêtes à deux sommets de l'autre, formant ainsi $2n$ faces latérales triangulaires.

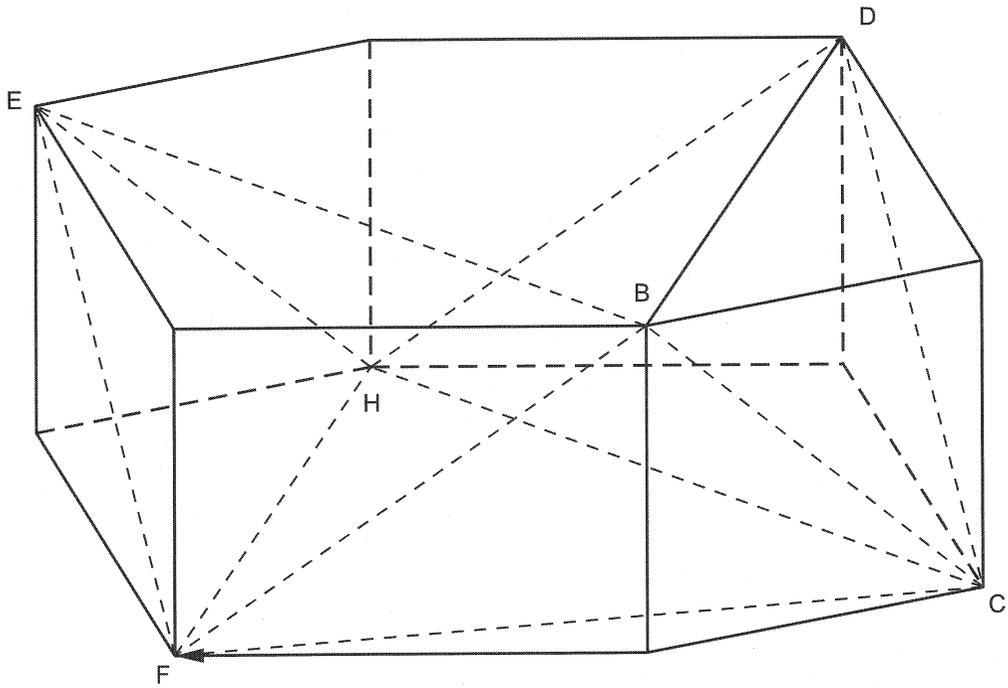


Figure 56 : Prisme à base hexagonale, obtenu en complétant l'antiprisme CFHDBE.

Les dimensions du tétraèdre permettant de compléter l'antiprisme, se calculent à l'aide du patron ci-contre.

En position 2 :

$$BC = CD = a \text{ (arête du cube)}$$

$$BD = a\sqrt{2}$$

$$BC'' = C''D = a \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$CC'' = a \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$C''K = a \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ (K milieu de [DB])}.$$

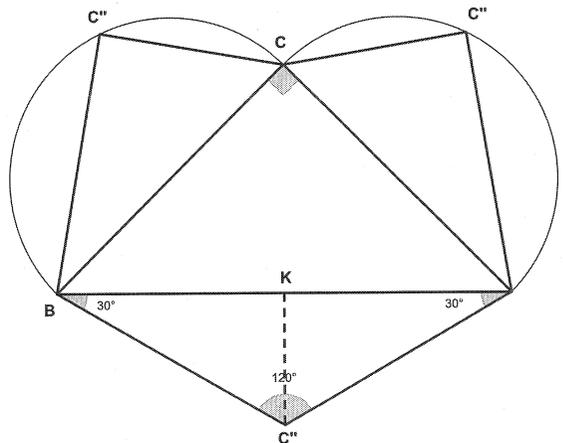


Figure 57 : Patron du tétraèdre.

En position 1, les résultats précédents deviennent :

$BC = BF = a$ (arête du cube)

$$FC = a\sqrt{2} \quad B''F = B''C = a\frac{\sqrt{6}}{3} \quad BB'' = a\frac{\sqrt{3}}{3} \quad B''K' = a\frac{\sqrt{6}}{6} \text{ (} K' \text{ milieu de } [CF]\text{)}.$$

Nous cherchons le volume d'un tronc d'antiprisme de base le triangle équilatéral CFH et de hauteur h' avec $h' = h - a\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ce solide s'inscrit dans un prisme dont la base est un hexagone régulier dont le côté est de longueur $a\frac{\sqrt{6}}{3}$ et dont la hauteur est h' . Le volume de ce prisme est $a^2\sqrt{3}h'$. La surface du liquide remplissant le cube détermine sur le tétraèdre en position 1 un tronc de pyramide.

Calculons le volume du tronc de pyramide MNTFB'C.

Le triangle FB'C a pour aire $\frac{1}{2} a\sqrt{2} \times \frac{a\sqrt{6}}{6}$, soit $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Le volume du tétraèdre FB'CB est alors $\frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \frac{a\sqrt{3}}{3}$, soit $\frac{a^3}{18}$.

Le tétraèdre MNTB se déduit du précédent par l'homothétie de centre B et de rapport k_1 avec $k_1 = \frac{BN}{BB''}$,

$$\text{soit } k_1 = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{3} - h'}{a\frac{\sqrt{3}}{3}}, \text{ soit } k_1 = \frac{a - h'\sqrt{3}}{a}.$$

MNTB a alors pour volume $(k_1)^3 \frac{a^3}{18}$.

MNTFB'C a pour volume $\frac{1}{18} (a^3 - (a - h'\sqrt{3})^3)$.

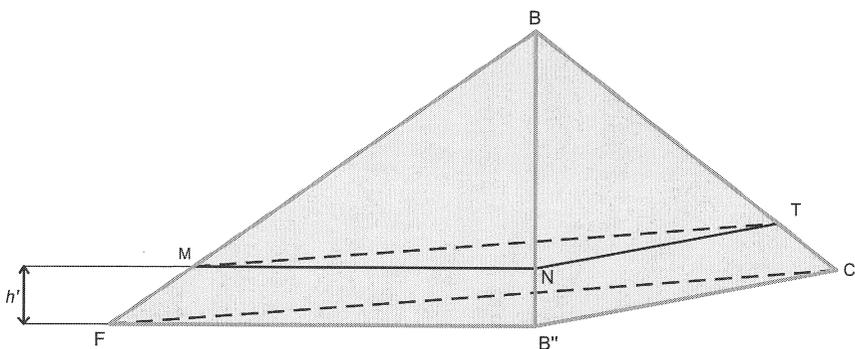


Figure 58 : Tétraèdre en position 1.

La surface du liquide remplissant le cube détermine sur le tétraèdre en position 2 un tétraèdre.

Calculons le volume du tétraèdre CPQR.

Le triangle BC''D a pour aire $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ (d'après le calcul précédent). Le volume du tétraèdre CFB''B est alors $\frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \frac{a\sqrt{3}}{3}$, soit $\frac{a^3}{18}$.

Le tétraèdre CPQR se déduit du précédent par l'homothétie de centre C et de rapport k_2 avec $k_2 = \frac{CQ}{CC''}$, soit $k_2 = \frac{h'}{a\sqrt{3}}$, soit enfin $k_2 = \frac{h'\sqrt{3}}{a}$.

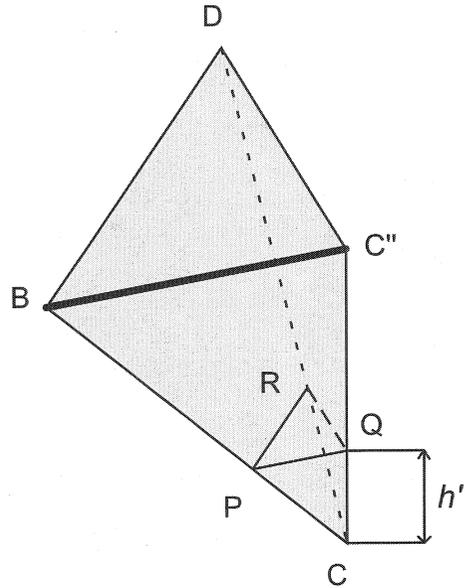


Figure 59 : Tétraèdre en position 2.

CPQR a alors pour volume $(k_2)^3 \frac{a^3}{18}$, soit $\frac{h'^3\sqrt{3}}{6}$.

Le volume du tronc d'antiprisme FCH α β γ δ ϵ est alors $V = a^2\sqrt{3}h' - 3 \times \frac{1}{18}(a^3 - (a - h'\sqrt{3})^3) - 3 \times \frac{h'^3\sqrt{3}}{6}$.

Après développement, nous obtenons $V = \frac{\sqrt{3}}{2}h'a^2 + \frac{3}{2}h'^2a - \sqrt{3}h'^3$.

Rappelons que nous avons défini h' par $h' = h - a\frac{\sqrt{3}}{3}$ page 49.

Nous obtenons alors $V = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2(h - a\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{3}{2}a(h - a\frac{\sqrt{3}}{3})^2 - \sqrt{3}(h - a\frac{\sqrt{3}}{3})^3$.

et enfin, $\varphi(h) = \frac{1}{6}a^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2(h - a\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{3}{2}a(h - a\frac{\sqrt{3}}{3})^2 - \sqrt{3}(h - a\frac{\sqrt{3}}{3})^3$.

Remarquons que pour $h = 2a\frac{\sqrt{3}}{3}$, nous avons

$$\varphi(2a\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{6}a^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2a\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2}a(a\frac{\sqrt{3}}{3})^2 - \sqrt{3}(a\frac{\sqrt{3}}{3})^3.$$

$$\varphi(2a\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3.$$

$$\varphi(2a\frac{\sqrt{3}}{3}) = a^3 - \frac{1}{6}a^3 \text{ et enfin } \varphi(2a\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{5}{6}a^3.$$

L'avant-dernière expression correspond bien au volume du cube privé du tétraèdre trirectangle ABDE.

► 3^e cas : $h \in \left[\frac{2a\sqrt{3}}{3}; a\sqrt{3} \right]$.

Le solide associé est le cube entier, privé d'un tétraèdre. Le volume de liquide est donc égal au volume du cube privé du tétraèdre Abde.

