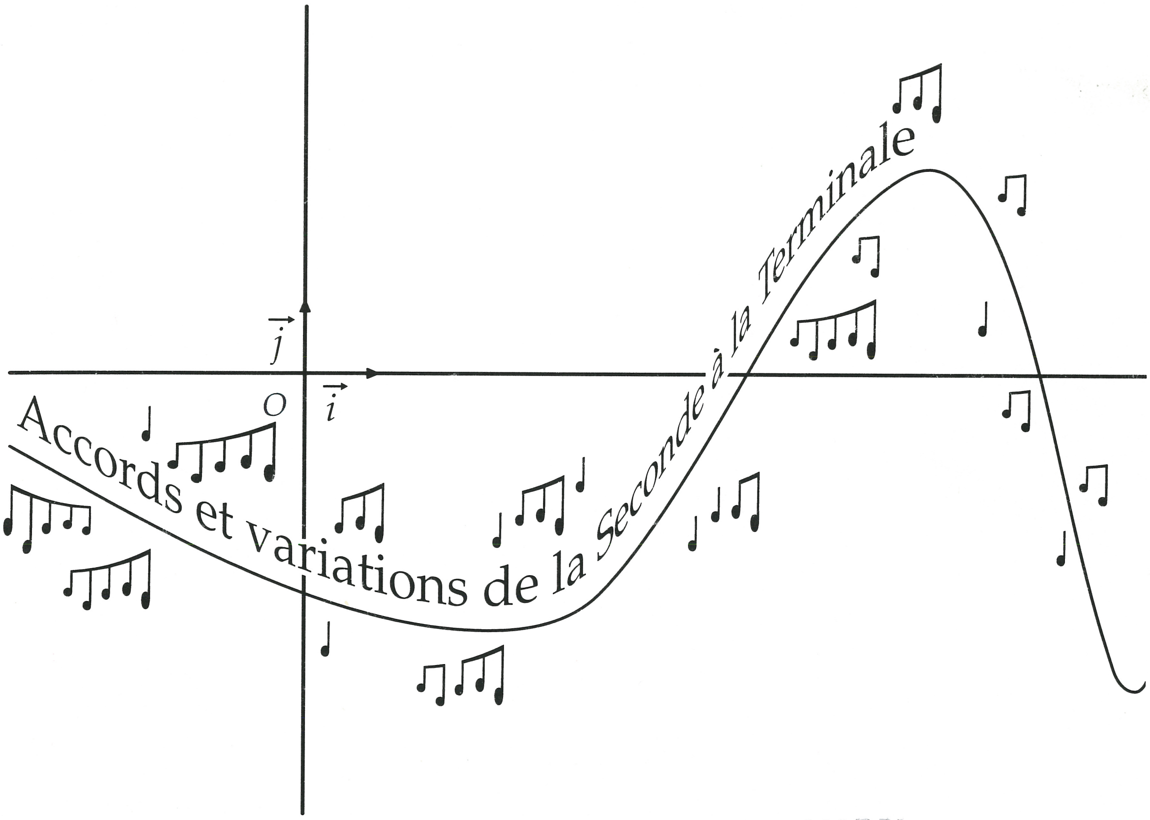
Les Publications de
l'IREM de BESANÇON

Les fonctions

en mathématiques et en sciences physiques



Groupe
MATHÉMATIQUES-SCIENCES PHYSIQUES

Presses universitaires de Franche-Comté

Les fonctions en mathématiques et en sciences physiques

*Les Publications de l'*IREM de BESANÇON

Directrice de série Hombeline Languereau

Parutions récentes dans la même série

Instsruments géométriques à l'école élémentaire,
Groupe Élémentaire, ISBN 978-2-84867-222-9, 2008

Le carrousel des nombres. Jeux numériques pour l'école primaire,
Bernard Bettinelli, ISBN 978-2-84867-181-9, 2007

Rallye mathématique de Franche-Comté 2005,
Groupe Rallye, ISBN 2-84867-154-8, 2006

De la sphère au plan,
Groupes Lycée et Cartographie, ISBN 2-84867-098-3, 2005

Lois continues, test d'adéquation. Une approche pour non spécialiste,
Groupe Probabilités & Statistique, ISBN 2-84867-101-7, 2005

Parutions récentes dans la série Didactiques

Du trinôme du second degré à la théorie de Galois. Une croisière conceptuelle
Jean Merker, ISBN 978-2-84867-205-2, 2007

Le calcul mental, entre sens et technique
Denis Butlen, ISBN 978-2-84867-198-7, 2007

Maths en formes,
Bernard Bettinelli, ISBN 2-84867-138-6, 2006

ISBN 978-2-84867-228-1

Les $\int$onctions en mathématiques et en sciences physiques

Accords et variations de la Seconde à la Terminale

♫

Groupe Mathématiques-Sciences Physiques
IREM de Franche-Comté

Mai 2008

Les auteurs

Claire Chalnot, professeure agrégée de sciences physiques au lycée Jules Haag de Besançon, est animatrice à l'IREM de Franche-Comté où elle participe aux activités du groupe « liaison mathématiques-sciences physiques au lycée » ainsi qu'à la commission inter-IREM « mathématiques et sciences expérimentales ».

Françoise de Labachelerie, professeure agrégée de mathématiques au lycée Duhamel de Dole, est animatrice à l'IREM de Franche-Comté où elle est responsable du groupe « liaison mathématiques-sciences physiques au lycée ». Elle participe également au groupe « lycée ». Elle a participé à la commission inter-IREM « second cycle ».

Philippe Guillaume professeur certifié de sciences physiques au lycée Ledoux de Besançon, est animateur à l'IREM de Franche-Comté où il participe aux activités du groupe « liaison mathématiques-sciences physiques au lycée »

Christine Huot professeure certifiée de mathématiques à l'Institution Sainte Marie de Belfort, est animatrice à l'IREM de Franche-Comté où elle participe au groupe « liaison mathématiques-sciences physiques au lycée ».

Michel Magnenet professeur agrégé de mathématiques honoraire, est animateur à l'IREM de Franche-Comté où il met ses disponibilités au service des groupes « liaison mathématiques-sciences physiques au lycée », « lycée » et « rallye mathématique de Franche-Comté ».

Alain Parmentelat professeur agrégé de mathématiques au lycée Hypolite Friant d'Arbois, est animateur à l'IREM de Franche-Comté où il participe aux activités des groupes « liaison mathématiques-sciences physiques au lycée », « lycée » et « rallye mathématique de Franche-Comté ».

Philippe Speyer-Pays professeur certifié de mathématiques au lycée Jean Michel de Lons-le Saunier, est animateur à l'IREM de Franche-Comté où il participe aux activités des groupes « liaison mathématiques-sciences physiques au lycée » et « lycée ».

Stéphane Verjux professeur agrégé de sciences physiques au lycée Pasteur de Besançon, est animateur à l'IREM de Franche-Comté où il participe aux activités du groupe « liaison mathématiques-sciences physiques au lycée ».

Jean-Marie Vigoureux professeur de physique des universités à l'Université de Franche-Comté, est animateur à l'IREM de Franche-Comté où il participe aux activités du groupe « liaison mathématiques-sciences-physiques au lycée ».

Avec la collaboration de Mickaël Dunand, professeur certifié de sciences physiques au collège Beau-Soleil à Chelles (77), de Nicolas Magnin, professeur agrégé de mathématiques au lycée Pasteur de Besançon et de Françoise Raba, professeure agrégée de sciences physiques au lycée Pergaud de Besançon.

Action de l'IREM de Franche-Comté

avec le soutien financier

de l'Université de Franche-Comté,
dans le cadre du plan quadriennal 2008-2011

avec les moyens horaires

du rectorat de l'académie de Besançon,

du ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche,
(DGESCO)

de l'Université de Franche-Comté

Sommaire

Introduction

Des constats

Les professeurs de sciences physiques constatent que ce sont fréquemment des éléments mathématiques qui sont à l'origine des difficultés des élèves. Ces professeurs sont souvent amenés à effectuer quelques « rappels » nécessaires à leur enseignement. En effet, les mathématiques sont constitutives de la physique, et les apprentissages de ces disciplines sont nécessairement liés. Les documents d'accompagnement des derniers programmes insistent d'ailleurs sur l'importance de ce lien : ils proposent par exemple un document commun sur la radioactivité pour les programmes de TS (applicables à compter de 2002), et une introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques pour les programmes de collège (applicables à compter de 2005). Chaque changement dans l'enseignement de notions mathématiques devrait ainsi se répercuter en sciences physiques. Néanmoins, la coordination entre professeurs de mathématiques et de sciences physiques n'est pas institutionnalisée, et le professeur de sciences physiques n'est pas toujours au courant du vocabulaire, des connaissances et de la pratique pédagogique utilisés actuellement en mathématiques. Par exemple, la fonction exponentielle auparavant introduite comme fonction réciproque de la fonction logarithme népérien, est maintenant définie comme solution de l'équation différentielle $y' = y$ prenant la valeur 1 en 0 : cette nouvelle présentation peut être plus adaptée à une utilisation en physique, encore faut-il savoir qu'il en est ainsi.

Par ailleurs, certaines notions mathématiques, nouvelles pour les élèves, peuvent être abordées par le biais de la physique (notion de dérivée à partir de la vitesse instantanée, produit scalaire à partir du travail d'une force), mais le vocabulaire et les notations employés en mathématiques ne sont pas toujours ceux de la physique.

De leur côté, les élèves perçoivent souvent les différentes disciplines comme des enseignements différents, voire contradictoires. Une élève de TS a quitté le lycée (mention très bien en poche) persuadée que les formules de dérivation n'étaient pas les mêmes en mathématiques et en physique, à cause d'un lien mal établi entre les différentes notations (voir p. 39 de ce document). On peut penser que de nombreux élèves sont ainsi perturbés par des notations et un vocabulaire différents selon les disciplines. Néanmoins ces différences subsistent pour des raisons propres à chaque discipline.

Pourquoi cette brochure ?

Nous espérons favoriser un travail d'harmonisation entre disciplines au niveau d'une classe, et aider les enseignants lors de la mise en place de groupes de travail « mathématiques et physique-chimie » au sein des établissements. Cette brochure s'adresse ainsi aux professeurs de mathématiques et de sciences physiques et plus particulièrement à ceux enseignant en classes de Seconde, Première S et Terminale S.

Comment ?

Pour aborder ce vaste problème, nous avons limité notre recherche au domaine des fonctions, et même dans ce domaine nous n'avons pas cherché à être exhaustifs. Nous avons analysé quelques difficultés rencontrées, à partir :
- de remarques d'élèves ou de professeurs,
- d'exercices issus de manuels de physique-chimie ou d'annales du baccalauréat,
- des programmes et documents d'accompagnement (classes de Seconde, Première S et Terminale S) des deux disciplines.

Dans notre travail de groupe, nous commençons par étudier des exercices de physique ou chimie dans lesquels nous analysons les notions mathématiques abordées. Nous les avons organisées en trois catégories :
- des généralités, qui concernent principalement la classe de Seconde ;
- la dérivation, étudiée en Première S ;
- les équations différentielles, abordées en Terminale S.

Pour une meilleure fonctionnalité et compréhension de la brochure, pour chaque notion abordée, nous avons préféré structurer de la façon suivante : nous commençons par présenter les outils mathématiques à travers une fiche de synthèse du vocabulaire employé et des connaissances en mathématiques avant de les mettre en parallèle avec les domaines correspondants de la physique-chimie. Ceci permet également d'identifier les divergences et les points de convergence entre les deux matières.

Après ces fiches de synthèse, nous proposons d'abord des exercices de mathématiques « classiques » (c'est-à-dire ceux que tous les enseignants traitent en général) et centrés sur des notions utilisées en sciences physiques. Pour chaque exercice nous donnons un exemple de correction. Ces exercices de mathématiques, avec leur correction, s'adressent en premier lieu aux enseignants de sciences physiques, qui auront ainsi une meilleure connaissance du travail attendu en cours de mathématiques. Nous proposons ensuite des exercices de sciences physiques, qui sont également des exercices « classiques », suivis eux aussi d'un exemple de correction. Ces exercices de sciences physiques, avec leur correction, s'adressent eux en premier lieu aux enseignants de mathématiques, qui auront ainsi une meilleure connaissance du travail attendu en cours de physique. Parfois nous proposons une autre formulation de ces exercices, en meilleur accord avec les connaissances mathématiques des élèves de façon à améliorer la cohérence au niveau des outils et des notations. Ces exercices peuvent permettre un travail coordonné entre mathématiques et physique-chimie.

En fin de brochure, des tableaux comparatifs établis à partir des programmes des classes de Seconde, Première S et Terminale S permettent une visualisation de la chronologie des apprentissages, en mathématiques et en sciences physiques.

Première partie

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

I Notion de fonction

A. Notion de fonction en mathématiques

Objectifs en classe de Seconde : expliciter, sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative), la notion de fonction, et étudier quelques fonctions de références. Les fonctions abordées sont en général des fonctions numériques, et une fonction est perçue comme un dispositif capable de produire une valeur numérique quand on introduit un nombre.

Définition

Soit E un ensemble de réels. Une ***fonction*** définie sur E est un procédé qui associe, à tout nombre de E, un unique nombre réel.

Exemple

À tout réel de $[-2\ ;\ 3]$, on associe son carré, diminué de 3.

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} [-2\ ;\ 3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 3 \end{array}$$

f est la ***fonction***.

x est la ***variable***.

$x^2 - 3$ est l'***image*** de x par la fonction f.
On note cette image $f(x)$.
On a donc : $f(x) = x^2 - 3$.

Définition

On suppose que le plan est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$.

La représentation graphique $(\mathcal{C})$ de la fonction f dans ce repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, où x appartient à E.

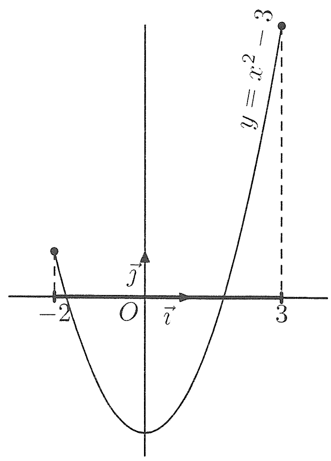
L'***équation*** de la courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O\ :\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$ est l'égalité $y = f(x)$ vérifiée par les coordonnées de tous les points de $(\mathcal{C})$ et uniquement par les coordonnées de ces points ; ce que l'on peut écrire : $M(x ; y) \in (\mathcal{C})$ si et seulement si $y = f(x)$.

Exemple

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} [-2\ ;\ 3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 3 \end{array}$$

Elle a pour équation : $y = x^2 - 3$.



B. Notion de fonction en physique et en chimie

En physique, la description d'un phénomène s'effectue par la mesure de « grandeurs physiques » (par exemple : pression, volume, force...) qui sont en général interdépendantes. Quand l'une varie, les autres évoluent aussi selon certaines lois. Le physicien cherche à déterminer ces lois. Les grandeurs utilisées en physique ou en chimie sont très nombreuses et variées : intensité du courant i, tension entre deux points d'un circuit u, quantité d'électricité ou charge électrique q, énergie E, quantité de matière m, avancement x d'une réaction en chimie, déplacement x en physique, pression P, température T, conductance G...

L'évolution d'une grandeur lorsqu'une autre grandeur varie peut souvent être décrite par une fonction mathématique. D'une manière générale, les lois de la physique-chimie se traduisent par des relations entre diverses grandeurs du type $f(x, y, z) = 0$. C'est un choix du physicien d'en fixer certaines, afin de se ramener à des fonctions, en général d'une variable au lycée. Par exemple, en thermodynamique, la pression P, le volume V et la température T vérifient $\varphi(P, V, T) = 0$, mais on peut choisir d'étudier la pression P en fonction de la température T à volume V constant. Dans ce cas, si une mesure de pression P_1 correspond à la valeur de la température T_1, on notera $P_1 = f(T_1)$ en supposant qu'il existe une fonction f qui permet de générer la valeur de P connaissant la valeur de T. Au lieu de noter $P = f(T)$, il sera commode d'écrire $P(T)$, ce qui confère à la lettre P un double statut, parfois préjudiciable à la compréhension des élèves, celui de grandeur et celui de fonction.

La notion de fonction en physique n'est pas dissociable de la notion de modèle. Un modèle est une représentation de la réalité, ayant pour but de la décrire, de l'expliquer et de permettre un raisonnement. Une fonction permet de prévoir le résultat d'une expérience, et cette prédiction théorique est ensuite confrontée à la réalité. Si les mesures sont trop éloignées du résultat théorique, l'expérience sera refaite, et si la différence persiste, le physicien modifiera, voire abandonnera le modèle sous-jacent.

En Seconde, cette notion est relativement peu présente, sauf lorsqu'il s'agit de tracer une courbe d'étalonnage à partir d'un tableau de valeurs, c'est-à-dire un ensemble de points placés sur un graphe. On pourra à cette occasion poser quelques questions sur la « fonction » représentée par cette courbe, en particulier s'il s'agit d'une droite passant par l'origine.
En Terminale, on étudie principalement l'évolution des systèmes dans le temps.
On cherchera par exemple des fonctions $u_C = f(t)$ ou $u_C(t)$ (c'est-à-dire des fonctions qui à t associe u_C) pour décrire l'évolution de la tension aux bornes d'un condensateur lorsque le temps varie, ou $N(t)$ pour l'évolution d'une population de noyaux radioactifs. Le plus souvent cette fonction sera déterminée par une équation différentielle et des conditions initiales.

On pourrait noter les grandeurs comme la tension $u(t)$ dans un premier temps puis adopter la convention $u = u(t)$ lorsque les élèves ont bien compris que la lettre u désigne à la fois la grandeur et la fonction du temps. Par exemple, dans un tableau de valeurs, on devrait mentionner $u(t)$ en haut de colonne de même que, dans un graphique, on écrirait $u(t)$ au lieu de u en ordonnées, et pour désigner la valeur de la tension à la date t_1, il faudrait écrire $u(t_1)$ plutôt que u_1.

II Variations d'une fonction

Dans ce domaine, il n'existe pas de différence notable entre les notions utilisées en mathématiques et en physique-chimie, mais certains termes ont néanmoins une signification différente selon les disciplines. Nous les signalons dans le tableau p. 13.

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

La fonction ***f est croissante sur I*** signifie que :

pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.

La fonction ***f est strictement croissante sur I*** signifie que :

pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

La fonction ***f est décroissante sur I*** signifie que :

pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.

La fonction ***f est strictement décroissante sur I*** signifie que :

pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

La fonction ***f est constante sur I*** signifie que :

pour tous réels a et b de I, $f(a) = f(b)$.

On dit aussi qu'une fonction croissante est une fonction qui conserve l'ordre, et qu'une fonction décroissante est une fonction qui inverse l'ordre.

Exemple

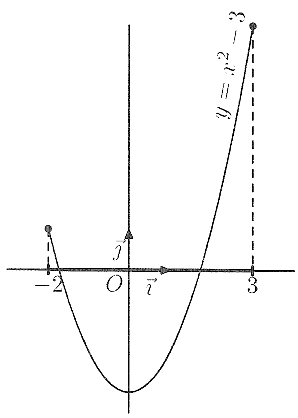
La pression de l'eau dans un lac est une fonction croissante de la profondeur : plus la profondeur augmente, plus la pression augmente.

Définition

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer, quand on le peut, les intervalles sur lesquels elle est strictement croissante, strictement décroissante, constante.

Exemple

La fonction f définie sur $[-2\ ;\ 3]$ par $f(x) = x^2 - 3$ (représentée ci-contre) est strictement décroissante sur $[-2\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur $[0\ ;\ 3]$.



Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit a un réel de I.

f admet sur I un maximum en a signifie :

pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant f(a)$.

Le nombre réel $f(a)$ est alors le maximum de f sur I.

f admet sur I un minimum en a signifie :

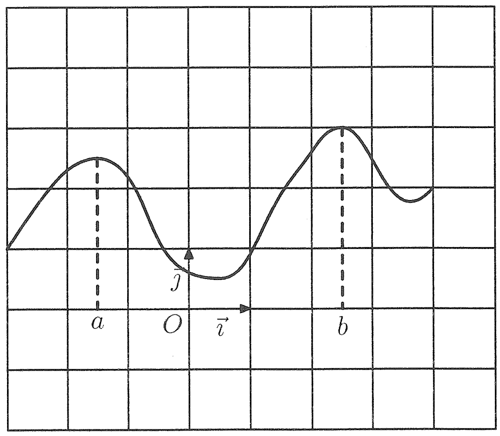
pour tout réel x de I, $f(x) \geqslant f(a)$.

Le nombre réel $f(a)$ est alors le minimum de f sur I.

On dit que f admet un maximum local en a lorsqu'il existe un intervalle I contenant a tel que f admette un maximum en a sur I.

Exemple

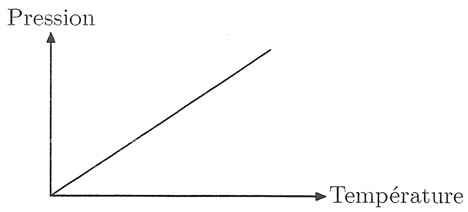
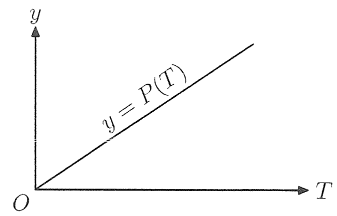
La fonction représentée ci-contre admet un maximum local en a et un maximum en b.



Remarque : à partir de la classe de Première, l'étude du sens de variation d'une fonction et la recherche d'extrema peut se faire en utilisant la fonction dérivée (voir chapitre sur la dérivation p. 34).

III Quelques différences de langage

Dans la colonne de gauche, nous avons recopié des expressions extraites d'exercices de manuels de physique ; dans la colonne de droite, nous proposons une formulation plus proche du vocabulaire employé en cours de mathématiques ; néanmoins certaines différences sont irréductibles.

PHYSIQUE	MATHÉMATIQUES
 La pression augmente avec la température	 La fonction P est une fonction strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
Tracer la courbe représentative de la fonction $u = f(t)$. ou Tracer la courbe $u = f(t)$. ou Tracer le graphe de u en fonction de t.	Tracer la courbe représentative de la fonction f. ou Tracer la courbe d'équation $u = f(t)$. Remarque : en mathématiques, au lycée, le terme « graphe » est peu utilisé car il a aussi une signification complètement différente. Une initiation à la théorie des graphes est actuellement enseignée en Terminale ES.
Représenter graphiquement les variations des quantités de matière des réactifs en fonction de l'avancement chimique au cours de la transformation Représenter l'évolution, au cours du temps, de l'avancement x de la réaction.	Représenter graphiquement les quantités de matière des réactifs en fonction de l'avancement chimique au cours de la transformation. Représenter graphiquement l'avancement x de la réaction en fonction du temps.
Quelle est l'équation de la courbe $v(t)$?	Quelle est l'équation de la courbe représentative de la fonction v ?

IV Exercices

A. Exemples d'exercices donnés en cours de mathématiques

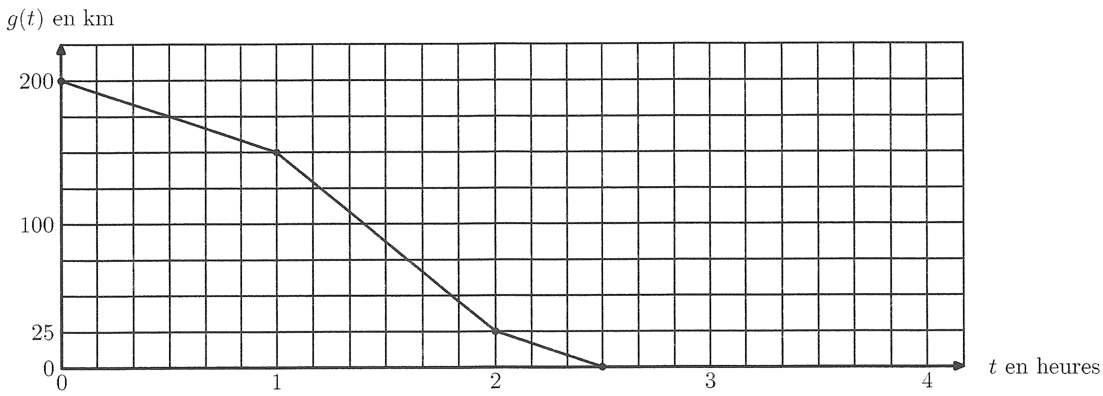
1) Savoir prendre des informations sur un graphique à partir d'un contexte concret

Énoncé (donné en classe de Seconde)

Un automobiliste effectue un trajet de 200 km de la ville A à la ville B en 2 h 30 min.

On a représenté ci-dessous la fonction g qui exprime la **distance restant à parcourir** en fonction du temps t, t étant exprimé en heures.

Les points en gras de ce graphique sont à un nœud du quadrillage qui est régulier.



1 . Déterminer la distance parcourue au bout d'une heure, puis au bout de deux heures.

2 . a) Au bout de combien de temps l'automobiliste est-il à 175 km de la ville B ?

b) Au bout de combien de temps l'automobiliste a-t-il parcouru 75 km ?

3 . Déterminer la vitesse moyenne :

a) pendant la première heure,

b) pendant la deuxième heure,

c) pendant la dernière demi-heure,

d) sur l'ensemble du trajet.

4 . « Raconter » le déplacement de cet automobiliste avec les précisions que permet l'énoncé.

5 . a) Déterminer $g(t)$.

b) Reprendre par le calcul les questions 1 et 2.

Remarques

Nous avons constaté que la lecture d'un graphique en lien avec la réalité est plus aisée pour les élèves que celle d'un graphique entièrement décontextualisé.

Néanmoins, le fait que la vitesse soit constante la première heure, puis la deuxième, et enfin la dernière demi-heure est loin d'être évident pour les élèves.

La question 4. est volontairement peu précise pour laisser de l'initiative à l'élève.

La notion de fonction affine par intervalles est seulement en voie d'acquisition au niveau de la Seconde, aussi les élèves réussissent peu la question 5. Les fonctions définies « par cas » ont longtemps gêné les mathématiciens et perturbent les élèves, c'est le cas par exemple de la fonction valeur absolue ($x \mapsto |x|$).

Un exemple de solution attendue d'un bon élève

1 . Au bout d'une heure, il reste 150 km à parcourir : l'automobiliste a donc parcouru 200 − 150, soit 50 km. Et, au bout de deux heures, il ne lui reste plus que 25 km à parcourir, il a donc déjà parcouru 175 km.

2 . a) L'automobiliste est à 175 km de la ville B au bout d'une demi-heure.

b) Quand il a parcouru 75 km, il ne lui en reste plus que 125 à parcourir : c'est environ au bout de 1 h 12 min.

3 . a) D'après la première question, l'automobiliste a roulé pendant la première heure à 50 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

b) Pendant la deuxième heure, il a parcouru 125 km, il a donc roulé à 125 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

c) Pendant la dernière demi-heure, il a parcouru 25 km, il a donc roulé à 50 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

d) Sur l'ensemble du trajet, il a parcouru 200 km en deux heures et demie, il a donc roulé à la vitesse de $\dfrac{200}{2{,}5}$, soit 80 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

Remarque

La vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet correspond (en valeur absolue) au coefficient directeur de la droite (A_1A_2), où A_1 et A_2 sont les points de coordonnées respectives $(0\ ;\ 200)$ et $(2{,}5\ ;\ 0)$.

4 . Un exemple : « L'automobiliste quitte la ville A en roulant pendant une heure à la vitesse constante de 50 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$, puis, pendant la deuxième heure à la vitesse constante de 125 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ (sans doute était-il sur autoroute), et enfin termine son trajet en roulant la dernière demi-heure à la vitesse constante de 50 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. Il arrive donc à la ville B deux heures et demie après son départ. »

5 . a) Sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, la fonction g est représentée par un segment de droite, elle est donc affine, par conséquent $g(t) = at + b$. Or $g(0) = 200$, et $g(1) = 150$, d'où $b = 200$, et $a + b = 150$. On en déduit que $g(t) = -50t + 200$.

Avec le même raisonnement, on obtient :

sur $]1\ ;\ 2]$, $g(t) = -125t + 275$,

sur $]2\ ;\ 2{,}5]$, $g(t) = -50t + 125$.

b) Question 2.(a) On cherche pour quelle(s) valeur(s) de t on a $g(t) = 175$.

On est amené à résoudre successivement :

$175 = -50t + 200$ pour $t \in [0\ ;\ 1]$: $t = 0,5$.

$175 = -125t + 275$ pour $t \in]1\ ;\ 2]$: pas de solution.

$175 = -50t + 125$ pour $t \in]2\ ;\ 2.5]$: pas de solution.

L'automobiliste est à 175 km de la ville B au bout d'une demi-heure.

Question 2.(b) On cherche pour quelle(s) valeur(s) de t on a $g(t) = 125$.

On est amené à résoudre successivement :

$125 = -50t + 200$ pour $t \in [0\ ;\ 1]$: pas de solution.

$125 = -125t + 275$ pour $t \in]1\ ;\ 2]$: $t = 1,2$.

$125 = -50t + 125$ pour $t \in]2\ ;\ 2{,}5]$: pas de solution.

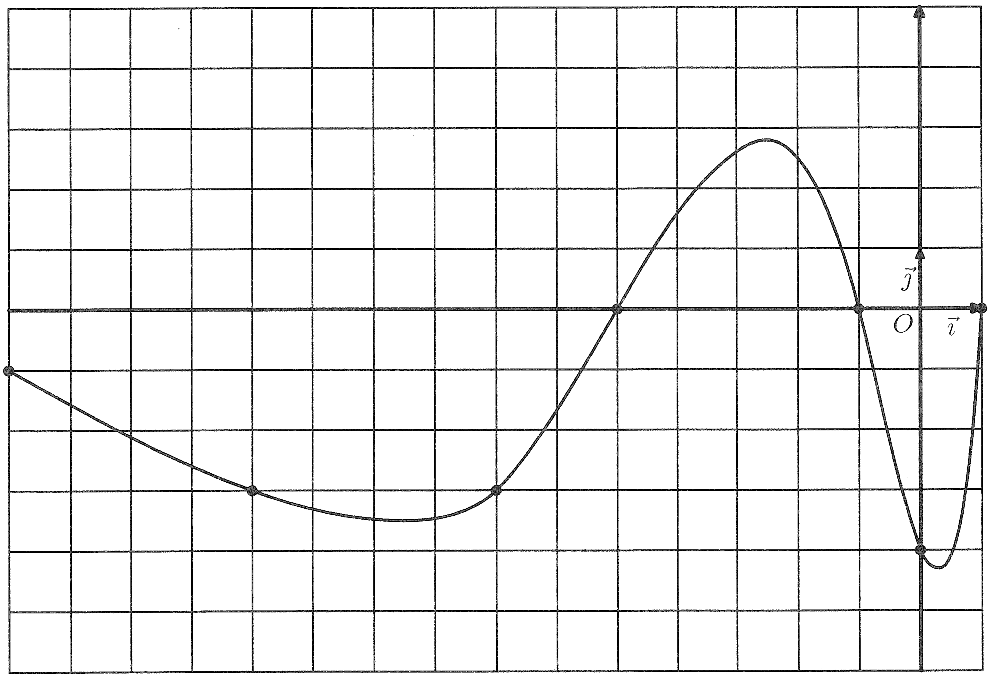
L'automobiliste a parcouru 75 km au bout d'une heure et douze minutes.

Nous proposons pour cette question une solution uniquement par le calcul, mais nous nous attendons à ce que les élèves proposent eux, une solution mêlant graphique et calcul en commençant par trouver d'après le graphique un intervalle contenant t, puis en terminant par le calcul en utilisant directement l'expression de $g(t)$ adéquate. On peut également faire appel à la stricte décroissance de g pour justifier l'unicité de la solution.

2) Savoir prendre des informations sur un graphique en dehors de tout contexte concret

Énoncé (donné en classe de Seconde)

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-15\ ;\ 1]$.



Les points en gras de cette courbe sont situés à un nœud d'un quadrillage qui est régulier.

À l'aide de ce graphique, répondre à chacune des questions posées en donnant des valeurs approchées ou exactes selon la précision permise par le dessin.

1 . a) Donner les images par f des nombres -11, -3 et 0.

b) Lire les antécédents éventuels des nombres 2, 4 et -1.

2 . a) Quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-15\ ;\ 1]$?

b) Quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-15\ ;\ 1]$?

3 . Quel est l'ensemble des valeurs prises par f lorsque :

a) x décrit $[-15\ ;\ 1]$?

b) x décrit $[-15\ ;\ -9]$?

c) x décrit $]-5\ ;\ -1[$?

4 . Résoudre graphiquement les équations et les inéquations suivantes :

a) $f(x) = 0$,

b) $f(x) = 4$,

c) $f(x) = -3$,

d) $f(x) \leqslant -3$,

e) $f(x) > 0$,

f) $f(x) < 6$.

Remarques

Ce type d'exercice est particulièrement classique en classe de Seconde.

Dans cet exercice, l'expression analytique de f n'est pas donnée aux élèves. l'objectif est de répondre aux questions sans calculer, en utilisant seulement la représentation graphique de f.

Un exemple de solution attendue

1 . a) $f(-11) = -3$; $f(-3) \approx 2{,}6$; $f(0) = -4$.

b) 2 a deux antécédents par f, de valeurs approchées $-1{,}8$ et $-3{,}7$.
4 n'a pas d'antécédent par f.
-1 a quatre antécédents : -15, et les nombres de valeurs approchées $-5{,}6$, $-0{,}7$ et $0{,}7$.

2 . a) Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-15\ ;\ 1]$ est M, avec $M \approx 2{,}8$.

b) Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-15\ ;\ 1]$ est m, avec $m \approx -4{,}2$.

3 . a) Lorsque x décrit $[-15\ ;\ 1]$, $f(x)$ décrit $[m\ ;\ M]$.

b) Lorsque x décrit $[-15\ ;\ -9]$, $f(x)$ décrit $[a\ ;\ -1]$, avec $a \approx -3{,}4$.

c) Lorsque x décrit $]-5\ ;\ -1[$, $f(x)$ décrit $]0\ ;\ M]$.

4 . Dans la suite, S_i désigne l'ensemble des solutions.

a) Les solutions de $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses ; $S_1 = \{-5\ ;\ -1\ ;\ 1\}$.

b) $f(x) = 4$: $\quad S_2 = \emptyset$.

c) $f(x) = -3$ admet quatre solutions distinctes : -11, -7, b et c, avec $b \approx -0{,}2$ et $c \approx 0.5$; $S_3 = \{-11\ ;\ -7\ ;\ b\ ;\ c\}$.

d) Les solutions de $f(x) \leqslant -3$ sont les abscisses des points de la courbe situés en dessous de la droite d'équation $x = -3$; $S_4 = [-11\ ;\ -7] \cup [b\ ;\ c]$

e) $f(x) > 0$: $\quad S_5 = [-5\ ;\ -1]$.

f) $f(x) < 6$: $\quad S_6 = \emptyset$.

3) Savoir faire le lien entre l'expression d'une fonction et sa représentation graphique

Première partie : de l'expression de la fonction à une représentation graphique

Énoncé (donné en classe de Seconde)

1 . Soit f la fonction qui, à tout réel x strictement positif, associe le périmètre d'un carré de côté x.

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	2	3			a
Périmètre d'un carré de côté x : $f(x)$			14	31	

b) Représenter graphiquement la fonction f.

2 . Soit g la fonction qui, à tout réel x strictement positif, associe le périmètre d'un rectangle de largeur x et de longueur 10.

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	2	3			a
Périmètre du rectangle : $g(x)$			14	31	

b) Représenter graphiquement la fonction g.

3 . Soit h la fonction qui, à tout réel x strictement positif, associe l'aire d'un carré de côté x.

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	2	3			a
Aire du carré : $h(x)$			25	31	

b) Représenter graphiquement la fonction h.

Quelques éléments de correction

1 . a)

x	2	3	**3,5**	**7,75**	a
Périmètre d'un carré de côté x : $f(x)$	**8**	**12**	14	31	$\boldsymbol{4a}$

b) La fonction f est définie par $f(x) = 4x$. C'est une fonction linéaire, elle est donc représentée par une droite passant par l'origine.

2 . a)

x	2	3		**5,5**	a
Périmètre du rectangle : $g(x)$	**24**	**26**	14	31	$\boldsymbol{20+2a}$

b) La fonction g est définie par $g(x) = 2x + 20$. C'est une fonction affine, elle est donc représentée par une droite.

3 . a)

x	2	3	**5**	$\boldsymbol{\sqrt{31}}$	a
Aire du carré : $h(x)$	**4**	**9**	25	31	$\boldsymbol{a^2}$

b) La fonction h est définie par $h(x) = x^2$, elle n'est ni linéaire, ni affine, sa représentation graphique n'est pas une droite. Comment joindre les points ?

Deuxième partie : d'une représentation graphique de la fonction à son expression

Énoncé (donné en classe de Seconde)

1 . Soit u une fonction dont on connaît le tableau de valeurs ci-dessous :

x	2	6	10	4
$u(x)$	5	15	25	10

a) Donner une représentation possible de u.

b) Déterminer une expression possible de $u(x)$.

2 . Soit v une fonction dont on connaît le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-3	5	1	3
$v(x)$	0	4	2	3

a) Donner une représentation possible de v.

b) Déterminer une expression possible de $v(x)$.

3 . Soit f_1 une fonction dont on connaît le tableau de valeurs ci-dessous :

x	15	1	3	6	10	12	0,6	0,5
$f_1(x)$	0,2	3	1	0,5	0,3	0,25	5	6

a) Donner une représentation possible de f_1.

b) La fonction f_1 est-elle affine ?

c) On pose $g_1(x) = \dfrac{1}{f_1(x)}$. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	15	1	3	6	10	12	0,6	0,5
$g_1(x)$								

d) Donner une représentation possible de g_1.

e) Déterminer une expression possible de $g_1(x)$. En déduire une expression possible de $f_1(x)$.

4 . Soit f_2 une fonction dont on connaît le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0,08	0,056	0,072	0,1	0,12	0,16	0,18	0,26
$f_2(x)$	1,3	1,9	1,5	1,0	0,8	0,6	0,5	0,3

a) Donner une représentation possible de f_2.

b) La fonction f_2 est-elle affine ?

c) On pose $g_2(x) = \dfrac{1}{f_2(x)}$. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous (donner des valeurs approchées avec deux chiffres significatifs) :

x	0,08	0,056	0,072	0,1	0,12	0,16	0,18	0,26
$g_2(x)$								

d) Donner une représentation possible de g_2.

e) Déterminer une expression possible de $g_2(x)$. En déduire une expression possible de $f_2(x)$.

Quelques éléments de correction

1 . La donnée du tableau de valeurs ne permet pas de déterminer de manière certaine la représentation graphique de la fonction u, ni l'expression de $u(x)$. On peut placer les quatre points de la courbe de u associés aux valeurs données dans le tableau et constater (ou démontrer) qu'ils sont alignés sur une droite passant par l'origine. La fonction u pourrait donc être une fonction linéaire, et dans ce cas le coefficient de proportionnalité k serait égal à $\frac{5}{2}$. On aurait alors $u(x) = \frac{5}{2}x$.

   Mais **il existe d'autres courbes passant par les quatre points donnés, et donc d'autres expressions possibles de $u(x)$.**

2 . Comme ci-dessus, la donnée du tableau de valeurs ne permet pas de déterminer de manière certaine la représentation graphique de la fonction v, ni l'expression de $v(x)$. On peut placer les quatre points de la courbe de v associés aux valeurs données dans le tableau et constater (ou démontrer) qu'ils sont alignés sur une droite. La fonction v pourrait donc être une fonction affine, et dans ce cas $v(x)$ serait de la forme $mx + p$, où m et p sont à déterminer à partir des données numériques.

   – Soit en résolvant un système, par exemple $\begin{cases} -3m + p = 0 \\ 5m + p = 4 \end{cases}$

   – Soit en calculant en premier lieu le coefficient directeur m de la droite avec la formule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (on trouve $m = \frac{1}{2}$), puis l'ordonnée à l'origine p en résolvant une équation, par exemple $-3m + p = 0$ (on trouve $p = \frac{3}{2}$).

   On aurait alors $v(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

   Mais **il existe d'autres courbes passant par les quatre points donnés, et donc d'autres expressions possibles de $v(x)$.**

3 . Cette fois, les points de la courbe de f_1 associés aux valeurs données dans le tableau ne sont pas alignés. La fonction f_1 n'est donc pas une fonction affine.

x	15	1	3	6	10	12	0,6	0,5
$g_1(x)$	5	$\frac{1}{3}$	1	2	$\frac{10}{3}$	4	0,2	$\frac{1}{6}$

   Comme pour la fonction u de l'exercice 1, on peut placer les points de la courbe de g_1 associés aux valeurs données dans le tableau et constater (ou démontrer) qu'ils sont alignés sur une droite passant par l'origine. La fonction g_1 pourrait donc être une fonction linéaire, et dans ce cas le coefficient de proportionnalité k serait égal à $\frac{1}{3}$. On aurait alors $g_1(x) = \frac{1}{3}x$ et $f_1(x) = \frac{3}{x}$.

4 . Les valeurs numériques sont des données expérimentales obtenues lors du TP « Mesure de l'épaisseur d'un cheveu par diffraction » (voir page 21). Les points représentant la fonction g_2 ne sont pas parfaitement alignés. Pour donner une représentation graphique de g_2, on peut par exemple prendre comme hypothèse que la fonction g_2 est affine et admettre que le non-alignement des points est dû à l'incertitude des mesures. On peut alors tracer à la règle une droite passant « le plus près possible » des points puis déterminer une équation de celle-ci. Cette notion de « plus près possible » n'est abordée en cours de mathématiques que dans les séries STG et ES, en Terminale. Néanmoins, si l'on admet qu'il s'agit d'une droite, il existe des techniques de statistiques nous permettant d'obtenir une « meilleure approximation » utilisables avec une calculatrice ou un tableur avec des élèves de Seconde.