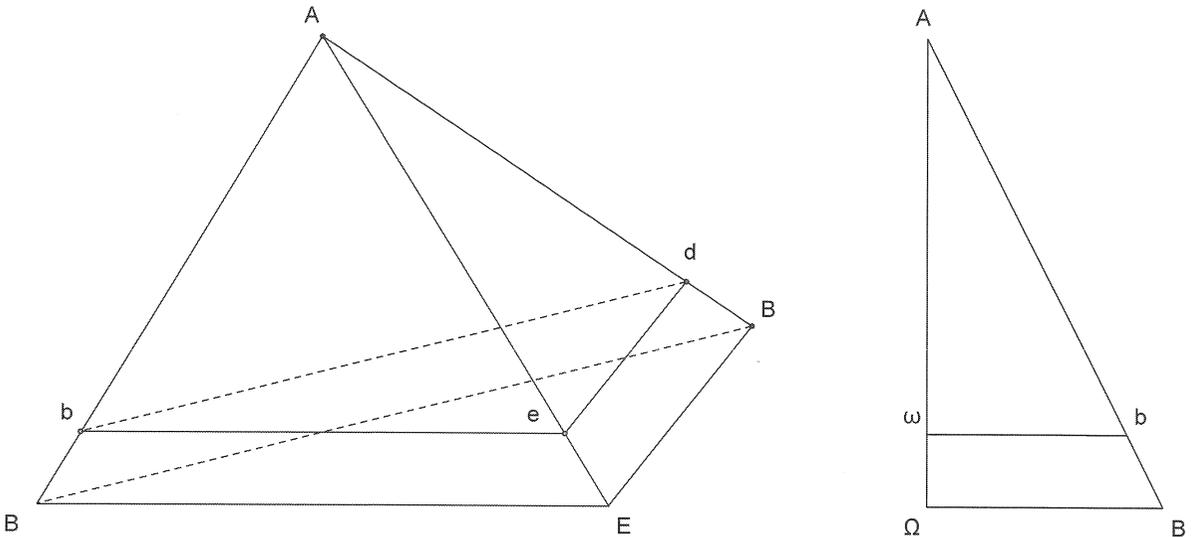
Le triangle BDE est équilatéral de côté $a\sqrt{2}$, de centre Ω . Les triangles BDE et bde ont des côtés parallèles. bde est donc équilatéral, de centre ω .

Le théorème de Thalès fournit $\frac{\omega A}{\omega \Omega} = \frac{\omega b}{\Omega B}$ soit $\frac{\omega b}{\Omega B} = \frac{a\sqrt{3} - h}{a\sqrt{3}}$.

Comme $\Omega B = \frac{\sqrt{3}}{3} BD = a \frac{\sqrt{6}}{3}$, on obtient $\omega b = (\sqrt{3}a - h)\sqrt{2}$.

On en déduit alors $bd = (\sqrt{3}a - h)\sqrt{6}$.

Ainsi, l'aire du triangle bde est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times bd^2$, soit $\frac{3\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3}a - h)^2$.



Figures 60 et 61 : 3^e cas.

Le tétraèdre Abde a pour volume $\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3}a - h)^2 \times (\sqrt{3}a - h) = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3}a - h)^3$.

On obtient finalement $\varphi(h) = a^3 - \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3}a - h)^3$.

La fonction volume φ est définie sur $[0 ; a\sqrt{3}]$ par intervalles à l'aide de polynômes de degré 3.

- Si $h \in [0 ; \frac{a\sqrt{3}}{3}]$, $\varphi(h) = \frac{\sqrt{3}}{2}h^3$;

- Si $h \in [\frac{a\sqrt{3}}{3} ; \frac{2a\sqrt{3}}{3}]$, $\varphi(h) = \frac{1}{6}a^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2(h - \frac{a\sqrt{3}}{3}) + \frac{3}{2}a(h - \frac{a\sqrt{3}}{3})^2 - \sqrt{3}(h - \frac{a\sqrt{3}}{3})^3$;

- Si $h \in [\frac{2a\sqrt{3}}{3} ; a\sqrt{3}]$, $\varphi(h) = a^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}(a\sqrt{3} - h)^3$.

Remarque

La fonction φ est continue et dérivable sur $[0 ; a\sqrt{3}]$. Ainsi, les trois arcs se raccordent tangentielllement.

Le point de coordonnées $(\frac{a\sqrt{3}}{2} ; \frac{a^3}{2})$ est centre de symétrie de la courbe.

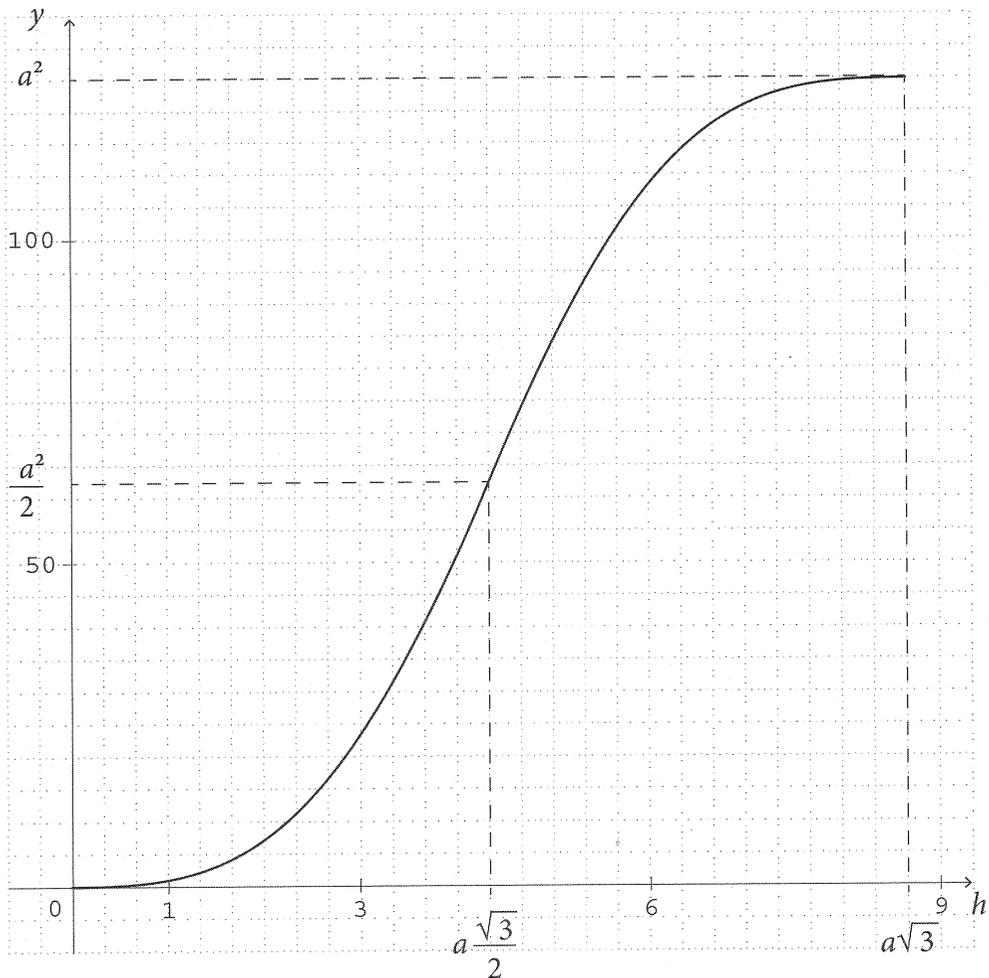


Figure 62 : Représentation graphique en repère orthogonal avec $a = 5$.

Chapitre 4

Activités commentées

1. Cube en position a : fonctions en géométrie de l'espace

► Exercice donné en classe, dans le cadre d'un travail de groupe, en Seconde (2008)

Objectifs

- Travailler sur des fonctions, en lien avec la géométrie dans l'espace.
- Travailler sur des fonctions à partir de leur représentation graphique, par exemple, savoir que la variable est représentée en abscisse et les images en ordonnée.
- Donner des exemples de fonctions constantes.
- Revoir des formules concernant périmètre, aire et volume.

Énoncé

Une boîte cubique contenant du liquide est posée sur un plan horizontal. On note h la hauteur de liquide contenu dans cette boîte. On s'intéresse aux grandeurs suivantes :

- le volume de liquide contenu dans la boîte ;
- l'aire de la surface du liquide en contact avec l'air ;
- le périmètre de cette surface.

Les trois courbes de la page suivante représentent ces trois grandeurs en fonction de h . Malheureusement, une partie de la légende a disparu. À vous d'associer courbes et grandeurs, en argumentant avec clarté et précision.

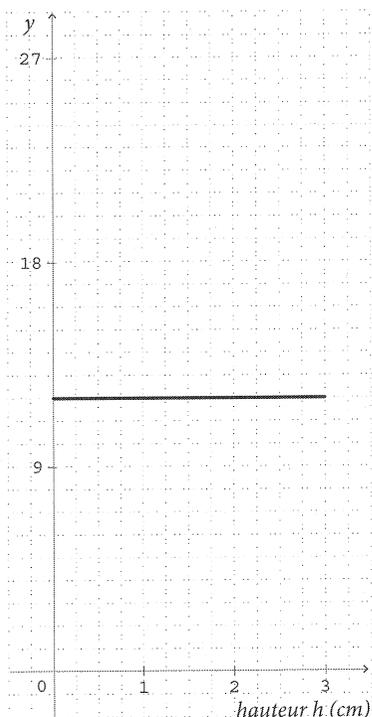


Figure 63.

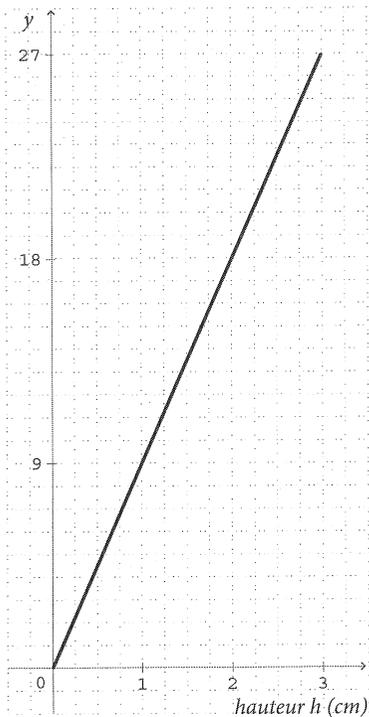


Figure 64.