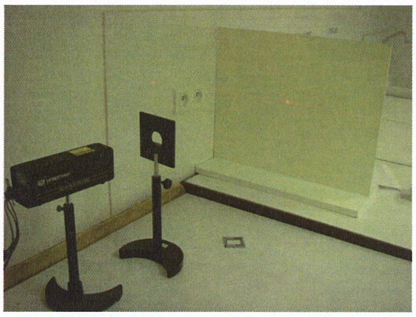
B. Exemples d'exercices donnés en cours de physique

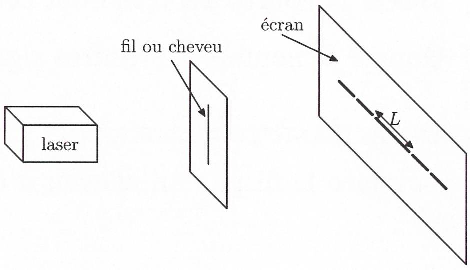
1) Mesure de l'épaisseur d'un cheveu par diffraction

L'objectif du physicien est d'obtenir une mesure à partir d'une courbe d'étalonnage. C'est l'occasion de réinvestir en cours de physique le vocabulaire sur les fonctions abordé en mathématiques.

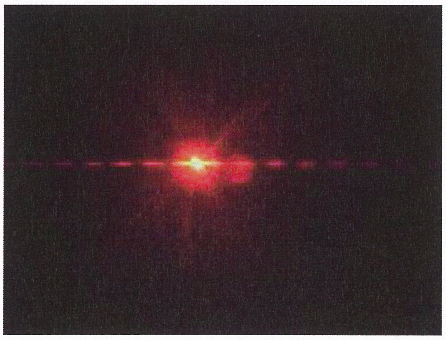
Énoncé (donné en classe de Seconde)

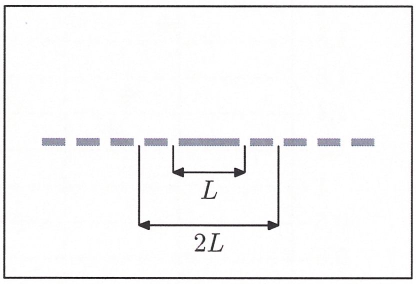
> Principe de la mesure : la mesure utilise la figure de diffraction d'un fil ou d'un cheveu lorsqu'il est éclairé par un laser.
>
> **Observation du phénomène de diffraction :** sur le trajet horizontal d'un faisceau laser, on place un fil (fixé verticalement sur un cadre support), et on observe l'étalement du faisceau sur un écran situé au-delà du fil.





> Quand la lumière rencontre un objet de petite taille, le trajet des rayons lumineux n'est plus rectiligne. Le faisceau « s'étale » derrière l'obstacle, et forme sur un écran une figure appelée figure de diffraction (figure ci-dessous). Sur cette figure de diffraction, il est possible de mesurer la largeur L de la tache centrale qui dépend de la taille de l'objet.
>
> **Observation de la figure de diffraction** (fig. 2) :





> Les taches lumineuses sont représentées en gris sur la figure. Le disque central plus lumineux sur la photo n'est pas représenté sur le schéma.

1 . Mesures de L avec les fils calibrés et tracé de la courbe d'étalonnage

La distance entre le fil et l'écran étant maintenue constante, un groupe d'élèves a réalisé des mesures de L avec une règle graduée au millimètre pour différents fils calibrés de diamètre d. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Diamètre du fil : d (en mm)	0,08	0,056	0,072	0,10	0,12	0,16	0,18	0,26
Largeur de la tache centrale : L (en cm)	1,3	1,9	1,5	1,0	0,8	0,6	0,5	0,3

Les données expérimentales sont celles obtenues par un groupe d'élèves lors d'une séance de travaux pratiques. Il est possible d'obtenir des mesures plus précises avec un matériel plus perfectionné, mais qui n'est pas celui utilisé en général par les élèves.

a) Placer les mesures sur un graphe en notant d en abscisse et L en ordonnée ;

b) La fonction $L = f(d)$ est-elle linéaire ? affine ? La fonction $L = f(d)$ est-elle croissante ? décroissante ?

c) Tracer la courbe représentant cette fonction ;

d) Donner le nombre de chiffres significatifs pour chaque mesure de L.

2 . Mesure du diamètre d'un cheveu

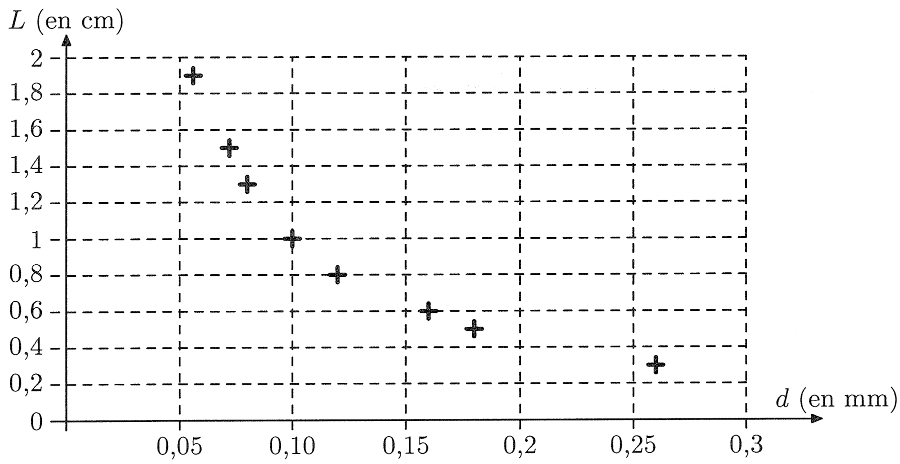
On remplace le fil par un cheveu d'un élève, la mesure de L donne la valeur 1,2 cm.

a) Déterminer l'épaisseur du cheveu en mm et en µm ;

b) Si l'élève avait utilisé du gel coiffant, la valeur de L aurait-elle été supérieure ou inférieure à 1,2 cm ?

Correction

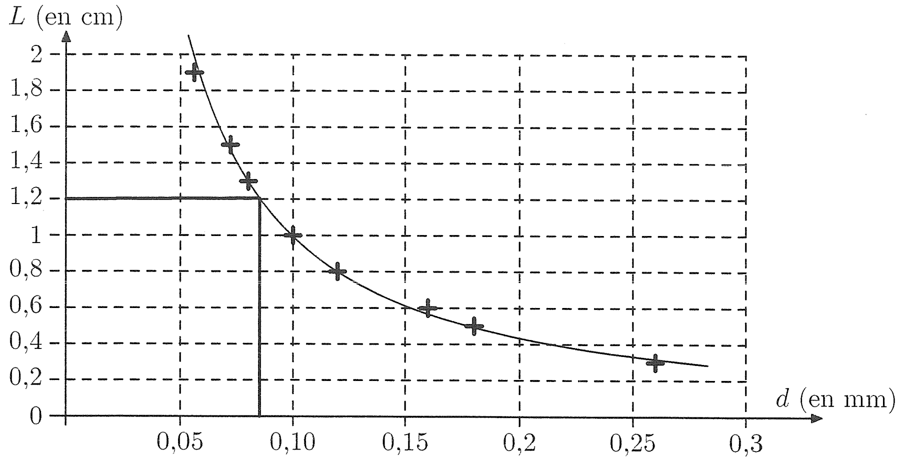
1 . a) L en fonction de d :



b) La fonction $L = f(d)$ n'est ni linéaire, ni affine.

La fonction $L = f(d)$ est décroissante.

c) Tracé de la courbe :



d) Avec la règle, les mesures sont faites au millimètre près. Les quatre premières mesures sont données avec deux chiffres significatifs, les quatre dernières avec un seul chiffre significatif.

2 . a) La mesure de $L = 1{,}2$ cm donne la valeur de d par lecture sur le graphique : $d = 0{,}085$ mm soit 85 μm. La valeur de d est l'antécédent de 1,2 par la fonction $L = f(d)$.

b) Le gel augmenterait l'épaisseur du cheveu, la valeur de L trouvée serait donc plus faible.

Remarques

Dans un sujet de mathématiques, la question 1.b) aurait plutôt été rédigée : « La fonction f définie par $f(d) = L$, où d est exprimée en mm et L en cm. »

Pour déterminer le nombre de *chiffres significatifs* du résultat d'une mesure, on peut l'écrire sous forme scientifique (forme $a \times 10^n$, avec $a \in [1\,;\,10[$). Le nombre de chiffres significatifs est alors le nombre de chiffres de a. Par exemple, dans 1.5×10^3, il y a deux chiffres significatifs, tandis que dans 1.50×10^3, il y en a trois.

Les élèves de Seconde ont souvent tendance à relier les points par des segments. Le tracé de la courbe est parfois difficile surtout si les mesures sont imprécises. Il faut pourtant leur apprendre à tracer une courbe à main levée. Tracer une courbe est un premier pas pour assimiler la notion de fonction. Certains élèves maîtrisant bien la proportionnalité sont même tentés de pratiquer la méthode du tableau de proportionnalité pour répondre à la question 2.a). La question 2.b) permet de mettre en évidence qu'il ne peut pas, dans ce cas, y avoir de relation de proportionnalité.

On peut retrouver la loi physique sous-jacente. Cette démarche est au programme de Terminale S, mais en Seconde, les élèves utilisent la courbe comme courbe d'étalonnage. Pour retrouver la loi physique, il peut être demandé aux élèves de représenter L en fonction de $\frac{1}{d}$. La représentation de $\frac{1}{L}$ en fonction de d est peut-être plus simple à réaliser pour les élèves. La variable reste ainsi la même, seule la fonction change. Dans cet esprit, nous proposons un exercice de mathématiques pour retrouver cette loi page 19.

2) Élaboration du cuivre à partir de son minerai

Énoncé (donné en classe de Seconde)

Le cuivre est élaboré à partir de son minerai. Le minerai, contenant de l'oxyde de cuivre CuO (s) était à l'origine chauffé en présence de charbon de bois, essentiellement constitué de carbone C (s).

L'équation chimique associée à la transformation est :

$$2\mathrm{CuO}\ (\text{solide}) + \mathrm{C}\ (\text{solide}) \longrightarrow 2\ \mathrm{Cu}\ (\text{solide}) + \mathrm{CO_2}\ (\text{gaz})$$

On considère le système chimique dont la composition à l'état initial est :

$$\begin{cases} n_i(\mathrm{CuO}) &= 16{,}8 \text{ mol} \\ n_i(\mathrm{C}) &= 12{,}0 \text{ mol} \\ n_i(\mathrm{Cu}) &= 0 \text{ mol} \\ n_i(\mathrm{CO_2}) &= 0 \text{ mol} \end{cases}$$

1 . a) Dresser un tableau permettant de suivre l'évolution du système chimique au cours de la transformation en utilisant l'avancement.

b) Déterminer la valeur de l'avancement maximal et établir un bilan de matière à l'état final.
Quel est le réactif limitant ?

2 . Tracer sur un même graphique les courbes représentant les quantités de matière des réactifs et des produits en fonction de l'avancement chimique au cours de la transformation.

3 . Calculer la masse de cuivre formé lors de la transformation.

Donnée : $\mathrm{M(Cu)} = 63.5\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$

Solution attendue

1 . a)

Équation de la réaction : $2\mathrm{CuO(s)} + \mathrm{C(s)} \longrightarrow 2\mathrm{Cu(s)} + \mathrm{CO_2(g)}$					
États du système	Avancement (mol)	$n(\mathrm{CuO})$	$n(\mathrm{C})$	$n(\mathrm{Cu})$	$n(\mathrm{CO_2})$
Initial Intermédiaire Final	0 x	16,8 $16{,}8 - 2x$	12,0 $12{,}0 - x$	0 $2x$	0 x

On appelle *avancement* dans cet exercice, le nombre de moles de $\mathrm{CO_2}$ formées. En classe de Seconde, on choisit pour avancement la variation du nombre de moles d'une espère chimique dont le coefficient stœchiométrique est égal à 1, pour que les calculs soient le plus simple possible.

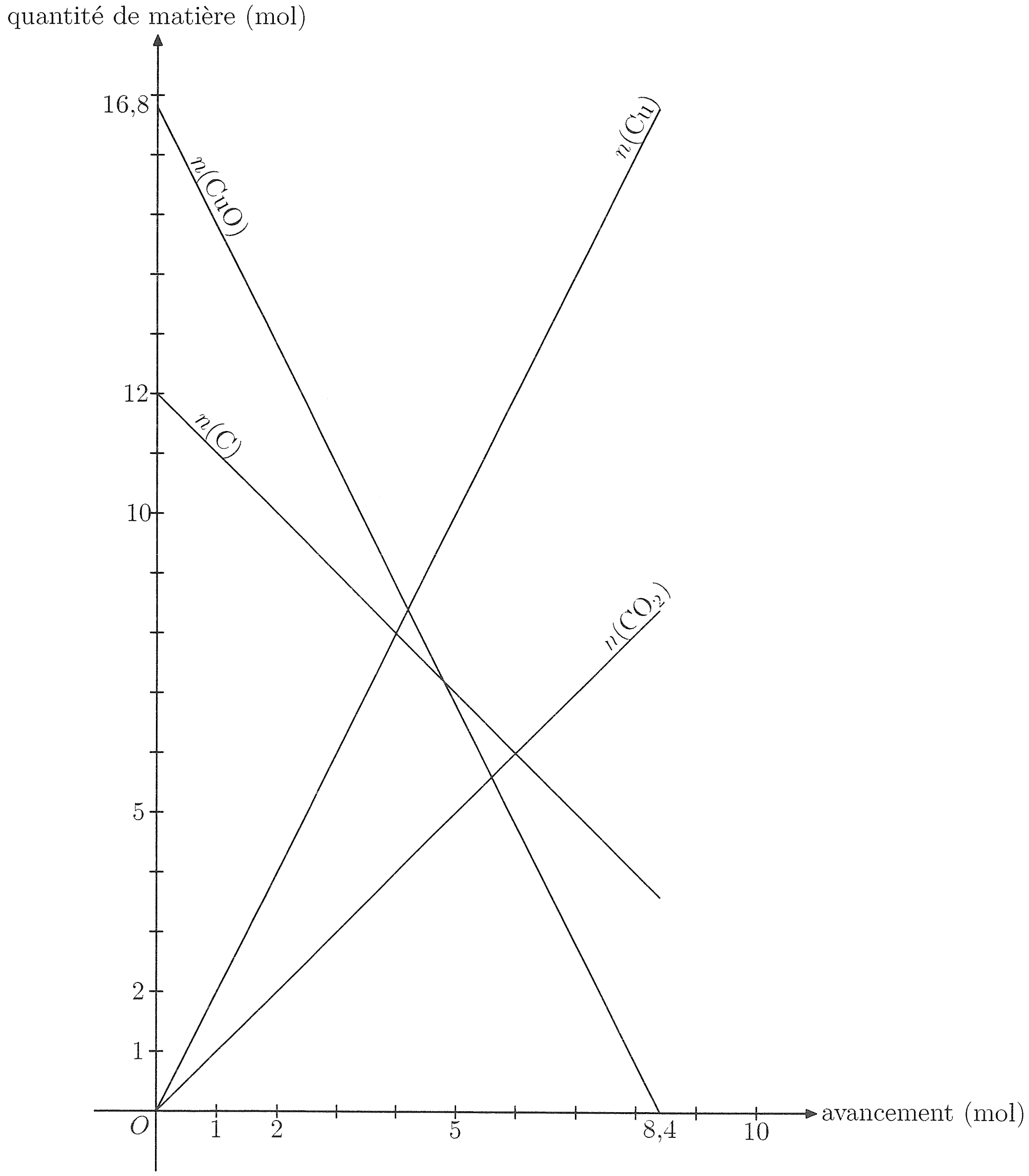
b) – Si CuO est le réactif limitant, sa quantité à l'état final est nulle :
$16{,}8 - 2x = 0$, d'où $x = 8{,}4$ mol.

- Si C est le réactif limitant, sa quantité à l'état final est nulle :
  $12{,}0 - x = 0$, d'où $x = 12{,}0$ mol.

L'avancement maximal correspond à la plus petite valeur de l'avancement pour laquelle un des deux réactifs est totalement consommé, soit ici $x_{\max} = 8{,}4$ mol. Le réactif limitant est donc CuO.

Équation de la réaction : $2CuO(s) + C(s) \longrightarrow 2Cu(s) + CO_2(g)$					
États du système	Avancement (mol)	$n(CuO)$	$n(C)$	$n(Cu)$	$n(CO_2)$
Initial	0	16,8	12,0	0	0
Intermédiaire	x	$16{,}8 - 2x$	$12{,}0 - x$	$2x$	x
Final	$x_{\max} = 8{,}4$	0	3,6	16,8	8,4

2 . Courbes représentant les quantités de matière des réactifs et des produits en fonction de l'avancement :

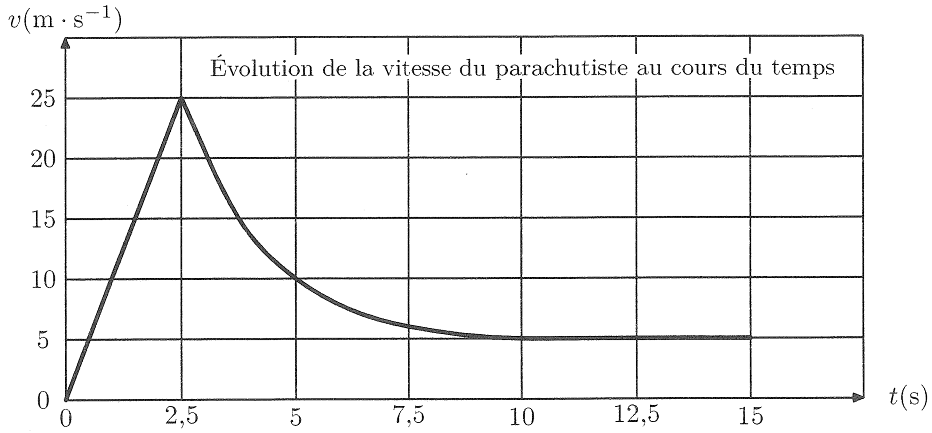


3 . $n_f(\mathrm{Cu}) = 2 \times x_{\mathrm{max}} = 16{,}8$ mol,
d'où $m_f(\mathrm{Cu}) = n_f(\mathrm{Cu}) \times \mathrm{M}(\mathrm{Cu}) = 16{,}8 \times 63{,}5$, soit $\boxed{m_f(\mathrm{Cu}) = 1{,}07 \times 10^3 \text{ g}}$

3) Chute et parachute

Énoncé (donné en classe de Seconde)

Un parachutiste saute d'un hélicoptère après que celui-ci se soit immobilisé. On étudie le mouvement du mobile constitué du parachutiste équipé de son parachute, dans le référentiel terrestre. La masse de ce mobile vaut $m = 110$ kg. Pour simplifier, on suppose qu'il n'y a pas de vent et que la trajectoire est rigoureusement verticale. La courbe ci-dessous représente l'évolution de la vitesse instantanée du mobile en fonction du temps écoulé depuis que le parachutiste a sauté. Le parachutiste attend 2,5 secondes avant d'ouvrir son parachute.



1 . *Étude du mouvement pendant les 2,5 premières secondes après le saut.*
Décrire le mouvement pendant les 2,5 premières secondes de chute en justifiant les termes employés.

2 . *Le parachute est maintenant ouvert. On étudie le mouvement de $t = 2{,}5$ s à $t = 10$ s.*
Décrire le mouvement pendant ce laps de temps en justifiant les termes employés.

3 . *On étudie enfin le mouvement pour $t > 10$ s.*

a) Décrire le mouvement en justifiant les termes employés ;

b) Que vaut la vitesse du mobile ? Convertir cette vitesse en kilomètres par heure ;

c) Énoncer le principe d'inertie ;

d) Faire le bilan des forces s'exerçant sur le mobile ;

e) Que peut-on dire des forces qui s'exercent sur le mobile ?

Solution attendue

1 . Pendant les 2,5 premières secondes après le saut, le mouvement est **rectiligne** et **accéléré**.
Le mouvement est **rectiligne** car la trajectoire du mobile est une droite, il est **accéléré** car la vitesse du mobile augmente.

2 . Durant les sept secondes et demie suivantes, le mouvement est **rectiligne** et **décéléré**. Le mouvement est **rectiligne** car la trajectoire du mobile est une droite, il est **décéléré** car la vitesse du mobile diminue.