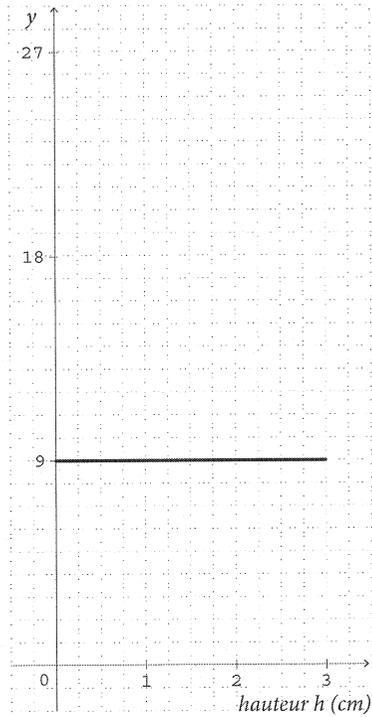


Figure 65.

Commentaires

Cet exercice a été donné en début d'année scolaire, comme premier exercice sur le thème des fonctions. Les élèves travaillaient par groupes de trois ou quatre, pour faciliter la remise en mémoire de leurs connaissances du collègue.

Certains élèves ont eu des difficultés à passer de la situation réelle (un cube contenant du liquide, facilement dessiné) à la représentation des différentes fonctions, et ont dans un premier temps pensé que les segments de droite représentaient le niveau de l'eau.

La majorité des élèves a constaté que deux des fonctions représentées sont constantes et déduit que le deuxième graphique représente la seule fonction non constante : le volume. La distinction entre les représentations de l'aire et du périmètre fut plus délicate : certains pensant que « l'aire est forcément plus grande que le périmètre ».

2. De la position α à la position β

► Exercice donné en devoir surveillé en Seconde (les élèves ont pu y consacrer $\frac{1}{2}$ heure)

Objectifs

Tester la capacité des élèves à :

- utiliser la perspective cavalière ;
- reconnaître un triangle rectangle isocèle, un prisme ;
- prendre des initiatives pour initier la démarche du calcul de la hauteur.

Énoncé

Un cube transparent, d'arête 4 cm, est posé sur une table horizontale. Il contient une hauteur h de liquide, avec $h = 1$ cm. Ce cube est représenté en perspective cavalière ci-dessous. Représenter le liquide (en couleur). On fait maintenant pivoter ce cube autour de l'arête [BF], jusqu'à ce que la diagonale [BD] de la face avant devienne verticale. Représenter ci-dessous, avec la même perspective cavalière que la première figure, le cube dans cette nouvelle position. Les points B et D sont déjà placés.

Dans cette question, les traces de recherche, mêmes incomplètes seront prises en compte dans l'évaluation.
Calculer la hauteur h' de liquide contenu dans le cube dans cette nouvelle position.

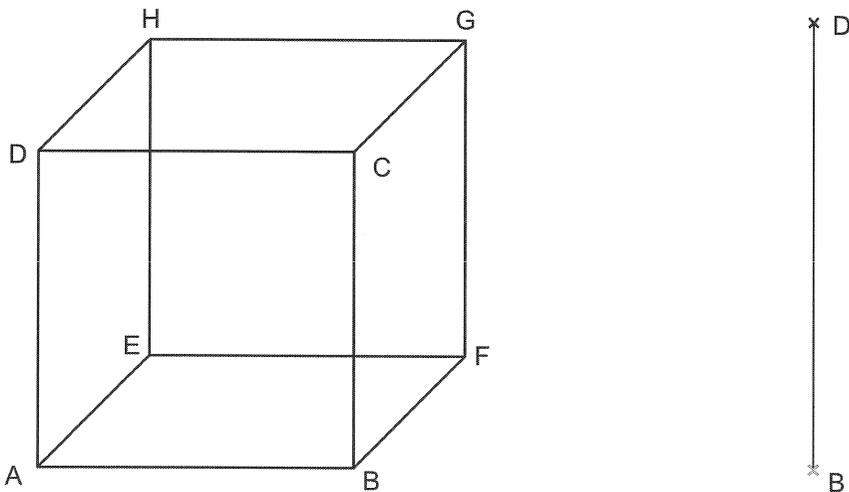


Figure 66.

Commentaires

Les figures (cube et liquide) ont été réalisées correctement. Quelques élèves seulement ont reconnu et utilisé le fait que le liquide avait la forme d'un prisme dans la deuxième position. Peu d'élèves sont arrivés au résultat final, mais beaucoup ont pris des initiatives initiant la démarche du calcul de la hauteur.

3. Cube en position β

► **Exercices donnés en devoir maison en Seconde (2008)**

Exercice 1 : Cuve à mazout

Objectifs

- Réaliser une figure en perspective avec des règles imposées.
- Intérêt de mettre en place une formule de calcul.
- Découverte d'une fonction non affine.
- Retrouver un solide vu en collègue : le prisme.

Énoncé

Line Éhair a fait remplir sa cuve de fuel le 1 octobre 2008. Sa cuve est assimilée à un cube posé sur une de ses arêtes, de telle sorte que la face avant et la face arrière ont une diagonale horizontale et une diagonale verticale. Ces diagonales mesurent 1,40 m.

1. Représenter la cuve en perspective cavalière à l'échelle 1/20, de telle sorte que : le plan contenant la face avant est un plan frontal, le coefficient de réduction est égal à 0,7 et l'angle de fuite est égal à 30°.
2. Quelle est, en litres, la contenance de la cuve ?
3. Au premier janvier suivant, Line se demande combien il lui reste de fuel. Une partie transparente le long de la diagonale verticale de la face avant lui permet de voir la hauteur de fuel restant ; elle mesure cette hauteur et trouve 35 cm. Elle se dit alors : « Comme j'ai consommé les 3/4 en 3 mois, le dernier quart me permettra de tenir encore un mois ». Pourtant, malgré une météo clémente, Line tombe en panne de fuel moins de deux semaines plus tard. Expliquer quelle est l'erreur de raisonnement de Line Éhair.
4. Line décide alors de graduer la « diagonale verticale » tous les décimètres, et d'indiquer avec un marqueur la quantité de fuel restant (en litres).

Recopier et compléter le tableau ci-dessous, après avoir détaillé tous les calculs effectués.

Hauteur de fuel restant (dm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Volume de fuel restant (L)														

Dans un repère, tracer la courbe représentant le volume de fuel restant, en fonction de sa hauteur.

Commentaires

Cet exercice a été donné au moment des premiers contacts avec la notion de fonction. C'est une des premières fonctions non affines rencontrées par les élèves. La reconnaissance du prisme n'a pas été évidente pour tous. Le calcul des différents volumes peut se faire au « cas par cas » ou bien en cherchant

une « formule ». Il était initialement prévu que, lors de la correction, serait tracée la graduation de la « diagonale verticale » de la cuve à mazout à partir de la représentation graphique de la question 4. Mais trop peu d'élèves ayant obtenu cette courbe, cet objectif n'a pu être réalisé. C'est pourquoi l'exercice suivant a été proposé lors d'un devoir à la maison ultérieur.

Exercice 2 : Courbe représentative d'une fonction

Objectifs

- Savoir calculer une image par une fonction définie par son expression algébrique.
- Savoir exploiter une représentation graphique.

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 14]$ par :

- Si $x \in [0 ; 7]$, $f(x) = x^2 \times 7\sqrt{2}$
- Si $x \in]7 ; 14]$, $f(x) = -f(14 - x)$

1. Calculer $f(3)$ (donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à une unité près).
2. Calculer $f(11)$ (donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à une unité près).
3. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous (donner les valeurs arrondies à une unité près).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
$f(x)$															

4. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous (donner les valeurs arrondies à une unité près).

x	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14
$f(x)$														

5. Dans un repère, tracer la courbe représentative de f (à faire sur papier millimétré de préférence).
En utilisant la courbe précédente, compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

$f(x)$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
x										

Commentaires

Cette fois, les élèves ont su tracer la courbe et compléter le tableau de valeurs de la dernière question. La graduation de la « diagonale verticale » de la cuve à mazout a pu se faire lors de la correction. Cela a permis de mettre à nouveau en évidence que la hauteur de fuel restant n'est pas proportionnelle au volume.

- **Exercice donné en devoir maison en Terminale S en 2008. Cet exercice n'a été proposé qu'aux 11 élèves ayant obtenu une moyenne supérieure à 10 au premier trimestre.**

Objectifs

- Étudier une fonction (non affine) définie par intervalles, où les coefficients et les valeurs essentielles de la variable ne sont pas des entiers compris entre -5 et 5 (comme c'est trop souvent le cas).
- Donner du sens aux notions locales de continuité, dérivabilité.
- Redécouvrir le lien entre vitesse et dérivée.
- Redécouvrir les solides usuels à travers des représentations non usuelles (cube, prisme).

Énoncé

A. Étude d'une fonction définie par intervalles

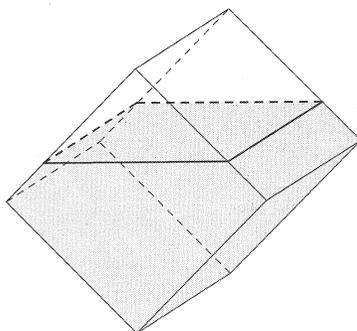
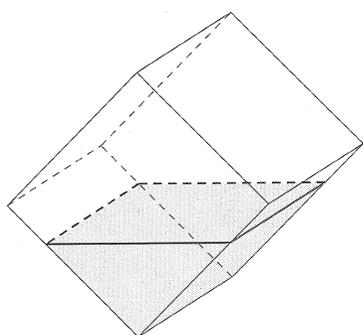
Soit f la fonction numérique de la variable t définie sur $[0 ; 1000]$ par : $f(t) = \sqrt{0,001t}$ lorsque $t \in [0 ; 500]$ et $f(t) = \sqrt{2} - \sqrt{1 - 0,001t}$ lorsque $t \in] 500 ; 1000]$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unité 0,02 cm en abscisse et 20 cm en ordonnée.