3 . a) À partir de la 10^e seconde, le mouvement est **rectiligne** et **uniforme**.
Le mouvement est **rectiligne** car la trajectoire du mobile est une droite, il est **uniforme** car la vitesse du mobile est constante.

b) $v = 5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 5 \times 10^{-3} \times 3\,600 = 18\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

c) Dans un référentiel terrestre, tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme si les forces qui s'exercent sur lui se compensent (*la réciproque est vraie*).

d) Il y a deux forces qui s'exercent sur le mobile :
la force de gravitation, $\overrightarrow{F}_{\text{Terre/mobile}}$, appelée également poids du mobile, notée $\overrightarrow{P}$.
la résistance de l'air ou les frottements, $\overrightarrow{F}_{\text{air/mobile}}$, notée $\overrightarrow{R}$.

e) Le mouvement du mobile étant rectiligne et uniforme dans le référentiel terrestre (considéré comme un référentiel galiléen), d'après le principe d'inertie, on peut dire que les deux forces qui s'exercent sur ce mobile se compensent, d'où $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$.
Les caractéristiques de ces deux forces sont donc :

$$\overrightarrow{F}_{\text{Terre/mobile}} = \overrightarrow{P} \begin{cases} \text{direction : verticale} \\ \text{sens : vers le bas} \\ \text{valeur : } P = mg = 110 \times 10 = 1{,}1 \times 10^3\ \text{N.} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{F}_{\text{air/mobile}} = \overrightarrow{R} = -\overrightarrow{P}\text{, donc } \overrightarrow{R} \begin{cases} \text{direction : verticale} \\ \text{sens : vers le haut} \\ \text{valeur : } R = P = 1{,}1 \times 10^3\ \text{N.} \end{cases}$$

Deuxième partie

DÉRIVATION

I Notion de dérivation

A. Notion de dérivée en mathématiques

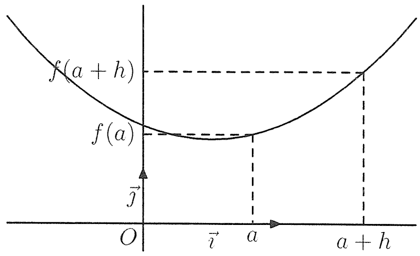
1) Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a.
Dire que ***la fonction f est dérivable en a*** signifie que le taux de variation de f entre a et $a+h$ (avec $h \neq 0$ et $a+h \in I$) :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

admet une limite réelle quand h tend vers 0.

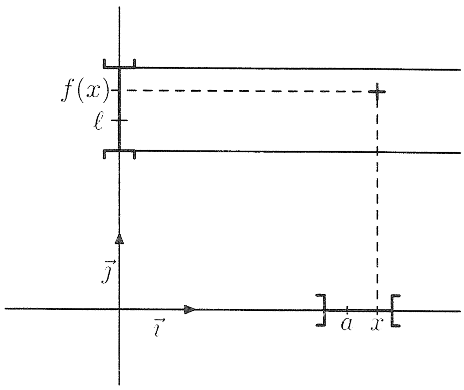
Cette limite est alors appelée ***nombre dérivé de f en a***, et notée $f'(a)$.



En classe de Première S, la *notion de limite* d'une fonction n'est pas définie. Seule une approche intuitive est réalisée, notamment pour définir le nombre dérivé, permettant ainsi de donner du sens à la notion de limite.
La définition de limite finie d'une fonction en un réel est donnée seulement en Terminale S, de la façon suivante :

La fonction ***f admet en un réel a une limite réelle ℓ*** signifie que, pour tout intervalle ouvert J contenant ℓ, il existe un intervalle ouvert I contenant a (sur lequel f est définie, sauf peut-être en a) tel que pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J.

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$.



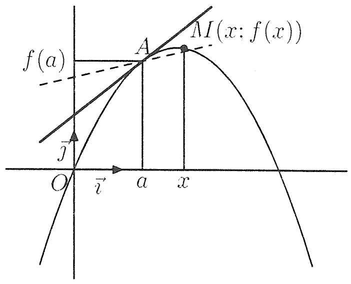
La définition de la dérivabilité peut aussi être formulée de la façon suivante :

La fonction f est dérivable en a signifie qu'il existe un réel m tel que : pour tout réel h, $f(a+h) = f(a) + mh + h\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. On a alors $f'(a) = m$.

Cette formulation est peu utilisée au lycée.

La ***tangente en A(a ; f(a)) à la courbe représentative de f*** est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Rappel : étant donné une droite (AB) non parallèle à l'axe des ordonnées, on appelle ***coefficient directeur*** de la droite (AB) le réel $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, également noté $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, avec $\Delta y = y_B - y_A$ et $\Delta x = x_B - x_A$.



M est un point de la courbe. La tangente en A est la position limite de la droite (AM) quand x tend vers a.

On appelle ***approximation affine tangente*** de la fonction f en a, la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$

Visualisation de la précision de l'approximation par des zooms successifs

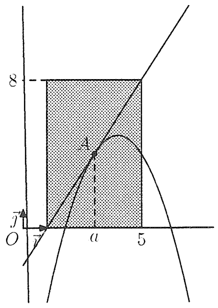


Fig. 1

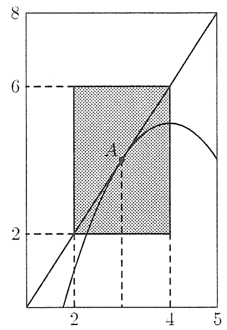


Fig. 2

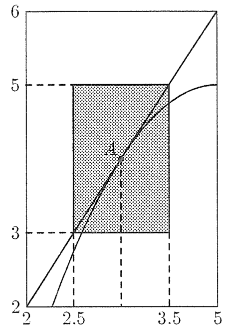


Fig. 3

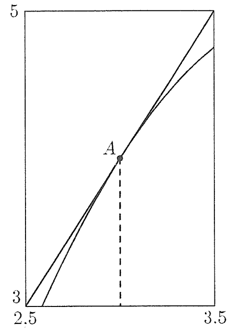


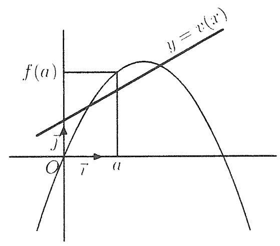
Fig. 4

La droite tracée représente l'approximation affine tangente de la fonction en a, chacune des figures 2, 3 et 4 étant un agrandissement de la partie grisée de la figure précédente.

Remarque

Toutes les fonctions affines u_m définies sur $\mathbb{R}$ par $u_m(x) = f(a) + (x-a)m$ sont des approximations affines de f au voisinage de a qui prennent la valeur $f(a)$ en a. En effet, $u_m(x) - f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a. Mais $f'(a)$ est la seule valeur de m pour laquelle la différence est négligeable devant $(x-a)$, c'est-à-dire telle que $\dfrac{u_m(x) - f(x)}{x-a}$ tend vers 0 quand $x - a$ tend vers 0.

Une approximation affine par une fonction v ne vérifiant pas $v(a) = f(a)$ est également envisageable, mais dans ce cas, la différence $v(x) - f(x)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers a.



Définition

Dire que la fonction f est ***dérivable sur I*** signifie qu'elle est dérivable en tout réel de I.

La fonction qui, à tout réel x de I, associe son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée ***fonction dérivée de f***, et est notée f'.

2) Exemples

a . Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 5x - 2$. Soit a un nombre réel. Montrer que la fonction f est dérivable en a, et déterminer $f'(a)$.

Pour tout réel $h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{-(a+h)^2 + 5(a+h) - 2 - (-a^2 + 5a - 2)}{h}$

D'où $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{-h^2 - 2ah + 5h}{h}$, soit $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = -h - 2a + 5$.

On a : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = -2a + 5$.

Donc la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = -2a + 5$.

Dans la suite du cours, des théorèmes sur les règles de calculs de dérivées sont démontrés ou admis. Les élèves savent alors que toute fonction polynôme est dérivable et peuvent en déterminer la fonction dérivée. Par exemple, pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2+5x-2$, l'élève donnera directement $f'(x) = -2x + 5$.

b . Déterminer l'approximation affine tangente au voisinage de 0,5 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - 3x + 1$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3 - 3$.
En particulier, $f'(0{,}5) = -2{,}5$.

L'approximation affine tangente de f au voisinage de 0,5 est la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = f(0{,}5) + f'(0{,}5)(x - 0{,}5)$, soit $u(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{13}{16}$.

On peut en déduire une valeur approchée de $f(0{,}6)$: $u(0{,}6) = -\frac{11}{16}$; $-\frac{11}{16}$ est donc une valeur approchée de $f(0{,}6)$.

Remarque : on a $-\frac{11}{16} = -0{,}687\,5$ et $f(0{,}6) = -0{,}670\,4$. Le réel $u(0{,}6)$ est une valeur approchée de $f(0{,}6)$ à 2×10^{-2} près.

L'étude de la précision de l'approximation n'est en général pas discutée avec les élèves car elle n'est pas au programme.

3) Estimation du nombre dérivé d'une fonction en un réel a

a . Numériquement

Soit f une fonction dérivable dont on connaît l'expression algébrique.

Le quotient $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a pour limite $f'(a)$ quand h tend vers 0. On dit que $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est une « valeur approchée » de $f'(a)$ pour h « petit », on écrit $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (voir p. 34).

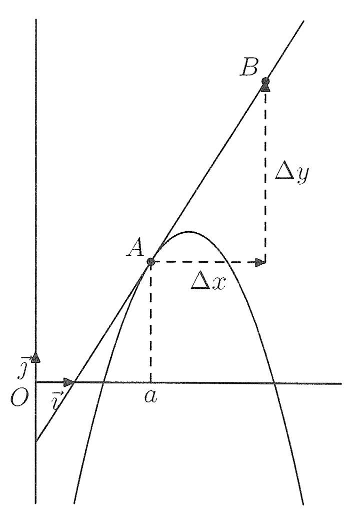
b . Graphiquement

Soit f une fonction dérivable dont on connaît la courbe représentative.

On trace une droite qui semble « tangente » (au sens géométrique donné p. 31) à la courbe, au point de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$.

Le coefficient directeur m de cette droite est une « valeur approchée de $f'(a)$ ».

Sa détermination est faite à partir de deux points placés sur la droite : $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.



4) Remarques

- Les notions sur la dérivation, abordées dans ce chapitre, sont au programme de Première S.
- La notion de dérivée d'un vecteur $\left(\text{par exemple } \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \text{ ou } \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right)$ n'est plus au programme de mathématiques de Terminale S. Cette notion mathématique sera définie en cours de physique.
- Dans l'hypothèse d'une fonction dérivable en a, en posant, pour h différent de 0, $\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$, on a $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.
  On peut alors écrire : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$. Ainsi $f(a) + hf'(a)$ peut être considéré comme une valeur approchée de $f(a+h)$, ce qui se note $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$. L'erreur absolue de cette approximation est égale à $|h\varepsilon(h)|$, et l'erreur relative est égale à $\varepsilon(h)$. L'erreur absolue et l'erreur relative tendent vers 0 quand h tend vers 0.
  Mais ces notions d'erreurs et d'incertitudes, relatives ou absolues, ne sont pas au programme de mathématiques au lycée. Avec les élèves, on dit seulement que $f(a) + hf'(a)$ est une « valeur approchée » ou une « approximation » de $f(a+h)$ pour h « petit » ou « proche de 0 », la formulation mathématique ne sera vue que dans les études supérieures.

  Ce principe d'approximation est utilisé lors de la résolution numérique d'équations différentielles par la méthode d'Euler (voir p. 72).

5) Lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée

Les théorèmes ci-dessous sont admis en classe de Première.

Théorème

> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et J un intervalle inclus dans I.
> - Si pour tout réel x de J, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur J ;
> - Si pour tout réel x de J, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur J ;
> - Si pour tout réel x de J, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur J.

Les réciproques des deux premières assertions sont fausses. Par exemple, la fonction cube (définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$) est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et cependant $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ est faux. En effet, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$.

Théorème

> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et J un intervalle inclus dans I.
> - Si pour tout réel x de J, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur J ;
> - Si pour tout réel x de J, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur J.

Propriété

> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Si la fonction f' s'annule en changeant de signe en un réel x_0 de I, alors la fonction f admet un extremum local en x_0.

6) Dérivée d'une fonction composée

Théorème

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J, et f une fonction définie et dérivable sur J.

La fonction $f \circ u$ est dérivable sur I, et $(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u)$.
Ce qui signifie que pour tout x de I, $(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'[u(x)]$.

Exemple

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \cos(ax + b)$.
φ s'écrit comme composée de la fonction affine $u : x \mapsto ax + b$ et de la fonction $f : x \mapsto \cos(x)$.
Pour tout réel x, u est dérivable et $u'(x) = a$, f est dérivable et $f'(x) = -\sin(x)$.
φ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -a\sin(ax + b)$.
Cette propriété est vue en classe de Terminale, mais les élèves la connaissent dans le cas particulier où u est une fonction affine dès la classe de Première : ils savent que la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ a pour fonction dérivée $g' : x \mapsto af'(ax + b)$.

B. Notion de dérivée en sciences physiques

Dans les situations étudiées au lycée en sciences physiques, les fonctions modélisant les phénomènes sont en général supposées dérivables. Cette hypothèse est souvent implicite, il serait profitable d'en informer les élèves.

En ce qui concerne l'estimation de la valeur de la dérivée en un point, il s'agit souvent de traiter des données expérimentales, et l'on ne pourra pas rendre h aussi « proche de 0 » que l'on veut.

En sciences physiques, c'est souvent la notion de dérivée symétrique qui est utilisée de façon intuitive. Nous en rappelons ci-dessous la définition.

1) Notion de dérivée symétrique

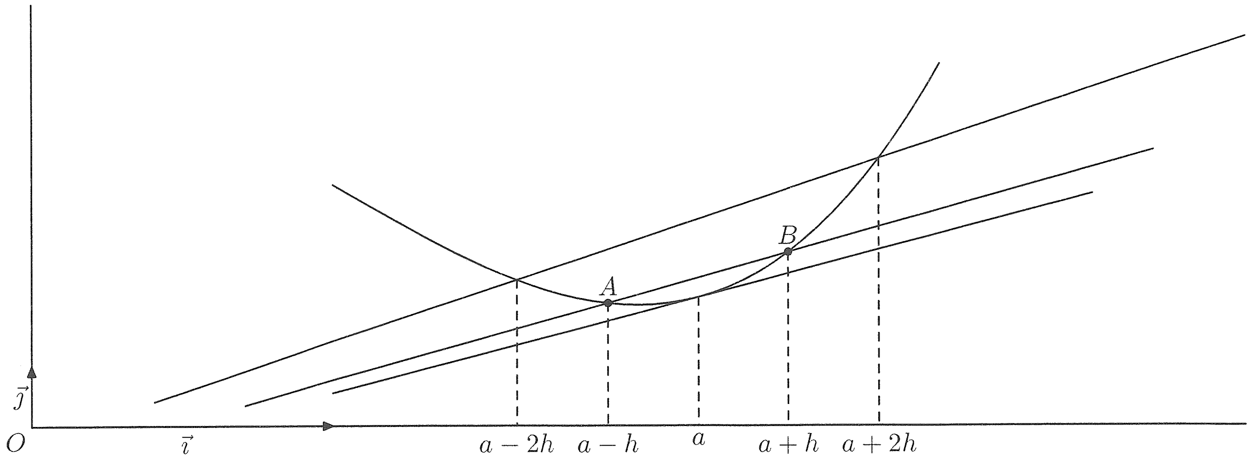
Définition et interprétation géométrique

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I contenant le réel a.
Dire que la fonction f admet un ***nombre dérivé symétrique en a*** signifie que le taux de variation de f entre $a - h$ et $a + h$ (avec h réel non nul, $a - h$ et $a + h$ éléments de I), $\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ admet une limite réelle lorsque h tend vers 0.

Remarque

Si une fonction admet un nombre dérivé en a, alors cette fonction admet un nombre dérivé symétrique en a. La réciproque est fausse (voir p. 37)

Au lieu de déterminer une valeur approchée de $f'(a)$ par la formule $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, le physicien utilise aussi la formule $\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$, où h est un réel strictement positif.



Le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ est le coefficient directeur de la droite passant par les points $A\big(a-h\ ;\ f(a-h)\big)$ et $B\big(a+h\ ;\ f(a+h)\big)$.

Le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ s'écrit $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}+\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}\right]$ qui correspond à la moyenne arithmétique d'une valeur approchée du nombre dérivé à droite et d'une valeur approchée du nombre dérivé à gauche en a.

Le *nombre dérivé à droite de f en a* est la limite réelle, si elle existe, de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h positif tend vers 0 ; le *nombre dérivé à gauche de f en a* est la limite réelle, si elle existe, de $\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ lorsque h positif tend vers 0.

Remarque : en utilisant la formule de Taylor (sous réserve que la fonction f vérifie les hypothèses permettant d'utiliser celle-ci), on peut démontrer que l'erreur entre $f'(a)$ et le taux d'accroissement usuel est de l'ordre de h, tandis que pour l'accroissement symétrique elle est de l'ordre de h^2.

a) Exemples

Vitesse instantanée

On peut évaluer la vitesse instantanée de la voiture à un instant quelconque t_i en l'assimilant à sa vitesse moyenne entre les instants t_{i-1} et t_{i+1}, soit : $\dfrac{x(t_{i+1})-x(t_{i-1})}{t_{i+1}-t_{i-1}}$.

Titrage acido-basique

Les données expérimentales ne permettent pas toujours de connaître $f(a+h)$ et $f(a-h)$. En reprenant la même méthode que ci-dessus (estimation de $f'(a)$ en prenant la moyenne arithmétique d'une valeur approchée du nombre dérivé à droite et d'une valeur approchée du nombre dérivé à gauche en a), on doit donc écrire :

$$f'(a) \approx \frac{1}{2}\left[\frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1}+\frac{f(a)-f(a-h_2)}{h_2}\right]$$

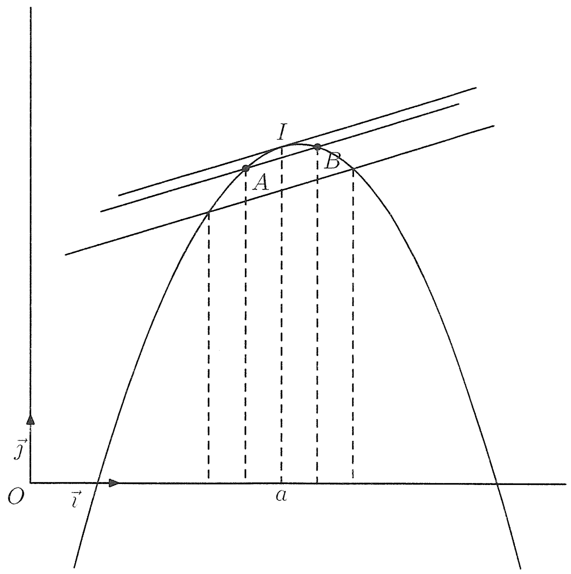
où h_1 et h_2 sont strictement positifs.

C'est le cas par exemple lorsque l'on effectue un titrage acido-basique : des données expérimentales permettent de mesurer le pH d'une solution à différents instants.

Les mesures du pH ne sont pas faites à intervalles réguliers (elles sont plus rapprochées lorsque l'on est « proche » du point d'équivalence). Si l'on veut alors représenter (à l'aide d'un tableur par exemple) la courbe représentant la dérivée de la fonction « pH » en fonction du temps, il est préférable d'utiliser la formule ci dessus. En effet, elle donne une erreur de l'ordre de $\frac{h_1 - h_2}{4}$, alors que $f'(a) \approx \frac{f(a+h_1) - f(a-h_2)}{h_1 + h_2}$ donne une erreur de l'ordre de $\frac{h_1 - h_2}{2}$.

b) Cas particuliers

Fonctions polynômes du second degré



Dans le cas d'une parabole, les sécantes, déterminées par les points d'abscisses $a - h$ et $a + h$ sont parallèles à la tangente au point d'abscisse a, ce qui se traduit par le fait que le quotient $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ ne dépend pas de h et est égal à $f'(a)$.

Remarque : cette propriété bien spécifique à cette famille de fonctions polynômes du second degré permet de tracer les tangentes de cette façon.

Cas d'une fonction deux fois dérivable

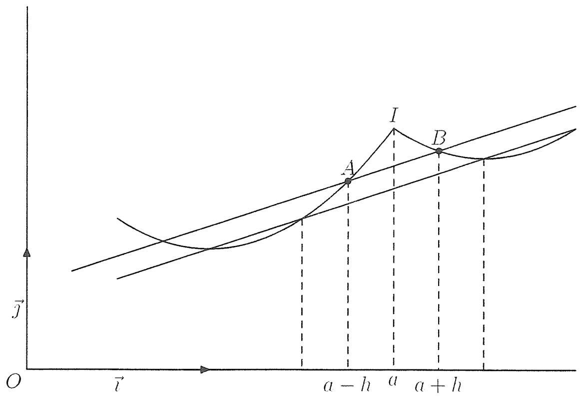
Dans le cas où la fonction f est deux fois dérivable, l'approximation $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ est meilleure que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ puisque :

$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o(h^2)$ et $f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o(h^2)$

D'où : $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{h}{2}f''(a) + o(h)$

Tandis que : $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a) + o(h)$.

Cas d'une fonction non dérivable



Dans le cas de la fonction f représentée ci-contre, le nombre dérivé à gauche de f en a est égal à environ 1,7 et le nombre dérivé à droite de f en a vaut environ $-0{,}8$.

Cette fonction f n'est pas dérivable en a.

Cependant, avec la définition du 1) a), la fonction f, non dérivable en a, y admet une dérivée symétrique et le nombre dérivé symétrique en a vaut environ 0,4.

2) Introduction de la notation de Leibniz

a) Un exemple en chimie

La première fois qu'apparaît explicitement la notion de dérivée dans le programme de physique-chimie, c'est en Terminale, en chimie, pour l'étude cinétique. L'objectif est de savoir exploiter une courbe donnant l'avancement en fonction du temps $x(t)$ afin d'étudier l'évolution de la vitesse de réaction. Aucun calcul n'est demandé dans cette partie.

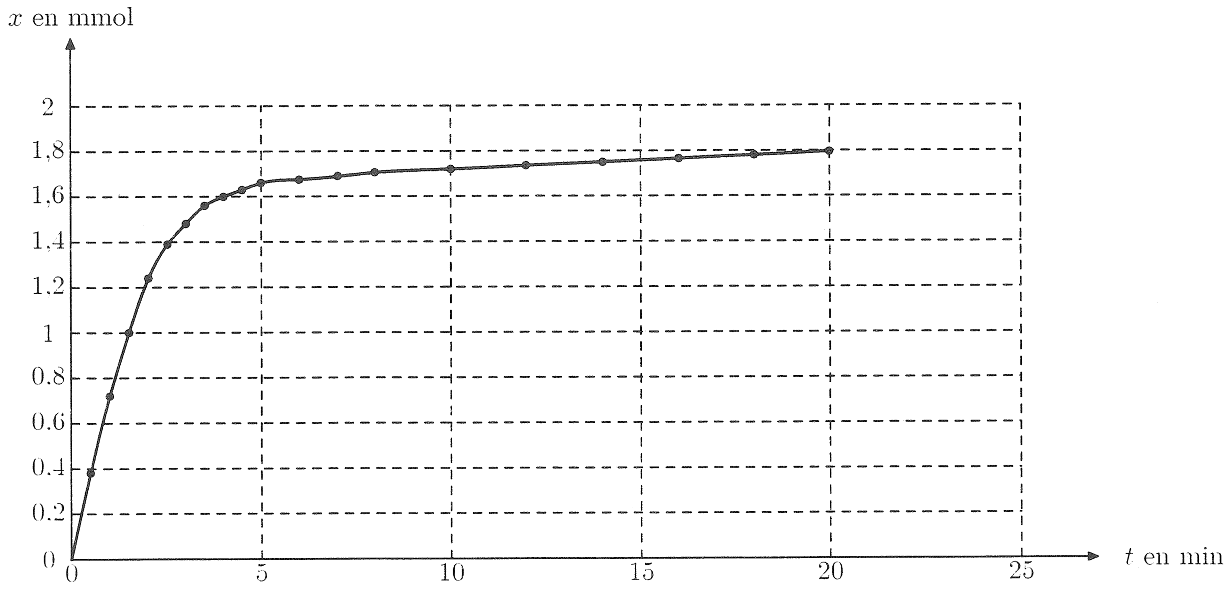
Prérequis mathématique

> On sera amené à rappeler que le nombre dérivé $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x.

Voici un exemple de courbe représentant l'avancement en fonction du temps. La transformation étudiée est la réaction du 2-chloro-2-méthylpropane sur l'eau (réaction lente et totale), modélisée par :

$$(CH_3)_3C\text{-}Cl_{(l)} + 2H_2O_{(l)} = (CH_3)_3C\text{-}OH_{(l)} + H_3O^+ + Cl^-_{(aq)}$$

Le $_{(l)}$ signifie « liquide », et le $_{(aq)}$ signifie « en solution aqueuse ».



L'avancement x (cf p. 24) est ici le nombre de moles d'alcool $(CH_3)_3C\text{-}OH$ formées.

Établissons quelques étapes possibles :

- Tout d'abord, pour l'élève de Première, l'avancement de la réaction est une quantité de matière que l'on calcule lorsque la réaction est totale (valeur maximale). Ici l'avancement évolue en fonction du temps jusqu'à atteindre la valeur maximale, et on admet que l'on peut tracer une courbe, donc qu'il existe une fonction qui à t, associe l'avancement $x(t)$.
- Pour comprendre l'expression de la vitesse de réaction, il est judicieux de faire référence à la notion de vitesse en mécanique vue en Première sous la forme : $v = \dfrac{\ell}{\Delta t}$, où ℓ est la longueur du trajet parcouru pendant Δt. Si la vitesse v est constante, ℓ est proportionnelle à Δt. En imaginant que $x(t)$ est la longueur du trajet, ici $x(t)$ se stabilise à la valeur maximale x_{max} et donc la vitesse n'est pas constante. Il nous faut donc parler de vitesse instantanée calculée à une date précise.

À l'aide de la courbe, on montre que la valeur calculée doit être prise sur un temps très court. Par conséquent, il s'agit de chercher une valeur limite :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_1 + \Delta x - x_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

On reconnaît ici l'expression du nombre dérivé $x'(t_1)$. Le physicien adopte la notation $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ à la date t_1 (notation de Leibniz, voir ci-dessous), pour bien mettre en évidence les unités et la grandeur variable.

- Le nombre dérivé $x'(t_1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe à la date t_1.
- Il semble logique d'écrire en chimie la vitesse de réaction en fonction de $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Cependant la vitesse dépend également de la concentration et il faut tenir compte du fait que x dépend du volume. C'est ainsi que l'on définit une vitesse volumique de réaction $v = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, ou encore $v = \frac{\mathrm{d}x_V}{\mathrm{d}t}$, avec $x_V = \frac{x}{V}$. Ceci correspond à la dérivée de la fonction $\frac{x}{V}$ qui pourrait être définie comme l'avancement volumique, ou l'avancement par unité de volume.
- Pour connaître l'évolution de la vitesse d'une réaction, il suffit d'observer la « pente » de la tangente à la courbe : plus la tangente est inclinée, plus la vitesse est grande. Lorsque la valeur de $x(t)$ se stabilise à la valeur $x_{\max}$, la tangente est horizontale, le coefficient directeur est alors nul, la vitesse de réaction est nulle, le système n'évolue plus.

b) Quelques remarques à propos des notations

- L'approche précédente, abordée dans le cadre de la chimie en Terminale S, a le mérite de ne pas occulter les différences de notation entre mathématicien et physicien, de faire clairement le lien avec la vitesse en mécanique, ce que les élèves ne manqueront pas de faire inconsciemment mais sans forcément reconnaître la notion sous-jacente de dérivée.
- Il existe différentes notations pour exprimer la dérivée d'une fonction. On distingue :
  - la notation de **Lagrange** : $f'(x)$;
  - la notation de **Leibniz** : $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ pour la fonction dérivée de f, ou $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, valeur de la dérivée en x ;
  - la notation de **Newton** : $\dot{y}$ qui équivaut à y' très utilisée en mécanique.
- Notons que l'utilisation de la notation de Leibniz peut engendrer des confusions chez les élèves. Il faudrait leur préciser comment utiliser cette notation.

  L'écriture $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ représente la *fonction* dérivée f'. Ainsi $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ est la *fonction* dérivée de la fonction u, u étant considérée ici comme une fonction à une seule variable, le temps. Ainsi $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$ est la valeur en t de cette fonction dérivée.

  L'écriture $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ représente le *nombre* dérivé $f'(x)$ de la fonction qui à x associe $f(x)$. Ainsi $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ est le *nombre* dérivé de la fonction qui à la date t associe la *grandeur* $u(t)$.

  Avec la première notation un élève pourrait écrire $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(3t) = f'(3t)$, avec la deuxième,

$\dfrac{\mathrm{d}f(3t)}{\mathrm{d}t} = 3f'(3t)$, et avoir quelques difficultés à s'y retrouver, par exemple lorsqu'il s'agit de dériver la fonction $t \mapsto \cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$.

La notation de Leibniz semble particulièrement adaptée lorsque les grandeurs dépendent de plusieurs variables. Considérons par exemple la grandeur puissance vérifiant la relation $P = Ri^2$. P est une grandeur qui dépend de plusieurs variables (R, i, t ...). Pour apprécier la dépendance de P vis à vis de chacune de ces variables, on peut associer à P plusieurs fonctions : la fonction qui à i associe P, celle qui à R associe P, celle qui à t associe P, etc. Le physicien les note respectivement $P(i)$, $P(R)$, $P(t)$... Notons-les dans ce paragraphe respectivement f_1, f_2, f_3. Nous avons $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i} = f_1'$, $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = f_2'$, $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = f_3'$.

- Avec la notation différentielle, la dérivée seconde en physique se note $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$.
- Comme nous l'avons vu p. 31, la notation utilisée en mathématiques au lycée, à partir de la classe de Première est celle de Lagrange.

  La notation différentielle n'est abordée que dans l'enseignement supérieur, de la façon suivante :
  Dire que la fonction f est dérivable en un réel a d'un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$ signifie qu'il existe une fonction ε définie sur I telle que :

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

  La fonction linéaire qui à h associe $f'(a)\,h$ est appelée **différentielle de f en a**. Elle est notée en général $\mathrm{d}f_a$; ainsi, $\mathrm{d}f_a(h) = f'(a)\,h$.

II Approximations

A. Aspect mathématique

1) Approximation affine

a) Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a, alors il existe une fonction ε telle que, pour h tel que $a+h$ appartienne à I,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Rappel

La fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$ est appelée approximation affine tangente de la fonction f en a.

b) Fonctions de référence

$\star$ $\sin(a+h) = \sin(a) + h\cos(a) + h\varphi(h)$, avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

On note (voir p. 34) $\sin(a+h) \approx \sin(a) + h\cos(a)$. En particulier, pour $a = 0$, $\sin(h) \approx h$.

$\star$ $\cos(a+h) \approx \cos(a) - h\sin(a)$

$\star$ $\tan(a+h) \approx \tan(a) + h\,\dfrac{1}{\cos^2(a)}\cdot$ En particulier, pour $a = 0$, $\tan(h) \approx h$.

Dans les trois exemples ci-dessus, les réels a et h sont exprimés en radians.

$\star$ $\dfrac{1}{a+h} \approx \dfrac{1}{a} + h\,\dfrac{-1}{a^2}\cdot$ En particulier, pour $a = 1$, $\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$.

$\star$ $\sqrt{a+h} \approx \sqrt{a} + h\,\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\cdot$ En particulier, pour $a = 1$, $\sqrt{1+h} \approx 1 + \dfrac{h}{2}\cdot$

$\star$ $e^{a+h} \approx e^a + he^a$. En particulier, pour $a = 0$, $e^h \approx 1 + h$.

2) Développements limités

a) Définition

On dit qu'une fonction f, définie sur un voisinage de a (sauf peut-être en a) admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a s'il existe un polynôme P de degré au plus égal à n tel que $f(x) - P(x-a)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à n par rapport à $x - a$.

$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$

b) Fonctions de référence

Développements limités usuels obtenus par la formule de Mac-Laurin :

$\star$ $e^x = 1 + \dfrac{x}{1\,!} + \dfrac{x^2}{2\,!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n\,!} + x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

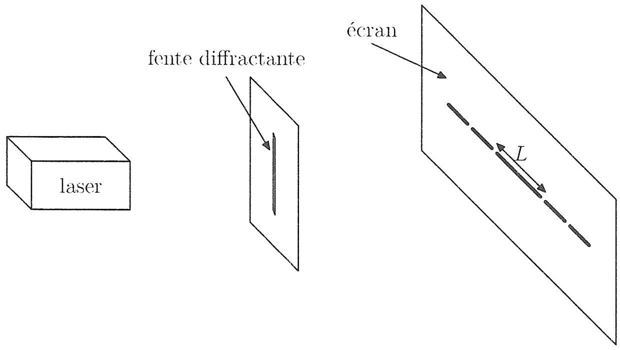
$\star$ $\sin(x) = \dfrac{x}{1\,!} - \dfrac{x^3}{3\,!} + \cdots + (-1)^p\dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)\,!} + x^{2p+2}\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

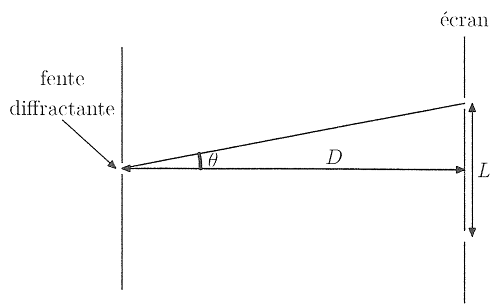
$\star$ $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2\,!} + \cdots + (-1)^p\dfrac{x^{2p}}{(2p)\,!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

B. Utilisation en physique

L'approximation de $\tan(\theta)$ par θ est utilisée, par exemple, dans le TP sur la diffraction suivant, en Terminale S.

Un autre TP sur la diffraction par un fil, réalisé en classe de Seconde, est présenté page 21. Nous rappelons ici le schéma de l'expérience, complété par une vue de dessus.





Énoncé (donné en classe de Terminale S)

Matériel : une source laser, des fentes diffractantes de largeurs a (calibrées) montées sur un support diapositive, un écran.

1 . Observez sur l'écran la figure de diffraction. Mesurez la distance D entre la fente diffractante et l'écran.

2 . Mesurez la largeur L de la tache centrale puis complétez la deuxième ligne du tableau suivant :

a (mm)	0,40	0,28	0,12	0,10	0,05	0,04	0,07
L (mm)							
$\tan(\theta)$							
θ (rad)							

3 . Déterminez ensuite la largeur angulaire θ en radian de la tache centrale de la figure de diffraction. Complétez le tableau. Qu'observez-vous ?

4 . Tracez la courbe d'équation $\theta = g(1/a)$.

5 . En déduire l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ des ondes lumineuses émises par le laser dans l'air. Déterminez également l'ordre de grandeur de la fréquence f des ondes lumineuses émises par le laser (on pourra utiliser les relations $c = \lambda f$ et $\theta = \lambda/a$).

Des éléments de correction

1 . On trouve $D = 1\,500$ mm.

2 .

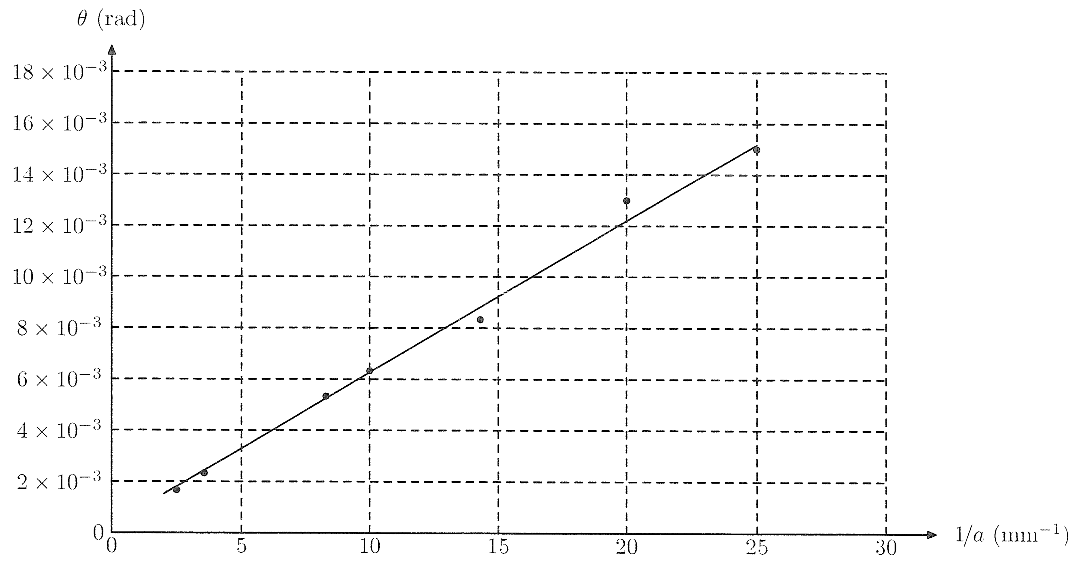
a (mm)	0.40	0,28	0,12	0,10	0,05	0,04	0,07
L (mm)	5	7	16	19	39	45	25

3 . On calcule $\tan(\theta)$ dans le triangle rectangle qui joint le centre de la fente, le centre de la tache centrale et une extrémité de cette même tache centrale. On obtient : $\tan(\theta) = \frac{L}{2D}$. La détermination de θ peut se faire en utilisant la touche $\tan^{-1}$ d'une calculatrice.

On obtient alors le tableau suivant :

a (mm)	0,40	0,28	0,12	0,10	0,05	0,04	0,07
L (mm)	5	7	16	19	39	45	25
$\tan(\theta)$	$1{,}67 \times 10^{-3}$	$2{,}33 \times 10^{-3}$	$5{,}33 \times 10^{-3}$	$6{,}33 \times 10^{-3}$	$1{,}30 \times 10^{-3}$	$1{,}50 \times 10^{-3}$	$8{,}33 \times 10^{-3}$
θ (rad)	$1{,}67 \times 10^{-3}$	$2{,}33 \times 10^{-3}$	$5{,}33 \times 10^{-3}$	$6{,}33 \times 10^{-3}$	$1{,}30 \times 10^{-2}$	$1{,}50 \times 10^{-2}$	$8{,}33 \times 10^{-3}$

Les élèves sont amenés à remarquer que $\tan(\theta) = \theta$, *et ce résultat devrait les surprendre* a priori. *On peut alors compléter le travail en faisant remarquer que cette approximation n'est valable que lorsque* θ *est exprimé en radians, et est suffisamment « petit ». Ceci peut se faire par exemple en construisant, avec un tableur ou une calculatrice, un tableau de valeurs avec* θ *en radians,* θ *en degrés et* $\tan(\theta)$. *On constate que l'approximation reste « acceptable » pour* θ *inférieur à* 0,3 rad, *c'est-à-dire environ* 15°. *Cela dépend bien sûr du nombre de chiffres significatifs souhaités.*

4 . 

5 . On a $\theta = \dfrac{\lambda}{a}$ où λ est le coefficient directeur de la droite représentant la fonction g. Par lecture graphique, ou en utilisant la fonction « régression linéaire » d'un tableur ou d'une calculatrice, on obtient : $\lambda \approx 0{,}61 \times 10^{-3}$ mm, soit $\lambda \approx 0{,}61 \times 10^{-6}$ m, ou encore $\lambda \approx 0{,}61$ µm. Cette longueur d'onde correspond à de la lumière rouge.
Comme $f = \dfrac{c}{\lambda}$, avec $c \approx 3{,}0 \times 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, on trouve $f \approx 4{,}9 \times 10^{14}$ Hz.

III Exercices

A. Exemples d'exercices donnés en cours de mathématiques

Les exercices de mathématiques suivants sont réalisables au niveau d'une Première scientifique, à l'exception des exercices sur la fonction exponentielle. L'ordre proposé a été choisi de façon à faciliter la lecture de la brochure, mais les exercices peuvent être proposés aux élèves de manière non exhaustive, et dans un ordre différent.
Naturellement une même notion peut être rencontrée dans plusieurs exercices, avec un éclairage différent.

Liste des notions rencontrées dans les exercices ci-dessous :

- Tangente à la représentation graphique d'une fonction ;
- Lien entre la courbe d'une fonction et la courbe de sa fonction dérivée ;
- Lien entre les variations d'une fonction et le signe sa dérivée. Équation d'une tangente ;
- Positions relatives d'une courbe et de ses tangentes ;
- Lecture graphique de nombres dérivés ;
- Optimisation ;
- Signification cinématique de la dérivée ; lien entre distance et vitesse ;
- Fonction exponentielle.

1) Reconnaissance d'une droite tangente à la représentation graphique d'une fonction

Cet exercice est une application directe du cours et ne présente pas de difficulté particulière. L'élève doit :
- *savoir utiliser les formules de dérivation pour calculer une fonction dérivée dans le cas d'une fonction polynôme ;*
- *connaître le lien entre le coefficient directeur de la tangente à une courbe et le nombre dérivé de la fonction associée.*

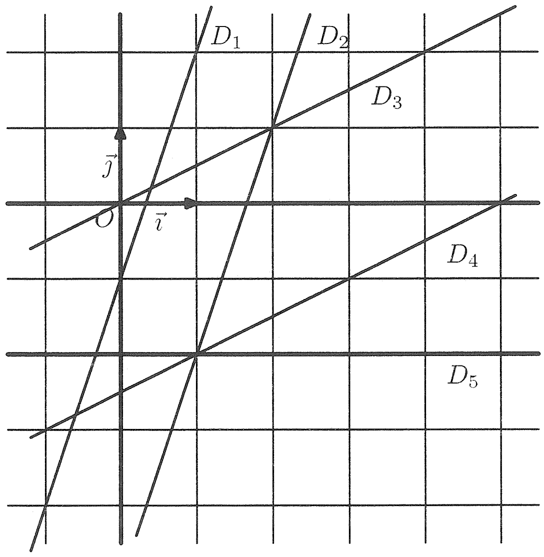
Énoncé (donné en classe de Première)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto f(x) = \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 - 1$.

1 . Calculer la dérivée de la fonction f ;

2 . En déduire $f'(1)$;

3 . Dans le graphique ci-dessous, laquelle des cinq droites tracées est la tangente à la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{\imath}\ ,\ \overrightarrow{\jmath}\ )$ au point d'abscisse 1 ?



Un exemple de solution

1 . f est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{5}{2} \times 3x^2 - \dfrac{7}{2} \times 2x$.
Conclusion : pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{15x^2}{2} - 7x$.