1. Démontrer que f est continue en 500, puis que f est continue sur $[0 ; 1000]$.
2. Étudier la dérivabilité de f (à droite) en 0. En déduire une conséquence graphique.
3. Montrer que f est dérivable en 500. Donner l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 500.
4. Calculer pour $t \in [0 ; 500]$ la somme $f(500 - t) + f(500 + t)$. Que peut-on en déduire pour (C) ?
5. f est-elle dérivable en 1000 ? (on pourra utiliser les questions 2 et 4).
6. Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $] 0 ; 1000]$. Calculer $f'(t)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f .
7. Tracer (C).

B. Un problème de remplissage

On considère une citerne à fuel, de forme cubique d'arête 1 mètre, en contact avec le sol sur une arête et qui repose sur deux prismes de ciment de mêmes dimensions dont la base est un triangle rectangle isocèle. On souhaite réaliser une jauge sur la diagonale verticale de la face avant, notée D.



Figures 67 et 68 : La citerne partiellement remplie.

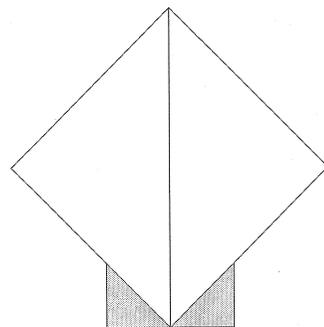


Figure 69 : Vue de la face avant.

On remplit cette citerne avec un débit de 1 litre par seconde. On note à un instant t donné (en secondes), v le volume de fuel (en m^3) et h la hauteur de fuel dans la citerne à partir du sol (en m).

1. Calculer v en fonction du temps t . Quel est le temps de remplissage de la citerne ?
2. Calculer v en fonction de h (on distinguera deux cas).
3. Démontrer enfin que $h = f(t)$ (on distinguera deux cas et on donnera les valeurs de t correspondant à chacune des expressions trouvées).
4. En utilisant la courbe (C), construire une graduation de D indiquant les volumes correspondant à un nombre entier d'hectolitres.
5. On s'intéresse à la vitesse de progression du niveau de fuel sur D. Quel est le lien entre cette vitesse et la fonction f ? Donner cette vitesse pour $t = 1$, $t = 500$, $t = 999$ en précisant l'unité.
6. Etudier le sens de variation de cette vitesse sur l'intervalle $[0 ; 500]$. Etudier le sens de variation de cette vitesse sur l'intervalle $[500 ; 1000]$. Justifier les conclusions obtenues en argumentant sur la forme de la citerne et les conditions de remplissage.

Commentaires (Quelques constats sur le travail des élèves)

Partie A

Les notions locales de continuité et de dérivabilité sont mal assimilées. Seuls 3 élèves établissent la continuité, puis la dérivabilité en 500 (questions 1 et 3).

Les autres élèves, s'ils répondent, se contentent d'une continuité à gauche et d'une dérivabilité à gauche en utilisant l'expression $\sqrt{0,001t} \dots$ puisque pour $t = 500$, $f(t)$ est donnée par cette expression.

Le reste (calcul de dérivée, étude des variations, représentation graphique) est mieux. La non dérivabilité de f en 0 ne pose pas de problème.

Partie B

Question 1 : pas de problème avec les unités de volume, par contre quelques erreurs dans la conversion minutes-secondes : « environ 16,7 min soit 16 min 7 s ».

Questions 2, 3 : quatre élèves ont vu une pyramide au lieu d'un prisme. Tous ont, pour la deuxième moitié de la citerne, raisonné par différence (volume total – partie non remplie).

Question 4 : quatre élèves n'ont pas répondu : il leur a échappé que l'abscisse t de la représentation graphique et le nombre de litres de fuel dans la citerne sont les mêmes, donc que les hectolitres correspondaient aux centaines de secondes.

Les autres élèves ont bien répondu. Certains ont redessiné la cuve et reporté la jauge sur la diagonale.

Question 5 : le lien entre vitesse et fonction initiale a été donné. Par contre, dans leur copie, ils remplacent « vitesse de progression du niveau du fuel sur D » par « vitesse de remplissage »... qui est constante.

Question 6 : des erreurs de calcul trop nombreuses dans le calcul de la dérivée seconde. Toutefois, les élèves ont bien saisi le problème puisque leur conclusion décrit bien une vitesse décroissante pour la première moitié de la citerne, et une vitesse croissante pour la seconde moitié.

La justification contient toujours l'argument de la « surface qui augmente, puis qui diminue », même si la l'expression laisse beaucoup à désirer.

Complément

Durant la correction, on a revu la construction de la jauge et observé localement la non dérivabilité de f' en 500 (construction des demi-tangentes au point d'abscisse 500 avec Geogebra)

4. De la position α à la position γ

► **Exercice donné en devoir maison en Terminale S (29 élèves) en 2008**

Objectifs

- Mieux connaître un solide usuel : le cube
- Préparer la construction de la représentation du cube en position γ .

Énoncé

Cet exercice comporte trois parties : les deux premières sont indépendantes, mais les résultats obtenus seront utiles à la résolution des questions de la troisième partie.

Partie A

On considère un cube ABCDEFGH d'arête a , les sommets étant disposés comme sur la figure ci-contre.

1. Déterminer en fonction de a les valeurs exactes des longueurs BD et DF.
2. Quelle est la nature des triangles BDE et CFH ? (*On justifiera brièvement*)
3. Déterminer deux sommets du cube situés à égale distance des trois sommets B, D et E.
4. Montrer que ces deux sommets sont aussi équidistants de trois autres sommets de ce cube.

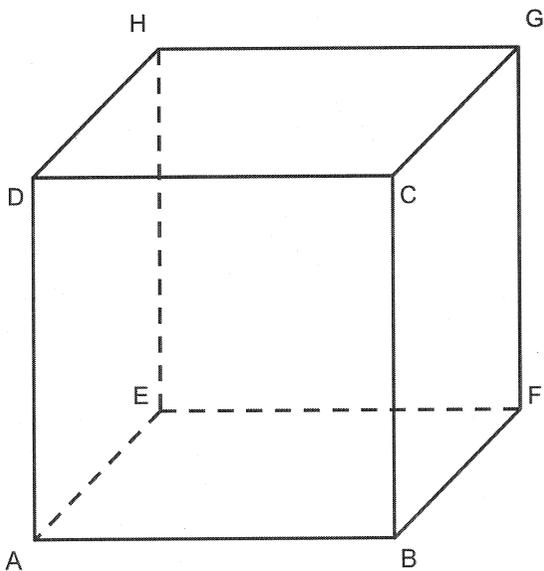


Figure 70 : Le cube.

Partie B

On admet le théorème suivant. « Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points équidistants de A et de B est un plan appelé *plan médiateur* de [AB]. Ce plan est orthogonal en son milieu au segment [AB]. »

On considère désormais trois points non alignés H, I et J de l'espace et on appelle P le plan qui les contient.

1. Quel est l'unique point Ω du plan P situé à égale distance des trois points H, I et J ?
2. On considère un point M situé sur la droite Δ orthogonale en Ω au plan P . Justifier que $MH=MI=MJ$.
3. Réciproquement, on considère un point N de l'espace équidistant de H, I et J. Montrer que N appartient à deux plans sécants et perpendiculaires à P . En déduire que N est obligatoirement situé sur une droite. De quelle droite s'agit-il ?
4. À l'aide des questions précédentes, énoncer un théorème permettant de caractériser le lieu des points équidistants de trois points non alignés de l'espace.

Partie C

On considère à nouveau le cube ABCDEFGH de la partie A.

1. Quel est l'ensemble des points équidistants des points B, D et E ?
2. Quel est l'ensemble des points équidistants des points C, F et H ?
3. En déduire que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.
4. On appelle respectivement O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits aux triangles BDE et CFH et on appelle O le centre du cube. Démontrer que A, G, O, O_1 et O_2 sont alignés.
5. Calculer la longueur AO_1 en fonction de a . En déduire que $AO_1 = O_1O_2 = O_2G$.

Commentaires (Quelques constats sur le travail des élèves)

Partie A : aucune difficulté.

Partie B

Question 1 : l'isobarycentre est cité 4 fois (au lieu du centre du cercle circonscrit au triangle).

Question 2 : beaucoup de paraphrase de l'énoncé (le terme justifier n'a pas toujours été pris au sens de démontrer).

Question 3 : bien, même si le fait que les plans soient sécants a souvent été admis.

Question 4 : beaucoup de difficulté à rédiger un énoncé clair.

Partie C : les calculs rebutent trop souvent les élèves (un bon tiers renonce ou ne produit rien). L'idée de symétrie centrale n'est que rarement bien formulée.

Représentations en perspective cavalière

1. La perspective cavalière

Pour représenter un objet de l'espace dans un plan, on peut utiliser différentes perspectives ; celle qui est habituellement utilisée en cours de mathématiques au collège et au lycée s'appelle la perspective cavalière.

1. Règles de dessin en perspective cavalière

1. Toute figure contenue dans un plan frontal (c'est-à-dire parallèle au plan de projection) est représentée en vraie grandeur (compte tenu de l'échelle).
2. Les droites perpendiculaires au plan de projection sont représentées par des droites qui font toutes le même angle avec l'horizontale du plan de projection (celui-ci étant supposé vertical). Cet angle est appelé « angle de fuite ».
3. Tout segment de longueur d porté par une droite perpendiculaire au plan de projection est représenté par un segment de longueur d' telle que le quotient d'/d soit égal à une constante appelée « coefficient de réduction ».
4. Les arêtes cachées d'un solide sont représentées en pointillés.

Exemple

Représentation en perspective cavalière d'un cube d'arête 4 cm.

Choix du plan frontal : un plan vertical contenant une face.

Choix de l'angle de fuite : $\alpha = 50^\circ$.

Choix du coefficient de réduction : $k = 0,75$.

2. Propriétés de la perspective cavalière

Deux droites parallèles de l'espace sont représentées par deux droites parallèles.