2 . $f'(1)$ est le nombre dérivé de f en 1 ; $f'(1) = \dfrac{15}{2} \times 1^2 - 7 \times 1$.
Conclusion : $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

3 . La tangente à la courbe représentative de f dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{\imath}\ ,\ \overrightarrow{\jmath}\ )$ au point d'abscisse 1 est la droite définie par le point $A(1\ ;\ f(1))$ et de coefficient directeur $f'(1)$.

$f(1) = -2$ et $f'(1) = \frac{1}{2}\cdot$

Les droites D_3 et D_4 sont les seules droites tracées de coefficient directeur $\frac{1}{2}\cdot$ Seule D_4 contient le point $A(1\,;-2)$.

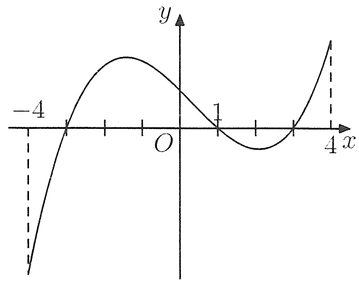
Conclusion : la droite tangente à la courbe représentative de f dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\,)$ au point d'abscisse 1 est la droite D_4.

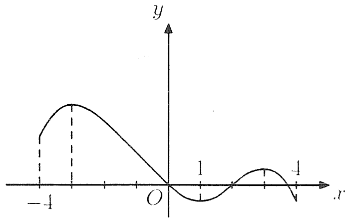
2) Association de la courbe d'une fonction à la courbe de sa fonction dérivée

Il s'agit d'associer la courbe d'une fonction à la courbe de sa fonction dérivée. Pour cela, l'élève doit connaître le lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée.

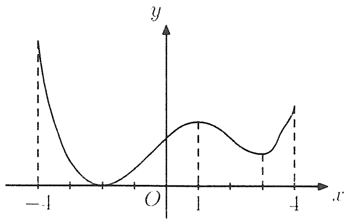
Énoncé (donné en classe de Première)
Cet exercice est extrait d'un document d'évaluation élaboré dans le cadre d'une étude EVAPM[1].

Soit D la fonction dont la courbe représentative sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$ est dessinée ci-contre :
On propose ci-dessous les courbes représentatives de cinq fonctions : f, g, h, k et m.
Déterminer celles pour lesquelles D peut être la fonction dérivée.

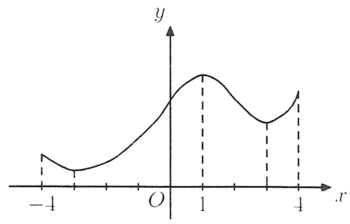




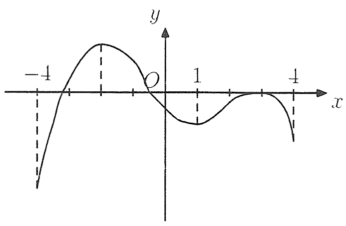
Courbe représentative de f



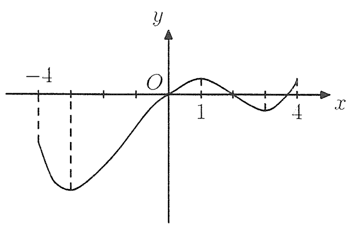
Courbe représentative de g



Courbe représentative de h



Courbe représentative de k



Courbe représentative de m

1. L'observatoire EVAPM, mis en place dans le cadre de l'association APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), est chargé de recueillir et d'analyser des informations sur les acquis des élèves. De nombreux documents sont téléchargeables sur le site : http://ctug48.univ-fcomte.fr/evapm/

Un exemple de solution

L'étude du signe de D nous donne le sens de variation de la fonction dont la fonction dérivée est D.

D est strictement négative sur $]-4\ ;\ -3[$ et sur $]1\ ;\ 3[$.

D est strictement positive sur $]-3\ ;\ 1[$ et sur $]3\ ;\ 4[$.

La fonction cherchée est donc :
- strictement décroissante sur $]-4\ ;\ -3[$ et sur $]1\ ;\ 3[$;
- strictement croissante sur $]-3\ ;\ 1[$ et sur $]3\ ;\ 4[$.

Seules les fonctions h et m vérifient ces conditions.

D s'annule en -3, 1 et 3, et change de signe en ces valeurs. On aura respectivement un minimum relatif, un maximum relatif, puis un minimum relatif pour la fonction cherchée. C'est le cas pour les fonctions h et m.

Conclusion : D peut être la fonction dérivée des fonctions h et m.

Remarque : l'étude du signe et du sens de variation se résume à l'aide du tableau.

x	-4		-3		1		3		4
Signe de D		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de la fonction		↘	m_1	↗	M	↘	m_2	↗	

3) Lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée. Équation d'une tangente.

L'objectif est d'obtenir le tracé de la courbe représentative d'une fonction sans utilisation d'une calculatrice graphique. Pour cela l'élève doit :

étudier les variations de la fonction en étudiant le signe de sa dérivée.

déterminer, puis tracer une tangente pour améliorer la précision du tracé.

Cette étude est exigible en fin de Première S. Les fonctions polynômes étudiées en Première S sont de degré 4 au maximum.

Énoncé (donné en classe de Première)

Soit la fonction f définie sur $[-1{,}5\ ;\ 3]$ par $f(x) = \dfrac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 4$; soit $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$.

1 . Étudier le sens de variation et dresser le tableau de variation de f.

2 . Déterminer une équation de la tangente T à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

3 . Tracer T puis $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$.

Un exemple de solution

1 . Les variations de la fonction f s'obtiennent à partir du signe de la dérivée de cette fonction.

f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$.
On a donc $f'(x) = 3x(x^2 - x - 2)$.
On détermine les racines, puis le signe de $f'(x)$.

On peut alors dresser le tableau de variation de f :

x	$-1{,}5$		-1		0		2		3
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$427/64$	↘	$2{,}75$	↗	4	↘	-4	↗	$10{,}75$

La fonction f est strictement décroissante sur $[-1{,}5\ ;\ -1]$ et sur $[0\ ;\ 2]$, et est strictement croissante sur $[-1\ ;\ 0]$ et sur $[2\ ;\ 3]$.

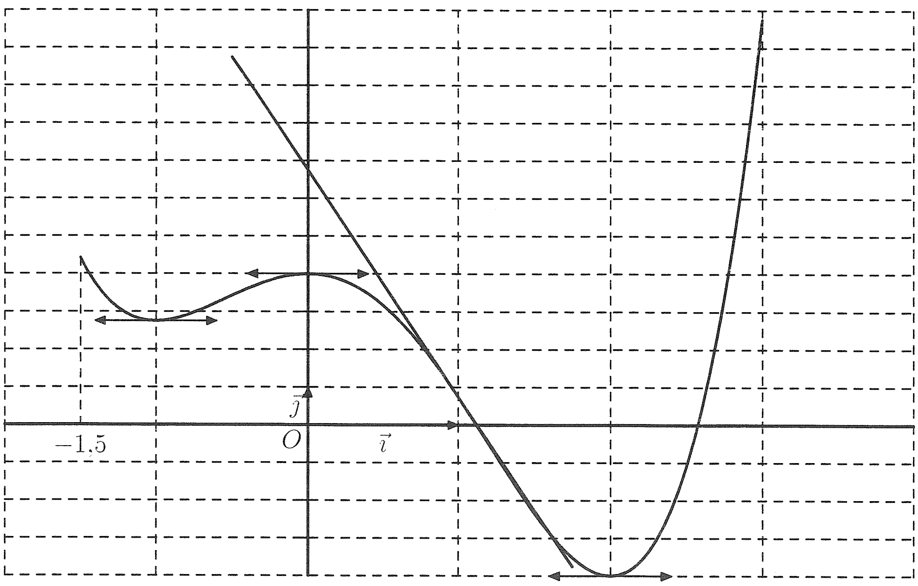
Remarques

- *Le calcul de $f(-1{,}5)$ est un peu lourd, mais l'objectif est d'inciter les élèves à la pratique de la calculatrice.*
- *La fonction f n'est pas strictement décroissante sur $[-1{,}5\ ;\ -1] \cup [0\ ;\ 2]$, ce qui est une erreur classique des élèves.*
- *Les valeurs numériques données dans le tableau de variation sont des valeurs exactes.*
- *Lorsque le tableau de variation n'est pas explicitement demandé, il n'est pas indispensable, mais il donne une bonne vision globale de certaines propriétés de f.*

2 . Lorsqu'une fonction f est dérivable en a, sa courbe représentative admet, au point d'abscisse a, une tangente d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Donc T a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = -6x + \dfrac{27}{4}$.

3 . Tracé de la courbe :



Même si cela n'est pas demandé explicitement, on attend le tracé de toutes les tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

Dans l'exemple choisi, l'élève peut rencontrer des difficultés à positionner la courbe $(\mathscr{C}_f)$ *par rapport à la tangente* T*, car le point* $A(1\,;f(1))$ *est proche du point d'inflexion. La notion de point d'inflexion n'est pas au programme de Première S, mais elle peut être étudiée sur un exemple, ce qui est proposé dans l'exercice suivant.*

4) Positions relatives d'une courbe et de ses tangentes

a) Exercice

L'objectif est d'étudier, sur un exemple de fonction, les positions relatives d'une courbe et de ses tangentes. Le lien est fait entre ces positions et le sens de variation de la fonction dérivée.

Sur cet exemple, la notion de point d'inflexion est mise en évidence.

La factorisation permettant de donner les positions relatives de la courbe et de ses tangentes peut présenter une difficulté dans le domaine du calcul algébrique, c'est pourquoi la fonction est volontairement choisie d'expression simple. Néanmoins cet exercice reste un exercice difficile pour un élève « moyen » de Première S.

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3-3x^2+x+1$, et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\,)$.

1 . Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2 . Déterminer le sens de variation de la fonction f', fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

3 . Soit A le point de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse -1.

   a) Écrire une équation de la tangente Δ à $(\mathscr{C}_f)$ en A.

   b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et de Δ.

   Indication : on pourra déterminer des réels a, b *et* c *tels que :*

$$x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

4 . Soit x_0 un réel de $]-\infty\,;\,1[$. On note M_0 le point de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse x_0.

   a) Écrire une équation de la tangente Δ_0 à $(\mathscr{C}_f)$ en M_0.

   b) Démontrer que, sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, $(\mathscr{C}_f)$ se situe « en dessous » de chacune de ses tangentes et que, sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, $(\mathscr{C}_f)$ se situe « au-dessus » de chacune de ses tangentes.

   Indication : on pourra utiliser l'une des factorisations :

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad ; \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

5 . Donner la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à sa tangente (D) au point $B(1\,;\,f(1))$.

6 . Tracer $(\mathscr{C}_f)$, en précisant les points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

Un exemple de solution

1 . La fonction f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$. Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
$f'(x)$ est un polynôme du second degré s'annulant pour $x = 1+\frac{\sqrt{6}}{3}$ et pour $x = 1-\frac{\sqrt{6}}{3}$.
Le coefficient de x^2 est positif. On en déduit que $f'(x) < 0$ si et seulement si $1-\frac{\sqrt{6}}{3} < x < 1+\frac{\sqrt{6}}{3}$, et que $f'(x) > 0$ si et seulement si $x < 1-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ou si $x > 1+\frac{\sqrt{6}}{3}$.
Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\,1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right[$ et sur $\left]1+\frac{\sqrt{6}}{3}\,;\,+\infty\right[$, et est strictement décroissante sur $\left]1-\frac{\sqrt{6}}{3}\,;\,1+\frac{\sqrt{6}}{3}\right[$.

2 . La fonction f' est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f''(x) = 6x - 6$.
$f''(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$; $f''(x) < 0$ si et seulement si $x < 1$.

On en déduit que la fonction f' est strictement croissante sur $]1\,;\,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$.

3 . a) Une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point A d'abscisse -1 est :
$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$; une équation de Δ est donc : $y = 10x + 6$.

b) $f(x) - (10x+6) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$.

Or $(x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$. Donc, pour que $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1)(ax^2+bx+c)$, il suffit de choisir a, b et c tels que :
$\begin{cases} a &= 1 \\ a+b &= -3 \\ b+c &= -9 \\ c &= -5 \end{cases}$. Ce système équivaut à $\begin{cases} a &= 1 \\ b &= -4 \\ c &= -5 \end{cases}$

D'où, $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1)(x^2 - 4x - 5)$.
Puis, en factorisant le trinôme $(x^2 - 4x - 5)$, $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1)^2(x-5)$.

On en déduit que $(\mathscr{C}_f)$ est en dessous de Δ sur $]-\infty\,;\,5[$ et au-dessus de Δ sur $]5\,;\,+\infty[$.

4 . a) Une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point M_0 d'abscisse x_0 est :
$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, avec $f(x_0) = x_0^3-3x_0^2+x_0+1$ et $f'(x_0) = 3x_0^2-6x_0+1$.

b) La représentation graphique de f est située « en dessous » de chacune de ses tangentes sur $]-\infty\,;\,1[$ signifie que pour tout x de $]-\infty\,;\,1[$ et tout x_0 de $]-\infty\,;\,1[$, $f(x) \leqslant f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

Étudions le signe de $\delta(x)$, avec $\delta(x) = f(x) - f'(x_0)(x-x_0) - f(x_0)$.

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= x^3 - x_0^3 - 3x^2 + 3x_0^2 + x - x_0 - (x-x_0)(3x_0^2 - 6x_0 + 1) \\
&= (x-x_0)(x^2 + x_0^2 + xx_0 + 1) - 3(x-x_0)(x+x_0) - (x-x_0)(3x_0^2 - 6x_0 + 1) \\
&= (x-x_0)(x^2 + x_0^2 + xx_0 - 3x_0 - 3x - 3x_0^2 + 6x_0) \\
&= (x-x_0)(x-x_0)(x+2x_0-3) \\
&= (x-x_0)^2(x+2x_0-3)
\end{aligned}$$

Si $x \leqslant 1$ et si $x_0 \leqslant 1$, alors $\delta(x) \leqslant 0$ et $(\mathscr{C}_f)$ est en dessous de ses tangentes sur $]-\infty\,;\,1[$.

Si $x \geqslant 1$ et si $x_0 \geqslant 1$, alors $\delta(x) \geqslant 0$ et $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de ses tangentes sur $]1\,;\,+\infty[$.

5 . Pour $x_0 = 1$, $\delta(x) = (x-1)^2(x-1)$, soit $\delta(x) = (x-1)^3$.

Si $x \leqslant 1$, $\delta(x) \leqslant 0$, donc $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de D.

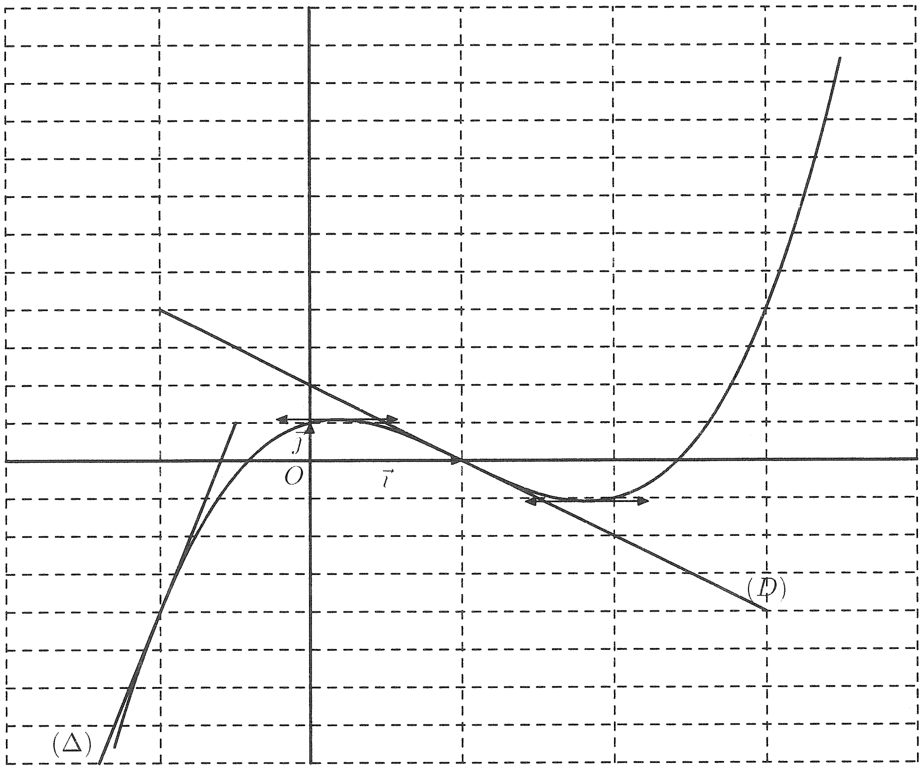
Si $x \geqslant 1$, $\delta(x) \geqslant 0$, donc $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessous de D.

Remarque

La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point B « coupe » $(\mathscr{C}_f)$ en B, donc le point B est un ***point d'inflexion*** de $(\mathscr{C}_f)$.

6 . $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-1) = 0$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 1 + \sqrt{2}$ ou $x = 1 - \sqrt{2}$.

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe donc l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1, $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$.



b) Activités

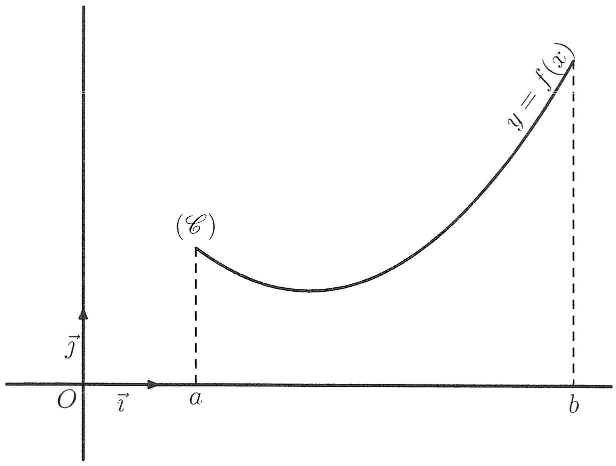
Une étude plus générale du lien entre les positions relatives d'une courbe et de ses tangentes, et les variations de la fonction dérivée associée peut être proposée en activité à faire en classe. L'activité ci-dessous propose une phase d'observation graphique, suivie d'une éventuelle démonstration.

Ces notions ne sont pas exigibles au niveau lycée en mathématiques, mais sont utilisées dans certaines situations en physique et en chimie.

Observation d'une courbe

Soit $(\mathscr{C})$ la représentation graphique dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\,)$ d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

Activité A



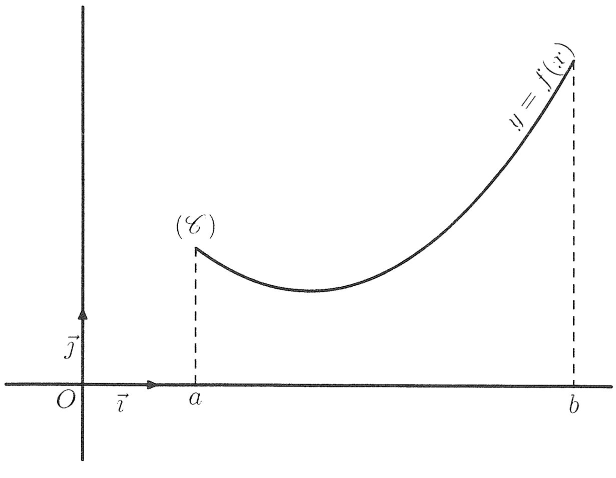
1 . Placer un point M_0 sur la courbe $(\mathscr{C})$. À l'aide d'une règle, tracer une droite passant par M_0 et qui vous semble être tangente à la courbe $(\mathscr{C})$.

2 . Répéter ce tracé pour une dizaine de points de la courbe $(\mathscr{C})$.

3 . Donner la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à chacune de ses tangentes.

4 . Traduire mathématiquement la conjecture émise dans la question précédente.

Activité B



1 . Placer un point M_0 sur la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse x_0. À l'aide d'une règle, tracer la tangente Δ_0 à la courbe $(\mathscr{C})$ en M_0.

2 . Tracer la droite Δ_0' parallèle à Δ_0 passant par O, puis le point T_0 sur Δ_0' d'abscisse 1. Quelle est son ordonnée ?

3 . Répéter ce tracé pour une dizaine de points de la courbe $(\mathscr{C})$.

4 . En observant les positions relatives de ces points T_0, émettre une conjecture concernant le sens de variation de la fonction dérivée f' de f sur $[a\,;\,b]$.

Après une première phase d'observations et de conjectures, les démonstrations suivantes peuvent être proposées aux élèves.

Énoncé de la proposition

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $[a\ ;\ b]$.
La fonction f', fonction dérivée de la fonction f, est croissante sur $[a\ ;\ b]$ si et seulement si la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f est au-dessus de chacune de ses tangentes sur $[a\ ;\ b]$.

Démonstration de la proposition

– Supposons la fonction f' croissante sur $[a\ ;\ b]$, montrons que la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f est au-dessus de chacune de ses tangentes sur $[a\ ;\ b]$.

Soit M_0 le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse x_0, et Δ_0 la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ en M_0 ; Δ_0 a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Posons $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$.
Or, par hypothèse, la fonction f' est croissante sur $[a\ ;\ b]$, donc $f'(x)$ et $f'(x_0)$ sont rangés dans le même ordre que x et x_0.
Par conséquent, si $x < x_0$, alors $f'(x) < f'(x_0)$ et $g'(x) < 0$ et si $x > x_0$, alors $f'(x) > f'(x_0)$ et $g'(x) > 0$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $[a\ ;\ x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0\ ;\ b]$. Elle admet donc un minimum en x_0 et ce minimum est égal à $g(x_0)$, soit 0.
On peut résumer ces résultats dans le tableau de variations ci-dessous :

x	a		x_0		b
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$g(a)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$g(b)$

On en déduit que pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $g(x) \geqslant 0$.
Conclusion : la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de Δ_0 sur $[a\ ;\ b]$.

– Supposons que la courbe représentative $(\mathscr{C})$ est au-dessus de chacune de ses tangentes sur $[a\ ;\ b]$, montrons que la fonction f' est croissante sur $[a\ ;\ b]$.

Soit x_1 et x_2 deux réels de $[a\ ;\ b]$. Le fait que la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de ses tangentes aux points d'abscisses x_1 et x_2 sur $[a\ ;\ b]$ se traduit par :
pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$

$$f(x) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \quad (1)$$
$$f(x) \geqslant f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) \quad (2)$$

En particulier, en remplaçant x par x_2 dans la première inégalité, et par x_1 dans la deuxième, on obtient :

(1') $\qquad f(x_2) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$

(2') $\qquad f(x_1) \geqslant f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$

Puis, en ajoutant membre à membre ces deux inégalités :

$$f(x_2) + f(x_1) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

Soit : $0 \geqslant (f'(x_1) - f'(x_2))(x_2 - x_1)$

On en déduit que $(f'(x_1) - f'(x_2))$ et $(x_2 - x_1)$ sont de signes contraires, donc que $(f'(x_1) - f'(x_2))$ et $(x_1 - x_2)$ sont de même signe, et par conséquent que $f'(x_1)$ et $f'(x_2)$ sont rangés dans le même ordre que x_1 et x_2.

Conclusion : la fonction f' est croissante sur $[a\ ;\ b]$.

Remarques

- Ayant supposé que f est deux fois dérivable sur $[a\ ;\ b]$, f' est croissante sur $[a\ ;\ b]$ équivaut à f'' positive sur $[a\ ;\ b]$.
- Le point I est un point d'inflexion pour une courbe $(\mathscr{C})$ si et seulement si la courbe « traverse » sa tangente en I.
- Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $[a\ ;\ b]$. les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\quad f''$ est positive sur $[a\ ;\ b]$

(b) $\quad (\mathscr{C})$ est au-dessus de chacune de ses tangentes sur $[a\ ;\ b]$

(c) $\quad f'$ croissante sur $[a\ ;\ b]$

- On a les propriété analogues lorsque $(\mathscr{C})$ est en dessous de chacune de ses tangentes sur $[a\ ;\ b]$.
- La recherche d'un point d'inflexion se détermine en étudiant le signe de la dérivée seconde.

5) Lecture graphique de nombres dérivés

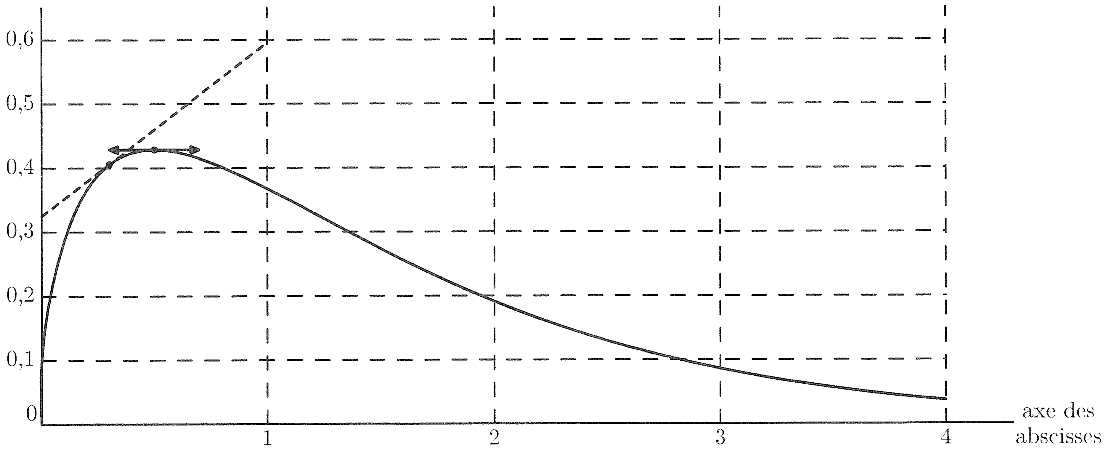
Cet exercice porte essentiellement sur la lecture graphique de nombres dérivés. L'élève doit aussi connaître le lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée.

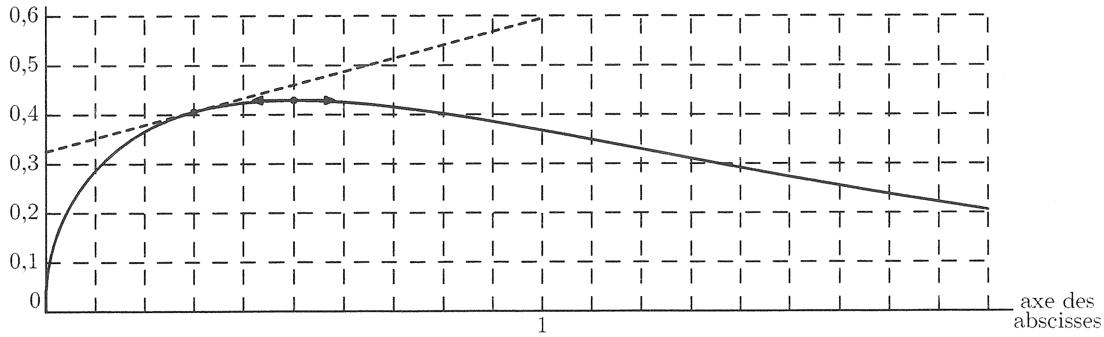
Énoncé (donné en classe de Première)

Soit f la fonction représentée graphiquement ci-dessous.

La première représentation est dans un repère orthogonal, la seconde dans un repère orthonormal.

L'axe des ordonnées est tangent à la courbe au point d'abscisse 0, et la tangente au point d'abscisse 0,5 est parallèle à l'axe des abscisses. Enfin, la tangente au point d'abscisse 0,3 est représentée en pointillés.





1 . Estimer le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0,3 dans chacune des figures.
Comment note-t-on le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0,3 ?

2 . La fonction f est-elle dérivable sur l'intervalle $[0 ; 4]$?

3 . Résoudre graphiquement sur $]0 ; 4]$ les inéquations suivantes :
   a) $f'(x) \leqslant 0$
   b) $f'(x) > 0$

4 . a) Comparer $f'(0.1)$ et $f'(0.3)$. Comparer $f'(1)$ et $f'(3)$.
   b) Émettre une conjecture sur le sens de variation de la fonction f'.

Un exemple commenté de solution

1 . La tangente à la courbe au point d'abscisse 0,3, d'ordonnée 0,4, est déterminée par un point et son coefficient directeur, ou par deux points distincts. On peut prendre $A(0{,}3 ; 0{,}4)$ (point de tangence) et $B(1 ; 0{,}6)$.
Le coefficient directeur de la droite (AB), non parallèle à l'axe des ordonnées est : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
Le coefficient directeur de la tangente au point $A(0{,}3 ; 0{,}4)$ à la représentation graphique de f est $\dfrac{0,6 - 0,4}{1 - 0,3}$, soit $\dfrac{2}{7}$.
Remarque : il est intéressant de faire remarquer aux élèves que le coefficient directeur d'une droite ne dépend que des coordonnées des points, et pas de l'unité choisie pour le repère.

2 . La fonction f n'est pas dérivable en 0 puisque, par hypothèse, la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est l'axe des ordonnées.

Remarque : pour tout x_0 de $]0\ ;\ 4]$, en chaque point M_0 de la courbe, d'abscisse x_0, on peut tracer une droite tangente à celle-ci, non parallèle à l'axe des ordonnées ; c'est-à-dire que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ 4]$.

3 . Soit x_0 un réel de l'intervalle $]0\ ;\ 4]$. Il s'agit de repérer, à partir du graphique, si la tangente a un coefficient directeur négatif ou nul.

a) $f'(x) \leqslant 0$: l'ensemble des solutions est l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 4]$.

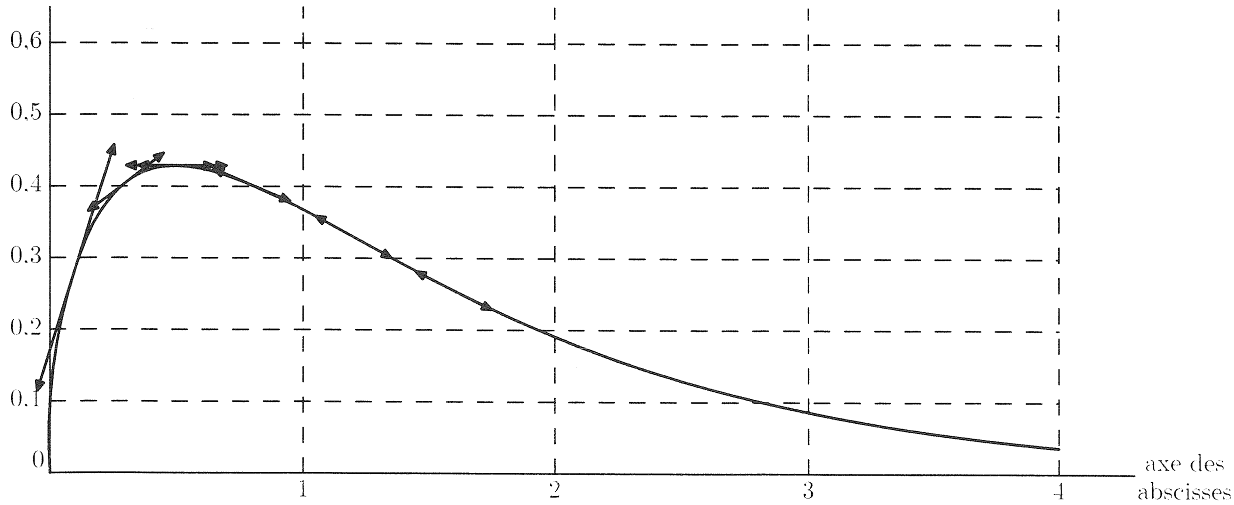
b) $f'(x) > 0$: l'ensemble des solutions est l'intervalle $]0\ ;\ 0{,}5[$.

4 . a) $f'(0{,}1) \approx 1$ et $f'(0{,}3) \approx 2$; d'où $f'(0,1) > f'(0,3)$.

$f'(1) \approx \dfrac{-0{,}5}{3}$ et $f'(3) \approx \dfrac{-0{,}8}{1}$; d'où $f'(1) > f'(3)$.

b) En observant le graphique, on peut proposer : f' est décroissante sur $]0\ ;\ 1{,}2]$ et croissante sur $[1{,}2\ ;\ 4]$.

Le nombre dérivé de la fonction en un réel x_0 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 ; l'élève peut matérialiser à l'aide d'une règle les tangentes à la courbe et regarder les variations des coefficients directeurs.



On peut aussi faire le lien entre les variations de la fonction dérivée f' et les positions relatives de la courbe et de ses tangentes. (voir 4.b)).

6) Optimisation

L'objectif de l'exercice est une recherche de maximum. Pour cela l'élève doit :

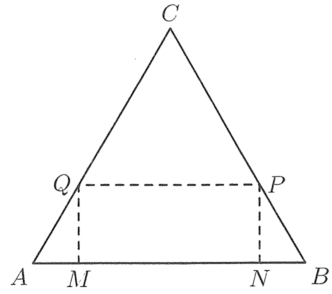
- *mathématiser le problème (choix de l'inconnue, détermination de l'expression algébrique de l'aire) ;*
- *étudier les variations d'une fonction pour en déterminer le maximum.*

Il s'agit de réinvestir des méthodes déjà utilisées, mais ici l'élève n'est pas guidé et doit prendre des initiatives.

Énoncé (donné en classe de Première)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.

$MNPQ$ est un rectangle tel que M et N sont deux points du segment $[AB]$, P un point du segment $[BC]$ et Q un point du segment $[AC]$.



Pour quelle position de M sur $[AB]$ l'aire du rectangle $MNPQ$ est-elle maximale ? Exprimer ce maximum en fonction de a.

Un exemple de solution

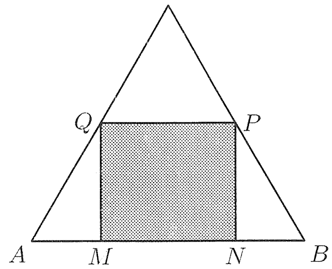
On pose $x = AM$; $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$ car $M \in [AB]$ et $Q \in [AC]$.
Dans le triangle AMQ rectangle en M, $\frac{QM}{AM} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$, d'où $QM = x\sqrt{3}$.
Dans le triangle PNB rectangle en N, $\frac{PN}{NB} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Or, $MNPQ$ étant un rectangle, $QM = PN$, d'où $NB = AM$.
On a alors, Aire$(MNPQ) = MN \times QM$, avec $MN = a - 2x$ et $QM = x\sqrt{3}$.
D'où, Aire$(MNPQ) = (a - 2x)x\sqrt{3}$.

L'aire du rectangle est donc fonction de x. Notons f la fonction définie par : $f(x) = (a - 2x)x\sqrt{3}$.
Étude du sens de variation de f :
La fonction f est définie et dérivable sur $\left[0 ; \frac{a}{2}\right]$ en tant que fonction polynôme.
$f'(x) = -2x\sqrt{3} + \sqrt{3}(a - 2x)$: $f'(x) = \sqrt{3}(a - 4x)$.
Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{4}$, alors $f'(x) \geqslant 0$; si $\frac{a}{4} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$, alors $f'(x) \leqslant 0$.
La fonction f est croissante sur $\left[0 ; \frac{a}{4}\right]$, puis décroissante sur $\left[\frac{a}{4} ; \frac{a}{2}\right]$. On en déduit que f possède un maximum atteint en $x = \frac{a}{4}$. Ce maximum est $f\left(\frac{a}{4}\right) = \left(a - 2 \times \frac{a}{4}\right)\frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2}{8}\sqrt{3}$.

Conclusion :

Le rectangle $MNPQ$ a une aire maximale lorsque $AM = \frac{1}{4}AB$.

Ce maximum est égal à $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.



Remarques

Les côtés du rectangle ont alors pour longueurs : $MN = \frac{a}{2}$ et $QM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. L'aire maximale du rectangle est égale à la moitié de celle du triangle équilatéral.

7) Signification cinématique de la dérivée ; lien entre distance et vitesse

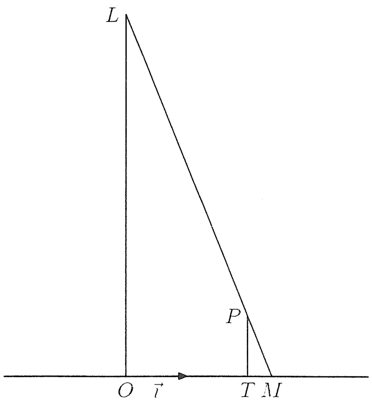
L'objectif est la mathématisation d'un problème issu de la physique. Cette activité (ou une activité similaire) est inscrite dans le programme de mathématique de Première S.

Énoncé (donné en classe de Première)

Une lampe brille en haut d'un réverbère urbain de 6 mètres de hauteur. Tom, qui mesure 1 mètre, s'éloigne du réverbère en ligne droite à une vitesse égale, à l'instant t (exprimé en secondes), à $v_T(t)$, (exprimée en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$). Quelle est la vitesse de l'extrémité de son ombre quand il passe à 10 mètres du pied du réverbère ? On fera l'application numérique avec $v_T(t) = 1{,}2\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$.

Un exemple de solution

Schéma de la situation :



Le point L représente la lampe, le segment $[PT]$ représente Tom, et le point M représente l'extrémité de son ombre.

Soit $(O\ ;\ \overrightarrow{\imath})$ un repère de la droite (OM). On appelle $d_T(t)$ et $d_M(t)$ les abscisses respectives des points M et T dans ce repère à l'instant t.

Les vitesses instantanées de Tom et de son ombre à l'instant t, notées respectivement $v_T(t)$ et $v_M(t)$ sont données par $d'_T(t)$ et $d'_M(t)$, avec l'unité correspondante.

Dans les triangles MLO et MPT, les droites (LO) et (PT) étant parallèles, on peut écrire : $\dfrac{PT}{LO} = \dfrac{MT}{MO}$, avec $MT = OM - OT$.

On en déduit : $OM = OT \times \dfrac{6}{5}$.

Les points T et M étant du même côté de O, on a : $d_M(t) = d_T(t) \times \dfrac{6}{5}$.

En dérivant, on obtient : $v_M(t) = v_T(t) \times \dfrac{6}{5}$.

Application numérique : la vitesse de Tom étant de $1{,}2\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, la vitesse de son ombre est de $1{,}44\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Remarque : la vitesse de l'ombre de Tom est supérieure à celle de Tom (elle est multipliée par $\dfrac{6}{5}$), mais reste constante lorsque celle de Tom est constante. Tom va moins vite que son ombre !

8) Exercices sur la fonction exponentielle

L'exercice 1 consiste en l'étude de la fonction numérique réelle définie par $t \mapsto f(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. *Cette étude aboutit à sa représentation graphique.*

À l'exercice 2, on étudie les fonctions définies par $t \mapsto g(t) = E(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$, *$E$ et τ étant des constantes réelles. Dans le cas particulier où $E = 1$ et $\tau = 1$, on retrouve la fonction f étudiée à l'exercice 1. On termine l'étude par le tracé de quelques courbes représentatives.*

À l'exercice 3, on s'intéresse à nouveau aux fonctions g de l'exercice 2, mais il s'agit d'obtenir le tracé des représentations graphiques à partir de la représentation de f, par des transformations géométriques, sans l'étude préalable des fonctions.

a) Exercice 1

Énoncé

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par $t \mapsto f(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$ où $t \in \mathbb{R}_+$.

1 . Déterminer le sens de variation de f sur $[0 \,;\, +\infty[$;

2 . Déterminer la limite de f en $+\infty$;

3 . Dresser le tableau de variation de f ;

4 . Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f, relativement à un repère orthogonal $(O \,;\, \overrightarrow{\imath}\,,\, \overrightarrow{\jmath}\,)$ et la droite D d'équation $y = 1$;

5 . Tracer la tangente Δ à $\mathscr{C}$, au point d'abscisse 0. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de Δ avec la droite D.

Un exemple de solution

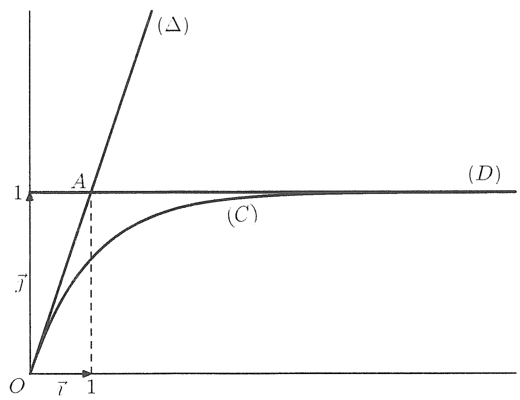
1 . La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On a $f'(t) = (-1) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-t}$, soit $f'(t) = \mathrm{e}^{-t}$; or la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, d'où pour tout t de $\mathbb{R}_+$, $f'(t) > 0$. En conséquence, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2 . $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$. Par suite, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 1$.

3 . Tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	1	$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	1

4 . Tracé de la courbe représentative de f, de D et de Δ :



5 . Δ a pour équation : $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$, soit $y = x$.

$A(x \,;\, y) \in D \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y & = & 1 \\ y & = & x \end{cases}$. Donc l'abscisse du point d'intersection de Δ et de D est 1.

b) Exercice 2

Énoncé

Soit la fonction numérique de la variable réelle t, positive ou nulle, qui à tout réel t associe le réel $E\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, où E et τ sont des paramètres (réels connus) strictement positifs.

On note $g(t)=E\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Ainsi, pour $E=1$ et $\tau=1$, $g(t)=f(t)$, f étant la fonction définie dans l'exercice 1.

1 . Déterminer le sens de variation de la fonction g ;

2 . Déterminer la limite de cette fonction en $+\infty$;

3 . Dresser le tableau de variation de g ;

4 . Soit (D) la droite d'équation $y=E$ relativement à un repère orthogonal $(O\ ;\ \overrightarrow{\imath}\ ,\ \overrightarrow{\jmath}\ )$. Écrire une équation de la tangente (Δ) à la représentation graphique (Γ) de g dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{\imath}\ ,\ \overrightarrow{\jmath}\ )$ au point d'abscisse 0. Donner les coordonnées du point I d'intersection de (Δ) et (D) ;

5 . Tracer (D), (Δ), (Γ) et I dans chacun des cas suivants :

a) $E=2$ et $\tau=1$,

b) $E=1$ et $\tau=2$,

c) $E=\dfrac{1}{2}$ et $\tau=3$,

d) $E=3$ et $\tau=\dfrac{1}{4}$.