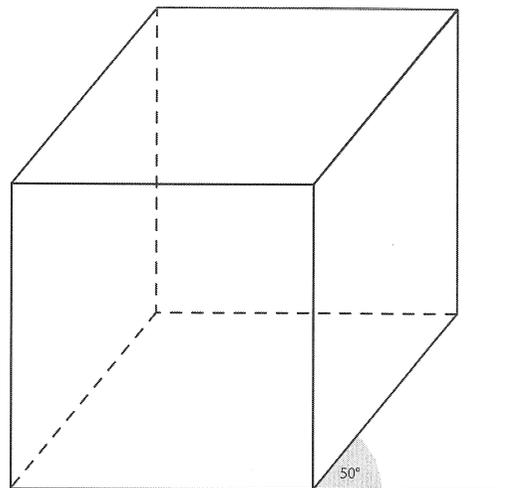


Figure 71 : Le cube en perspective cavalière.

Les proportions sur un segment sont conservées (en particulier, le milieu d'un segment reste au milieu). La perspective cavalière conserve aussi les rapports de longueurs sur des segments parallèles.

2. Variante de la position α

Nous partons d'un cube d'arête a dessiné en perspective cavalière dans la position α . Une des faces du cube est incluse dans le plan frontal (P) et une des faces du cube est incluse dans le plan horizontal (Q). Ces deux plans sont perpendiculaires. Leur droite d'intersection contient l'arête du cube, commune aux deux faces précédentes. Nous notons (Δ) la droite passant par les centres des deux faces horizontales.

Problème

Représenter en perspective cavalière le cube ayant subi la rotation notée r d'axe (Δ) , et d'angle donné θ .

L'angle θ est donné par une de ses représentations dans le plan.

θ est un réel de $[0 ; \pi/2]$.

L'unité d'angle est le radian.

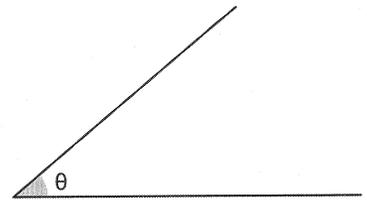


Figure 72 : L'angle θ .

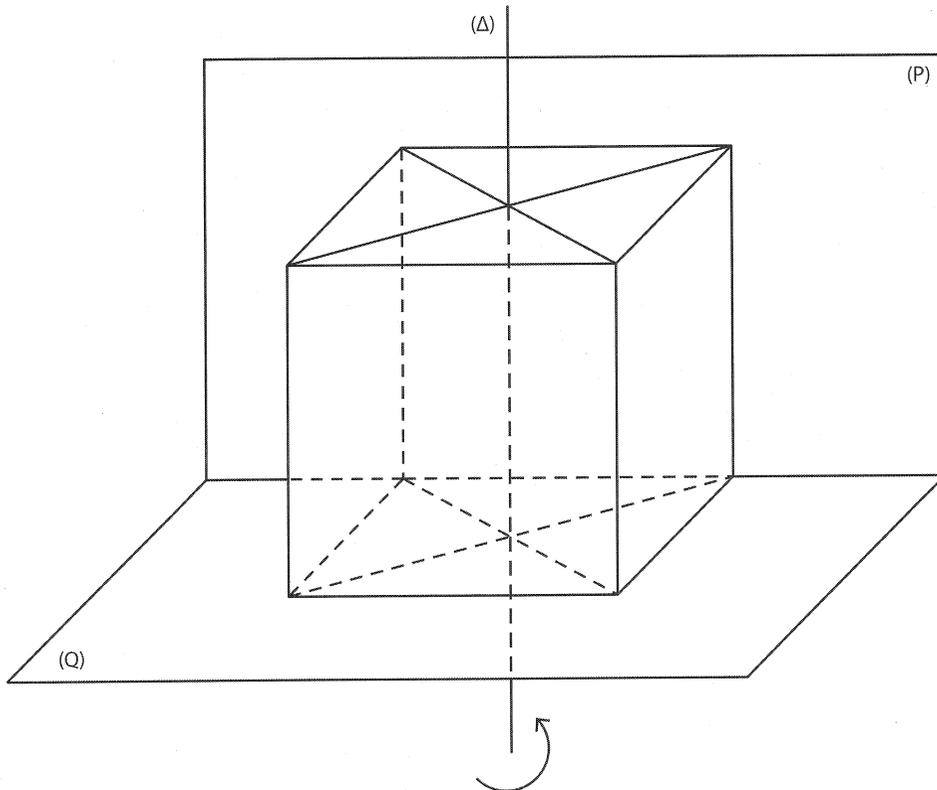


Figure 73 : le cube en position initiale.

1. Analyse de la configuration dans le plan (Q)

Dans le plan horizontal (Q), l'image du carré ABCD de centre I par la rotation r est le carré $A'B'C'D'$, de même centre I. r_Q , rotation de centre I, d'angle θ dans le plan (Q) est la restriction de r à Q ; le point I étant l'intersection de (Δ) et (Q).

Dans le plan (Q), nous avons :

$$r_Q(A) = A' \quad r_Q(B) = B' \quad r_Q(C) = C' \quad r_Q(D) = D' \quad (\text{voir figure 74.1})$$

Dans la vue en perspective, nous savons que :

1. les rapports de distances sont conservés ;
2. les segments $[AB]$ et $[AA_1]$ seront représentés en vraie grandeur, donc nous supposons déjà construits les points A, B, C, D, I et A_1 .

2. Construction

► **Étape 1** : Construction de A' (voir figure 74.2)

Par un report de distance, on construit en Figure 2 deux points α et β tels que I, α et β soient alignés dans cet ordre et tels que le rapport $\frac{I\alpha}{I\beta}$ soit égal au rapport $\frac{IA_1}{IA'}$ (ces distances IA_1 et IA' étant représentées en vraie grandeur en Figure 74.1).

Par une application du théorème de Thalès, nous construisons en figure 74.2 le point A' , intersection de la parallèle à (αA_1) passant par β et de (IA_1) .

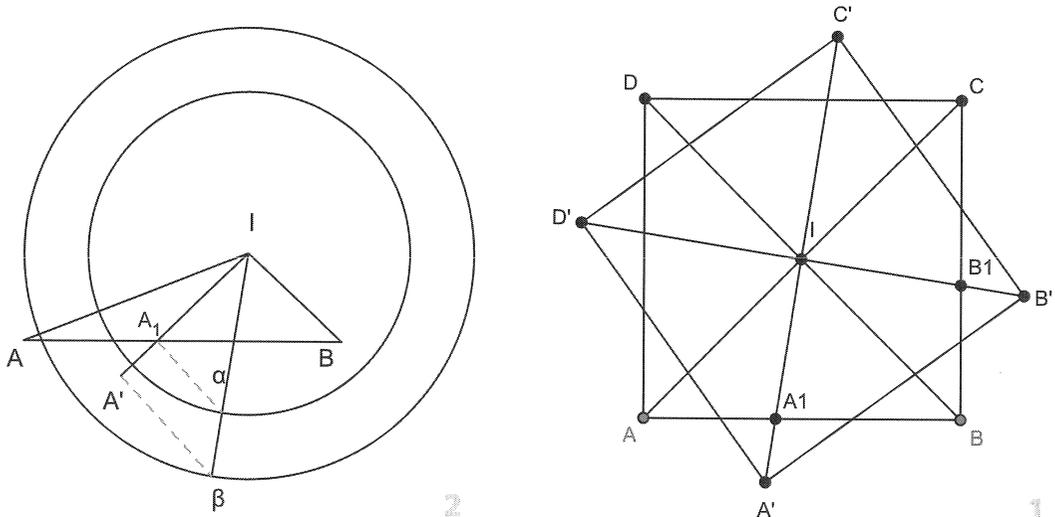


Figure 74.

Remarque

On peut démontrer (en utilisant le théorème de Thalès) que $\frac{AA_1}{AB} = \frac{\sqrt{2} \sin(\theta)}{2 (\cos(\theta) + \sin(\theta))}$

► **Étape 2** : construction de B_1 (Figure 75.2)

Sur les perpendiculaires à (BC) passant par B et C , on construit respectivement les points E et H obtenus en reportant à partir de la figure 75.1 les distances en vraie grandeur BB_1 et CB_1 . Les droites (CH) et (BE) sont alors parallèles, le point B_1 est à l'intersection de (HE) et (BC) .

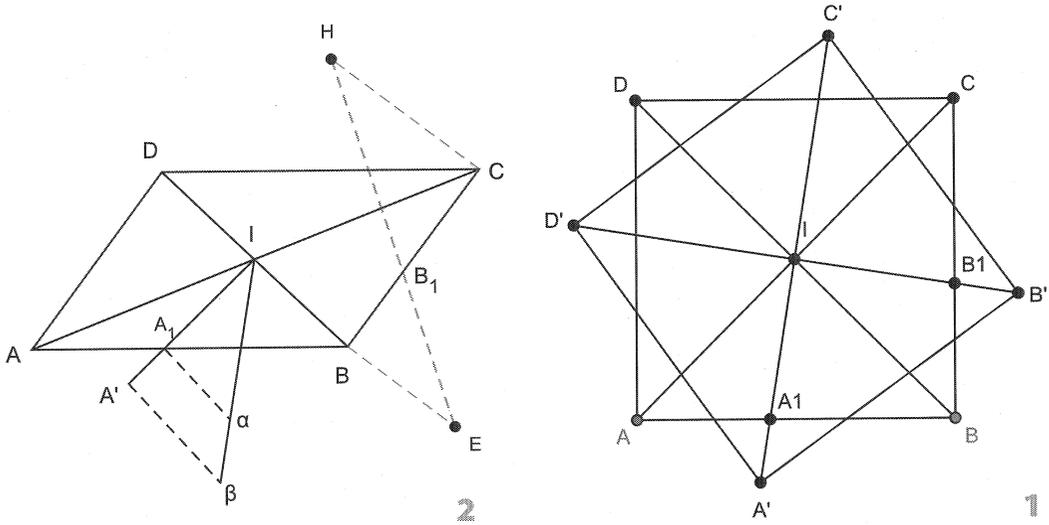


Figure 75.

► **Étape 3** : construction de B', C' et D'

L'égalité des rapports $\frac{IA_1}{IA'}$ et $\frac{IB_1}{IB'}$, l'alignement dans cet ordre de I, B_1 et B' permet de construire B' avec une troisième construction de Thalès (figure 76.2). Les points C' et D' sont alors construits comme symétriques de A' et B' par rapport à I .

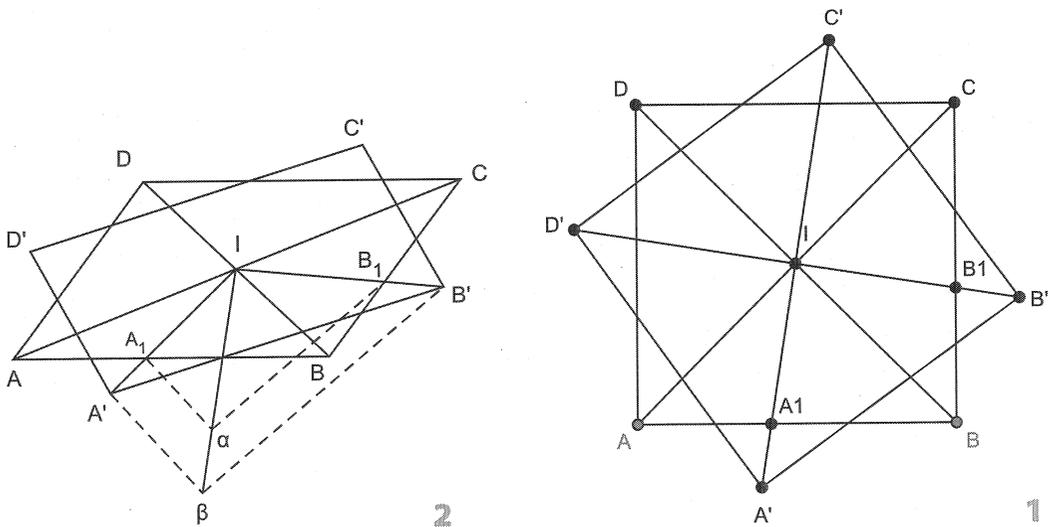


Figure 76.

3. Variante de la position γ

1. Une propriété du cube

Il s'agit de représenter ce cube (ci-contre en position α) en perspective de telle manière que sa diagonale $[AG]$ soit verticale. O est le milieu de $[AG]$: il est donc le centre du cube. $AE = AD = a$ et $GE = GD = a\sqrt{2}$, donc la droite (AG) appartient au plan médiateur de $[DE]$ et par conséquent $(DE) \perp (AG)$. $AE = AB = a$ et $GE = GB = a\sqrt{2}$, donc la droite (AG) appartient au plan médiateur de $[BE]$ et par conséquent $(BE) \perp (AG)$. La droite (AG) est orthogonale aux deux droites sécantes (BE) et (DE) : elle est donc orthogonale au plan (BDE) .

Cette propriété d'une diagonale d'un cube nous permet d'affirmer que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) .

Par ailleurs, le centre de gravité O_1 du triangle équilatéral BDE est équidistant des trois points B, D et E : il est donc situé sur les plans médiateurs respectifs de $[DE]$ et $[BE]$: O_1 est donc situé sur (AG) . Pour les mêmes raisons, le centre de gravité O_2 du triangle équilatéral CFH appartient également à (AG) .

D'autre part, le triangle AO_1E étant un triangle rectangle en O_1 , on peut lui appliquer le théorème de Pythagore.

$$AE = a, EO_1 = EB \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = a \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ donc } AO_1^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 \text{ d'où } AO_1^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$\text{et enfin, } AO_1 = a \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Un calcul analogue dans le triangle GO_2H rectangle en O_2 permet de montrer que $O_2G = a \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ceci nous prouve que les trois segments $[AO_1]$, $[O_1O_2]$ et $[O_2G]$ ont la même longueur.

En conclusion, dans la position γ , la diagonale (AG) est verticale et les plans (DBE) et (CFH) , qui lui sont orthogonaux, sont deux plans horizontaux.

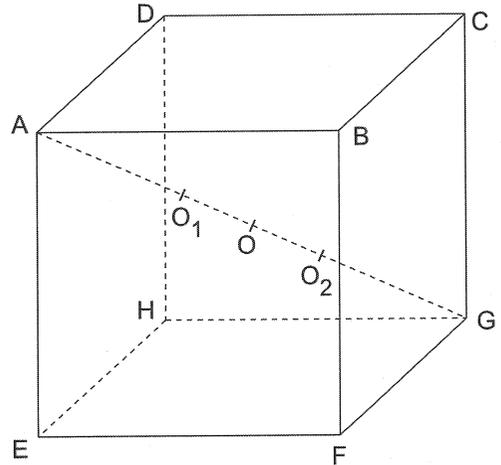


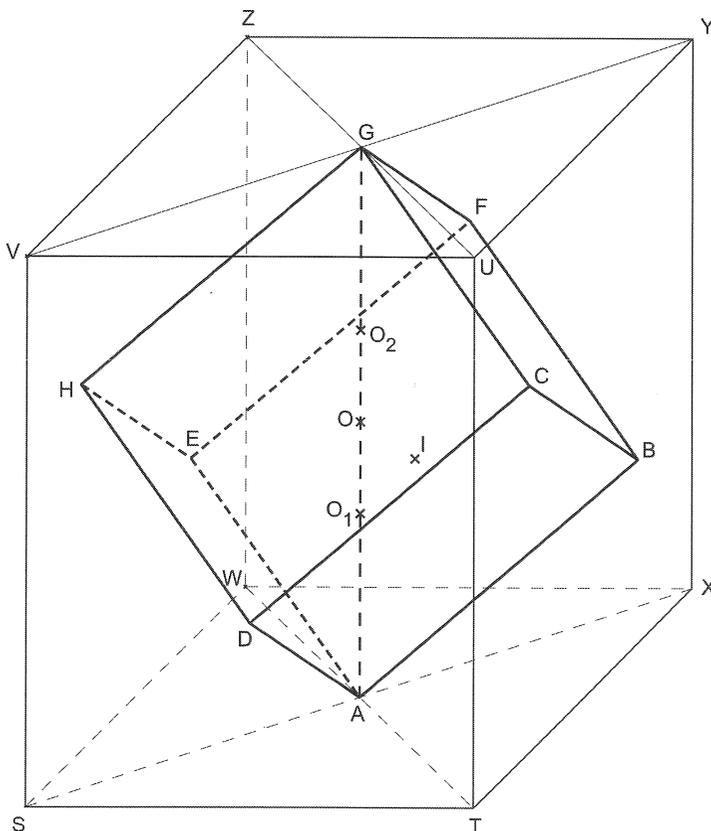
Figure 78.

2. Représentation en perspective cavalière du cube dans la position γ

Les considérations du paragraphe précédent permettent une représentation en perspective cavalière de ce cube, le choix étant fait de représenter les segments $[AG]$ et $[BE]$ dans un plan parallèle au plan frontal.

Les différentes étapes de la construction sont :

- on construit dans la position α un parallélépipède rectangle $STUVWXYZ$ tel que
- $ST = a\sqrt{2}$, $SW = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$ et $SV = a\sqrt{3}$;
- on place les points A et G respectivement au centre des faces $STXW$ et $VUYZ$;
- on trace le segment $[AG]$ vertical ($AG = a\sqrt{3}$) et on le partage en trois parties égales ;
- du point O_1 situé au tiers du segment à partir de A , on construit une parallèle à (TX) ;
- sur cette parallèle, on place les points I et D tels que $\vec{O_1I} = \frac{1}{4} \vec{TX}$ et $\vec{O_1D} = -\frac{1}{2} \vec{TX}$;
- on construit alors le segment $[BE]$ de milieu I , parallèle et de même longueur que $[ST]$;
- on complète le triangle BDE de centre de gravité O_1 ;
- les symétriques de B , D et E par rapport au milieu O du segment $[AG]$ (appelés respectivement H , F et C) sont les trois derniers sommets de ce cube, dont il ne reste qu'à tracer les arêtes.



A appartient à la face $STXW$,
 B et C à la face $TXYU$,
 D à la face $STUV$,
 E et H à la face $SWZV$,
 F à la face $WXYZ$
 et G à la face $VUYZ$.

Figure 79 : Le cube dans le pavé.

4. De la position α à la position γ

Le problème

En partant d'une représentation du cube de côté a et de centre O en position α , nous nous proposons de décrire les étapes de construction conduisant à la représentation du cube en position γ .

Pour cela, nous utilisons la rotation d'axe (IJ) , où I et J sont les milieux respectifs de $[AE]$ et $[CG]$, transformant le segment diagonal $[HB]$ en un segment $[H'B']$ vertical, ce segment contenant les centres des faces supérieure et inférieure (Figure 80).

Remarque

(OH) étant dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, l'angle de rotation θ est égal à $\widehat{HOH'}$.

Nous pouvons établir que $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, ce qui donne pour l'angle aigu θ une mesure d'environ $54,73^\circ$.

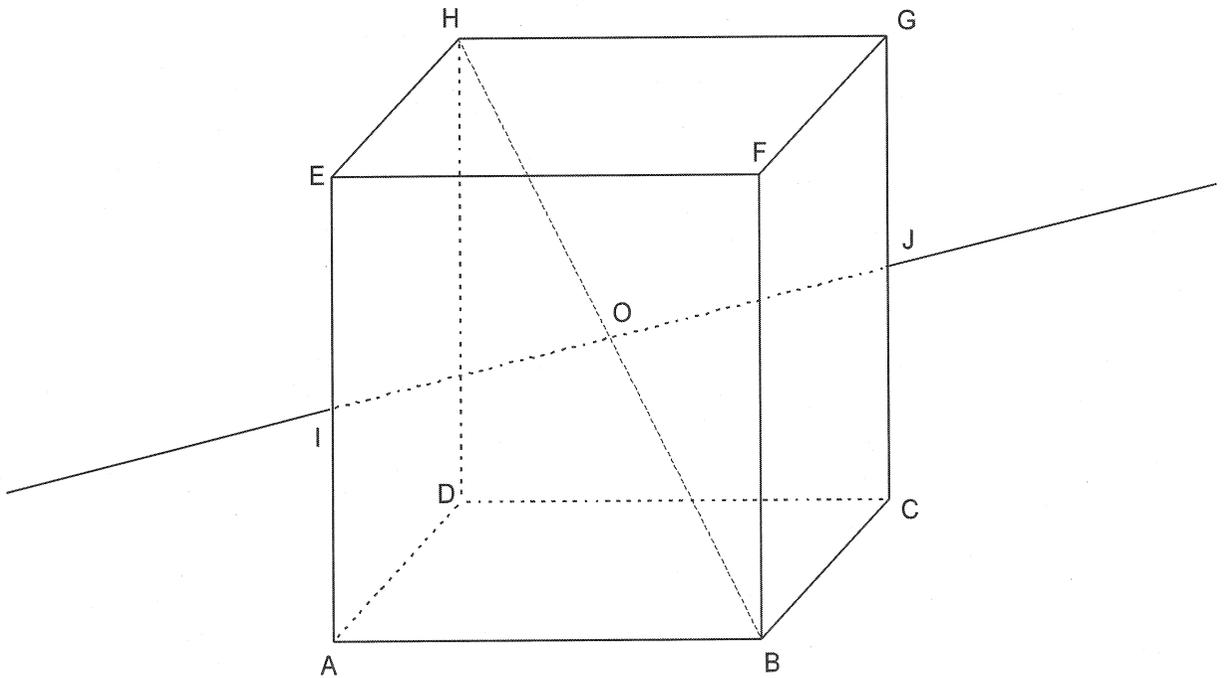


Figure 80.

► Étape 1 : construction de H' et B'

Le segment $[H'B']$ étant vertical, il est représenté en vraie grandeur. Il nous faut donc faire apparaître sur le dessin la longueur $a\sqrt{3}$ en vraie grandeur. Une construction classique : c'est la longueur MF (Figure 81).

Sur la verticale passant par O et par les centres K et L respectivement des faces supérieure et inférieure, nous plaçons H' et B' tels que $OH' = OB' = a \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Figure 82).

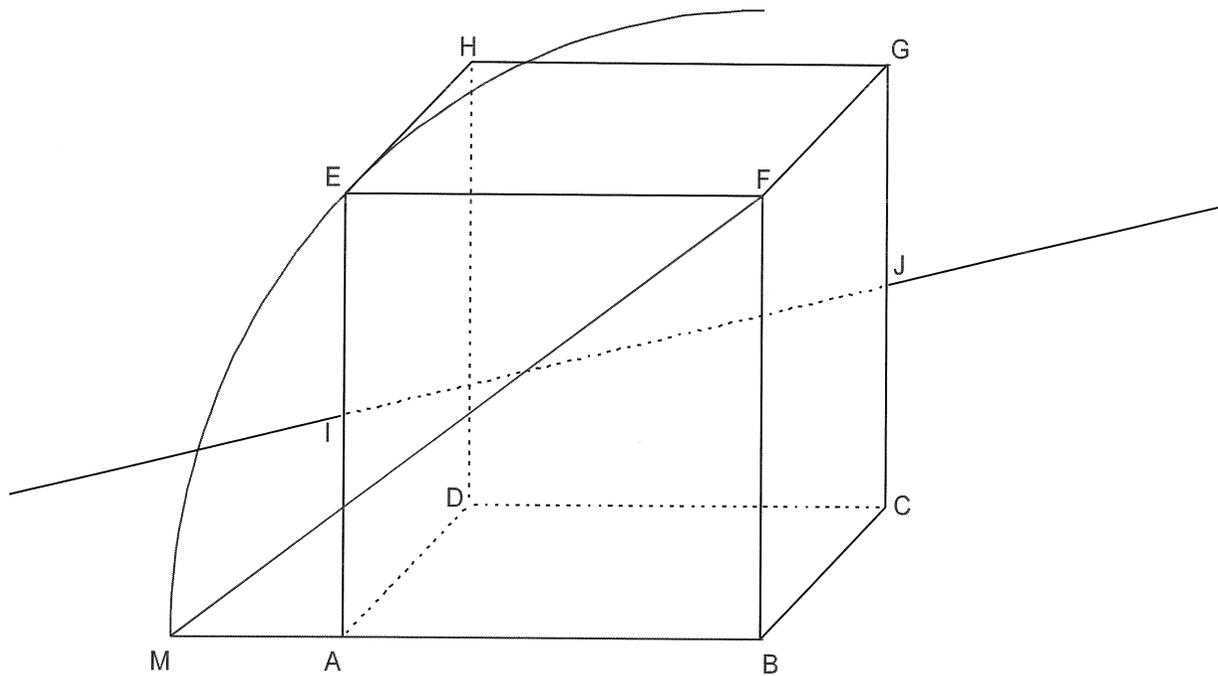


Figure 81.

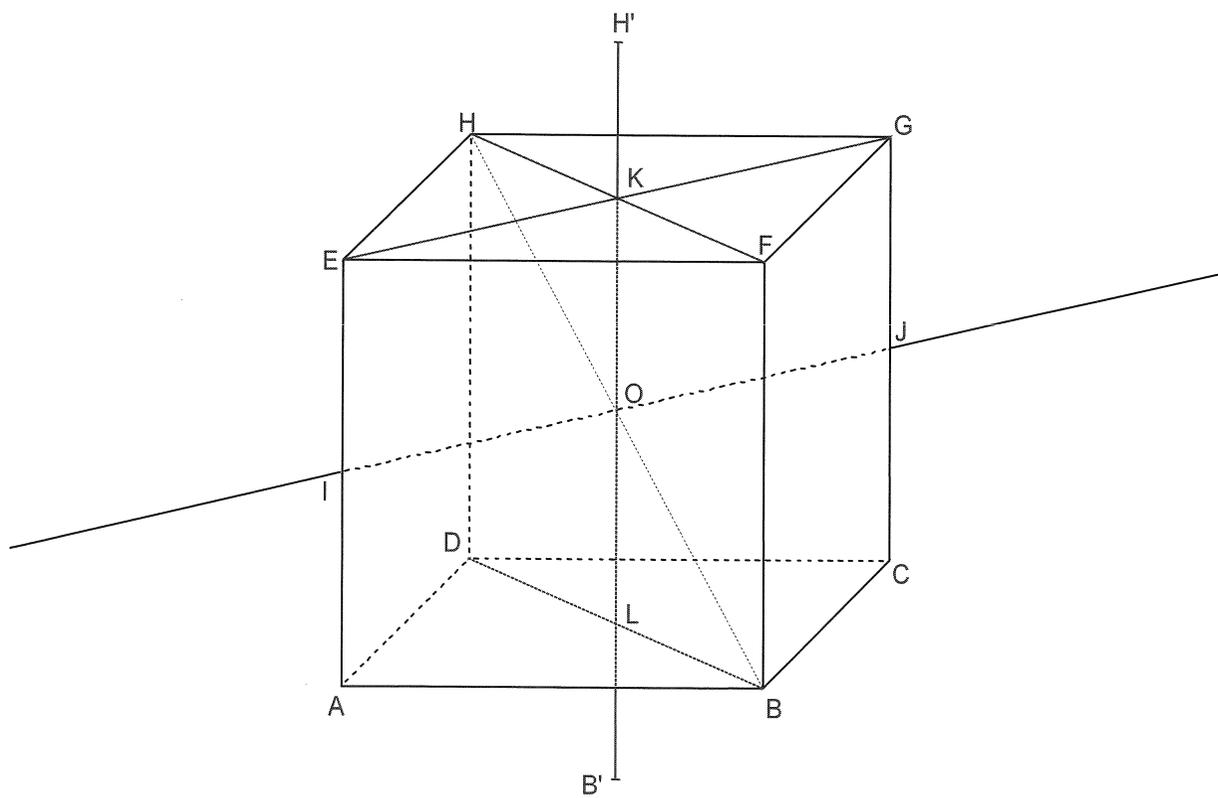


Figure 82.

► **Étape 2 : construction de G' et E'**

Pour construire G', on peut remarquer que [OH'] et [JG] sont deux segments parallèles et perpendiculaires à [IJ] respectivement en O et J. (IJ) étant l'axe de la rotation, nous avons l'égalité $\widehat{H'OF} = \widehat{GJG'} = \theta$.

Comme nous avons $OH' = OF = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $JG = JG' = \frac{a}{2}$, les triangles H'OF et GJG' sont isocèles, semblables et situés dans deux plans parallèles.

Ils sont alors représentés par deux triangles semblables (Figure 84).

La construction de E' se fait selon la même procédure (Figure 84).

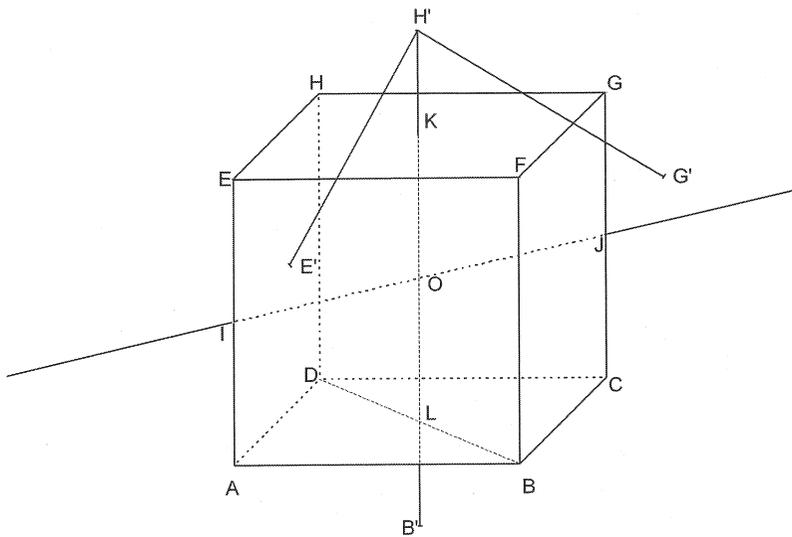


Figure 83.

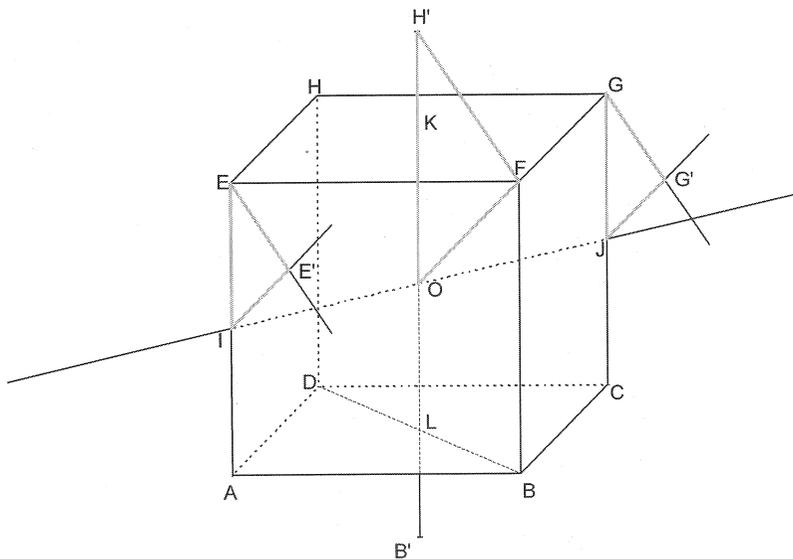


Figure 84.

► **Étape 3 : construction de C' et A'**

Par la rotation, le segment $[CG]$ de milieu J a pour image le segment $[C'G']$ de milieu J . Nous construisons alors le point C' par symétrie de centre J (Figure 85).

De la même façon, le point A' est le symétrique de E' par rapport à I (Figure 86).

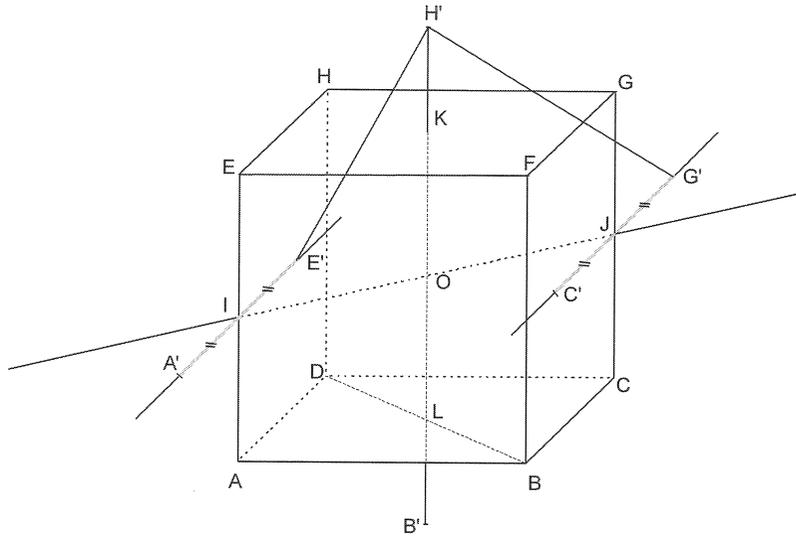


Figure 85.

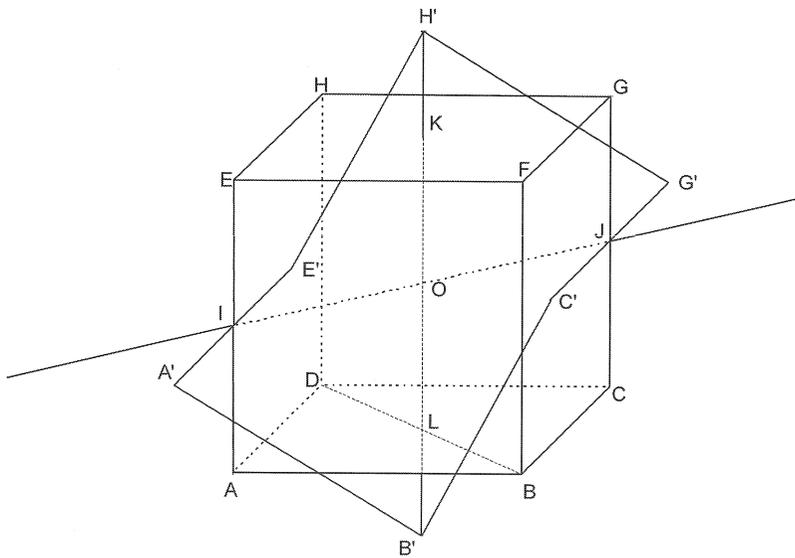


Figure 86.

► **Étape 4 : construction de F' et D'**

Les images des carrés ABCD et EFGH sont des carrés, nous construisons alors les deux derniers sommets F' et D' tels que A'B'C'D' et E'F'G'H' soient des parallélogrammes (Figure 87).

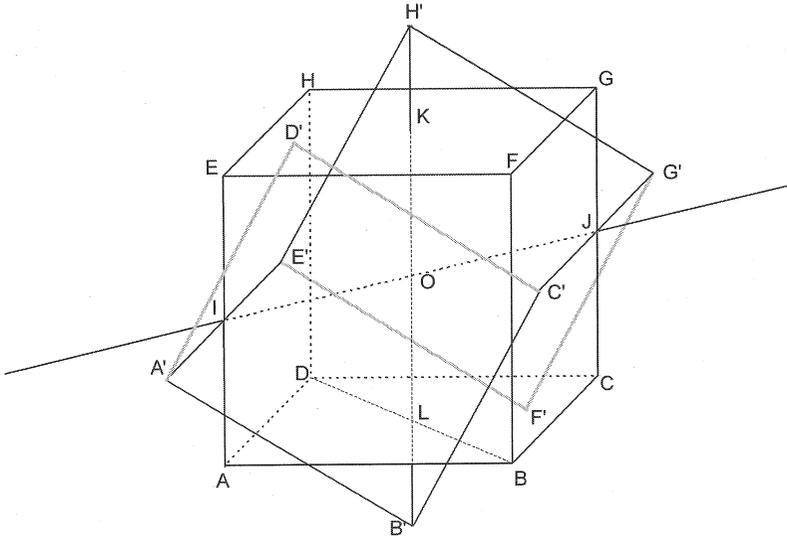


Figure 87.

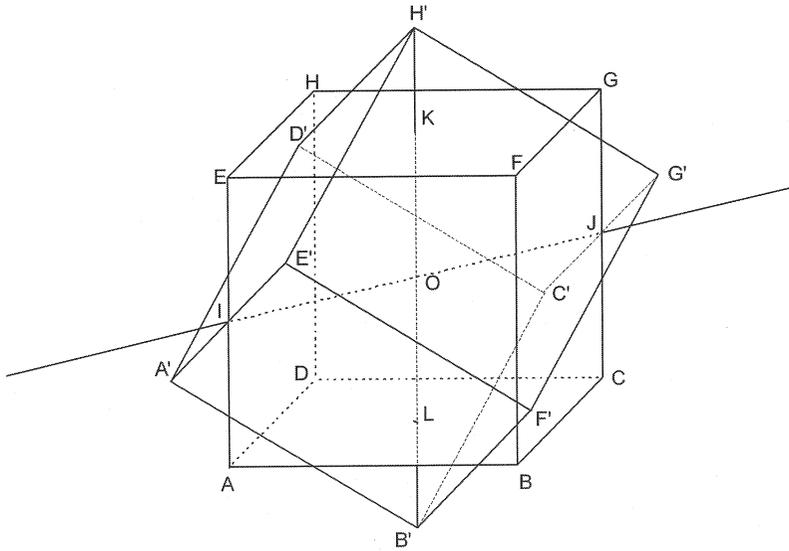


Figure 88.

Conclusion : le cube en position α est, après rotation en position γ .

Bibliographie

- Aebischer Anne-Marie *et al.*, *De la sphère au plan*, Besançon, Presses universitaires de Franche-Comté, 2009.
- Audibert Gérard, *La perspective cavalière*, Paris, APMEP, 1990.
- Bahr Edouard, *Le Dessin technique de la tuyauterie industrielle*, Paris, Technip, 1991.
- Bayart Claire *et al.*, « Voir et raisonner : à la conquête de l'espace au collège » in *Repères IREM*, Metz, Topiques éditions, n° 33, octobre 1998, p. 19-36.
- Bettinelli Bernard, *Maths en forme*, Besançon, Presses universitaires de Franche-Comté, 2006.
- Bonafé Freddy, « La représentation en perspective cavalière » in *Bulletin vert*, Paris, APMEP, n° 363, p. 151-164.
- Brunet Robert, Naudeillo Jacques, « Le cube, changement de position » in *Le dessin géométrique de la main à l'ordinateur*, Lille, IREM de Lille, 1998, p. 293-302.
- Chevalier André, *Guide du dessinateur industriel*, Paris, Hachette Technique, 2001.
- Delahaye de Jean-Paul, *Les inattendus mathématiques*, Collection « Pour la science », Paris, Belin, 2004.
- Delahaye de Jean-Paul, *Le fascinant nombre π* , Collection « Pour la science », Paris, Belin, 1997.
- Denière Jocelyne, Denière Lysiane, *La géométrie... pour le plaisir*, Dunkerque, Kim, 1998.
- Gras Régis *et al.*, *Pour un enseignement problématisé des mathématiques tome 1*, Paris, APMEP, 2003.
- Gras Régis *et al.*, *Pour un enseignement problématisé des mathématiques tome 2*, Paris, APMEP, 2003.
- Missenard Didier, *Exos-malices*, Paris, ACL-éditions, 1997.
- Terracher Pierre-Henri *et al.*, *Mathématiques seconde*, Paris, Hachette, 1986.

Ressources en ligne

- Bettinelli Bernard, *Cube en perspective cavalière*, IREM de Franche-Comté, 2010
<http://www-irem.univ-fcomte.fr/>, rubrique « Documents des groupes de travail »
- Bulletin officiel n° 30 du 23 juillet 2009
<http://www.education.gouv.fr/cid28928/mene0913405a.html>
- Boussard Alain, Magnenet Michel, *Pavé dans une pyramide*, IREM de Franche-Comté, 2010
<http://www-irem.univ-fcomte.fr/>, rubrique « Documents des groupes de travail »
- L'article Wikipedia sur la perspective cavalière
http://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective_cavalière

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCHE-COMTÉ
Université de Franche-Comté
47 rue Mégevand - 25030 Besançon Cedex

Imprimé par MESSAGES SAS
111, rue Vauquelin - 31100 Toulouse

Dépôt légal : quatrième trimestre 2011