Un exemple de solution

1 . La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
$g(t)=E\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, donc $g'(t)=E\times(-1)\times\left(-\dfrac{1}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$, soit $g'(t)=\dfrac{E}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$. On constate que pour tout réel t positif ou nul, $g'(t)$ est positive ou nulle.
Ainsi, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2 . $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=0$ car $\dfrac{1}{\tau}>0$. D'où $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=E$.

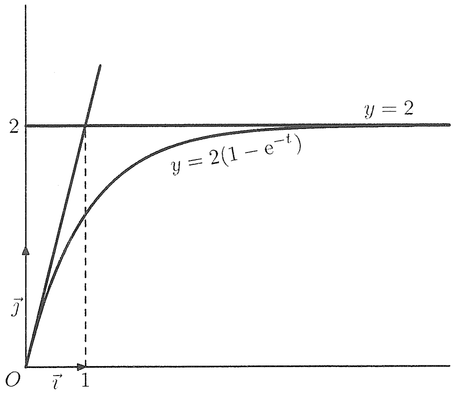
3 . Tableau de variation de g :

t	0	$+\infty$
Signe de $g'(t)$	$\frac{E}{\tau}$ $+$	
Variations de g	0 $\nearrow$	E

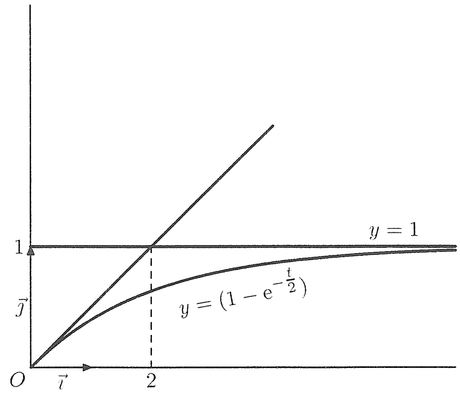
4 . (Δ) a pour équation : $y=g'(0)\times(x-0)+g(0)$, soit $y=\dfrac{E}{\tau}x$.

$$I(x\ ;\ y)\in D\cap\Delta \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y&=&E\\ y&=&\dfrac{E}{\tau}x\end{array}\right. \text{. D'où } I(\tau\ ;\ E).$$

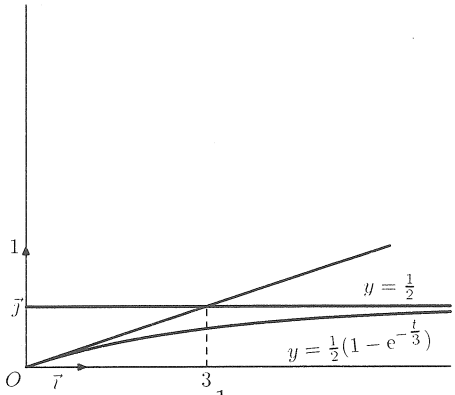
5 . Tracé des courbes représentatives de g, de (D) et de (Δ) :



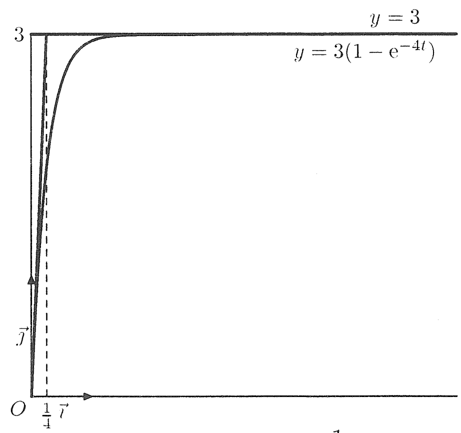
a) $E = 2 \quad \tau = 1$



b) $E = 1 \quad \tau = 2$



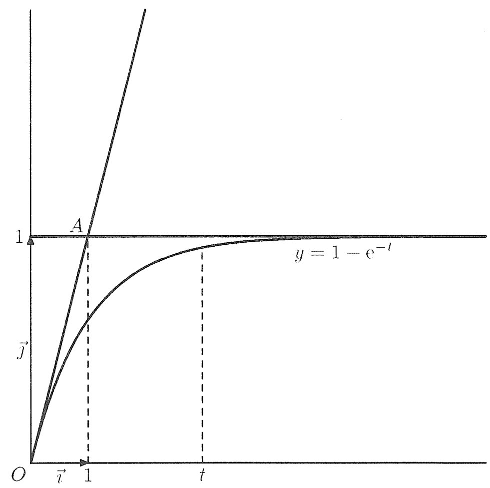
c) $E = \dfrac{1}{2} \quad \tau = 3$



d) $E = 3 \quad \tau = \dfrac{1}{4}$

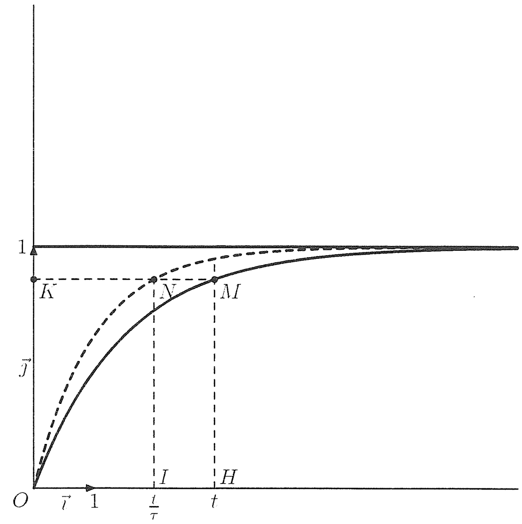
c) Exercice 3

Il s'agit, dans cet exercice de tracer quelques courbes représentatives des fonctions g définies à l'exercice 2, à partir de la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction f définie à l'exercice 1, sans effectuer l'étude des fonctions g.



Courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $y = 1 - \mathrm{e}^{-t}$

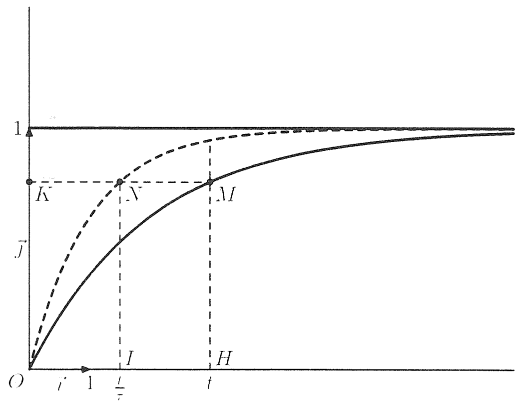
Tracé des courbes d'équation $y = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$



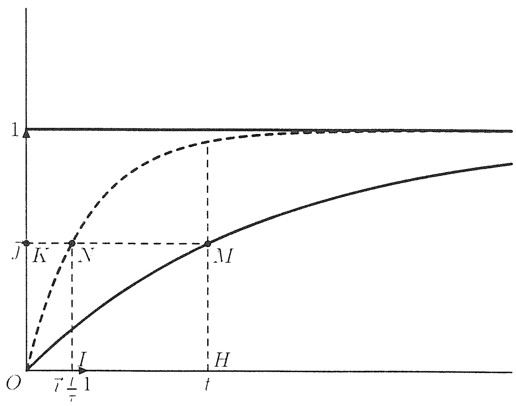
Soit $H(t\ ;\ 0)$; $I\left(\dfrac{t}{\tau}\ ;\ 0\right)$;
$N\left(\dfrac{t}{\tau}\ ;\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$; $K\left(0\ ;\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$;
$M\left(t\ ;\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

D'un point N de la courbe 1 on trace le point M de la courbe 2 en utilisant $\overrightarrow{KM} = \tau\overrightarrow{KN}$: M et N ont la même ordonnée, l'abscisse de N est multipliée par τ pour obtenir l'abscisse de M.

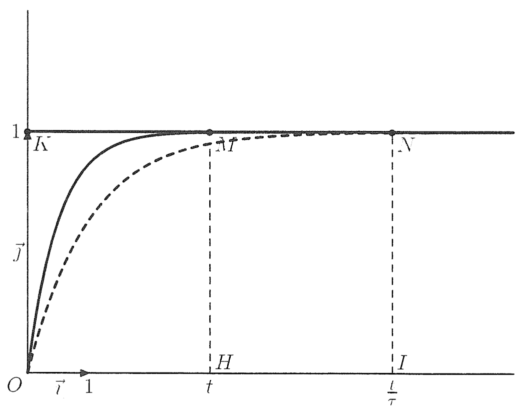
Quelques exemples (avec différentes valeurs de τ : $\tau = 2$; $\tau = 4$; $\tau = \dfrac{1}{2}$)



$\tau = 2$

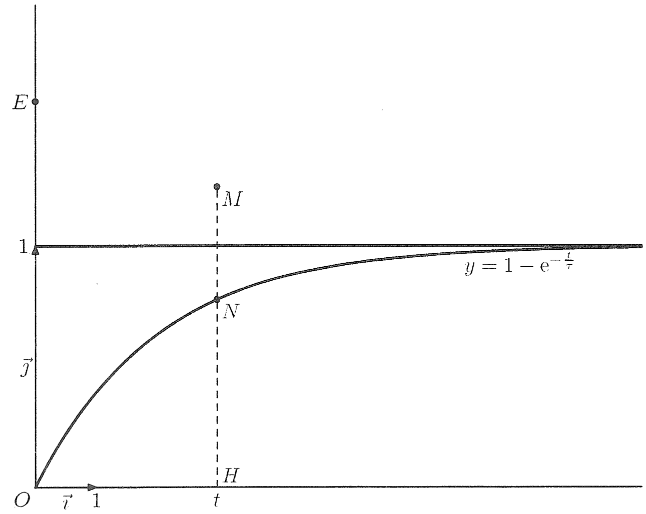


$\tau = 4$



$\tau = \dfrac{1}{2}$

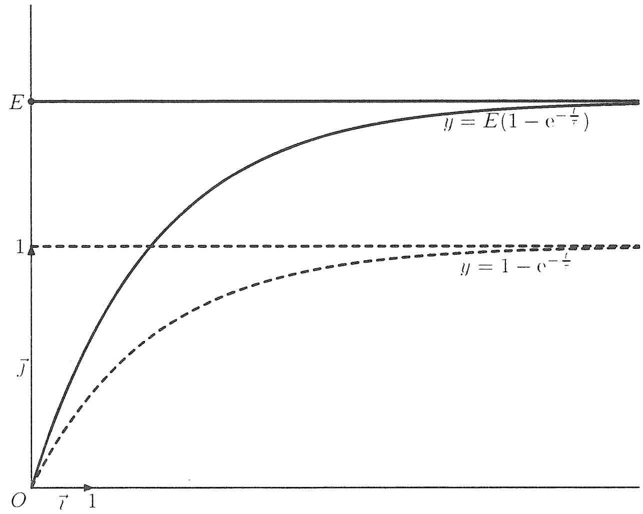
Tracé de la courbe d'équation $y = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ à partir de la courbe d'équation $y = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$.



Soit $H(t\ ;\ 0)$; $N\left(t\ ;\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$; $M\left(t\ ;\ E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\right)$.

D'un point N de la courbe 1 on trace le point M de la courbe 2 en utilisant $\overrightarrow{KM} = E.\overrightarrow{KN}$: pour une même abscisse, les ordonnées sont multipliées par E.

Exemple avec $E = 1{,}6$:

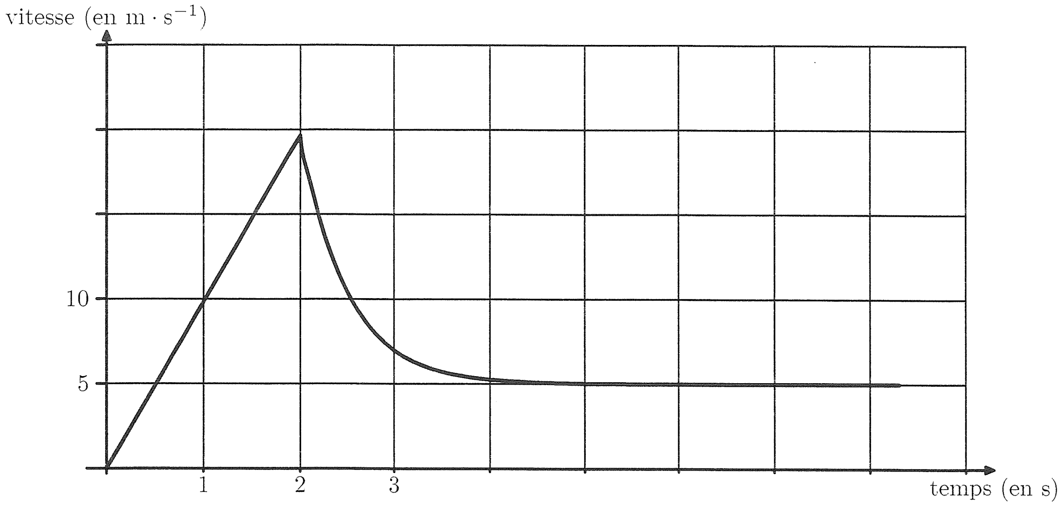


B. Exemple d'exercice donné en cours de physique : chute d'une pierre dans l'air et dans l'eau

Énoncé (donné en classe de Terminale S)

Une pierre se détache d'une falaise et tombe dans l'eau d'un lac situé 20 m plus bas. Grégoire tente de modéliser l'évolution de la vitesse de la pierre au cours de cette chute, et transmet la courbe ci-dessous à Émilie pour avoir son avis.

Vitesse d'une pierre dans l'air et dans l'eau



Émilie commence à analyser le document. Pouvez-vous l'aider à répondre aux questions qu'elle se pose ?

1 . Pourquoi cette courbe se décompose-t-elle en deux parties ? Justifier en détaillant les conditions de chute de ces deux régimes différents ;

2 . Déterminer à partir de la courbe l'accélération du mouvement lors de la première partie. Faire un bilan des forces qui s'exercent sur la pierre lors de sa chute dans l'air et montrer que Grégoire a négligé la résistance de l'air ;

3 . Calculer la date à laquelle la pierre arrive au contact de l'eau, et la vitesse maximale de la pierre lorsque l'on néglige la résistance de l'air. Ces valeurs sont-elles compatibles avec la courbe ?

4 . Comment évoluent la vitesse et l'accélération de la pierre lors du mouvement de la chute dans l'eau ?

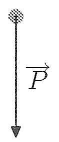
5 . Que peut-on en déduire sur l'évolution des forces de frottements lorsque la pierre s'enfonce dans l'eau (on négligera la poussée d'Archimède) ? Comparer la valeur des forces de frottement au poids après 5 secondes de chute.

Donnée : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Un exemple de solution

1 . Dans l'air, le mouvement de la pierre est accéléré. Dans l'eau, le mouvement est ralenti à cause des forces de frottement qui s'exercent sur la pierre. La vitesse est donc croissante lors du mouvement dans l'air. Dans l'eau, la vitesse est décroissante puis stationnaire.

2 .



Dans l'air, la vitesse augmente linéairement, l'accélération est donc constante. Sa valeur a est égale à la pente de la droite, soit $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
On a donc $a = g$, ce qui montre que la seule force exercée sur la pierre est le poids ; la résistance de l'air est bien négligée.

3 . La hauteur de chute avant le contact avec l'eau est $h = 20$ m, or $v = gt$ et donc, en intégrant, $h = \frac{1}{2}gt^2$. On obtient donc $t = 2$ s, d'où $v = gt = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Ces valeurs sont bien compatibles avec la courbe.

4 . Dans l'eau, la vitesse diminue, donc la dérivée $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ est négative, l'accélération est dirigée vers le haut. Le coefficient directeur de la tangente tend vers 0, l'accélération tend donc vers 0.

5 . Les forces de frottement sont importantes à l'entrée dans l'eau, elles s'opposent au poids de la pierre. Après 5 secondes de chute, les forces se compensent, la valeur des forces de frottement est égale au poids.

Quelques variantes à cet exercice :
- Donner la courbe sans préciser l'échelle sur les axes et demander aux élèves de graduer ceux-ci.
- Demander l'allure de la courbe représentant l'altitude de la pierre en fonction de t.

Troisième partie

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I Généralités

A. En mathématiques

1) Notion d'équation différentielle

Définitions

Une ***équation différentielle*** est une équation où l'inconnue est une fonction (notée y en général) ; cette équation exprime une relation entre la fonction et ses dérivées successives, sur un intervalle ouvert donné.

Résoudre une équation différentielle sur un intervalle donné, c'est déterminer l'ensemble des fonctions définies sur cet intervalle qui vérifient la relation.

Exemple

$(E_0) \quad 3y - 5y' - xy'' = 4.$

La fonction f est ***une solution sur un intervalle I ouvert de l'équation différentielle (E_0)*** lorsque, pour tout réel x de I, $3f(x) - 5f'(x) - xf''(x) = 4$.

2) Exemples d'équations différentielles rencontrées au lycée

$(E_1) : y' = \frac{2}{3}y - 5 \qquad (E_2) : 2y' + 3y = 4 \qquad (E_3) : y'' + 4y = 0 \qquad (E_4) : y' = y\cos(x)$

Résolution des équations (E_1) et (E_2)

Les équations (E_1) et (E_2) peuvent s'écrire sous la forme $y' = ay + b$, a et b étant des nombres réels, $a \neq 0$. Les élèves apprennent en Terminale S à résoudre ce type d'équations différentielles.

- **Forme des solutions :** les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$, $a \neq 0$, sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, k étant un réel.
- **Solution particulière :** pour tout couple $(x_0 : y_0)$ de réels, l'équation $y' = ay + b$ admet une unique fonction solution f définie sur $\mathbb{R}$, de la forme précédente et vérifiant la condition initiale $y_0 = f(x_0)$.

En revanche, les élèves ne savent pas résoudre les équations différentielles (E_3) et (E_4). Ils peuvent seulement montrer qu'une fonction est, ou n'est pas, solution de l'une de ces équations. En physique, les élèves rencontrent des équations du type (E_3). La forme des solutions leur est donnée, ils doivent alors retrouver les valeurs de certaines constantes (voir exemple p. 82).

3) Remarques

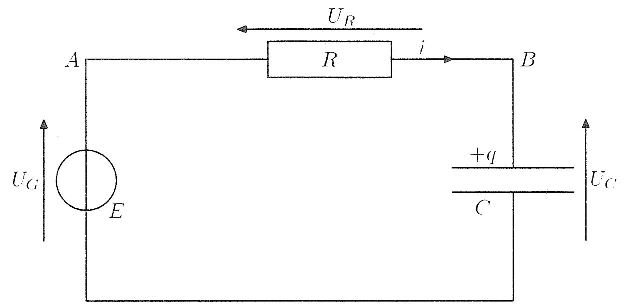
- C'est la première fois que les lycéens rencontrent une équation où l'inconnue est une fonction, et non un nombre.
- Dans les équations différentielles étudiées en mathématiques, contrairement à ce qui se passe en physique, les coefficients sont (presque) toujours numériques. On utilise peu de paramètres en mathématiques au lycée. Néanmoins, avec le développement de l'utilisation de logiciels permettant d'étudier l'influence de paramètres, cette tendance pourrait évoluer.
- La notation des équations (E_0) et (E_4), couramment utilisée, n'est pas très rigoureuse ; c'est une notation historique, mais incorrecte. En effet, y, y' et y'' sont des fonctions tandis

que 4, x et $\cos(x)$ peuvent être perçus comme des nombres réels. Mais la confusion entre une fonction et l'image d'un réel par celle-ci s'est poursuivie pendant longtemps.
L'écriture correcte serait : (E_4) : $y' = yg$, où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(x)$.
- Certaines équations différentielles peuvent être résolues algébriquement, c'est-à-dire que l'on peut en expliciter l'ensemble des solutions, mais ces équations sont rares !
La plupart des équations différentielles ne peuvent pas être résolues algébriquement ; on essaye alors de trouver des solutions approchées par des *méthodes numériques*. Le Suisse Léonhard Euler a proposé en 1768 une telle méthode (dite *méthode d'Euler*, voir p. 72).

B. En physique

1) Établissement d'une équation différentielle en physique : exemple avec l'étude d'un circuit *RC*

Étudier le circuit ci-dessous, c'est déterminer l'évolution des grandeurs électriques du circuit (intensité du courant i, tension U_R et U_C). Dans la suite nous choisissons d'étudier le comportement du condensateur, nous allons donc chercher une équation déterminant l'évolution de U_C en fonction du temps. Après l'étude théorique, on pourra proposer aux élèves de réaliser le montage ci-dessous, d'acquérir à l'aide d'un dispositif expérimental l'évolution de U_C et de comparer le résultat expérimental avec le modèle théorique.
Un conducteur ohmique est un composant pour lequel les grandeurs tension et intensité sont proportionnelles. Pour un condensateur, c'est la charge électrique portée par les armatures qui est proportionnelle à la tension aux bornes du condensateur.



On commence par écrire la loi d'additivité des tensions qui est une **loi générale**, au sens où elle peut être utilisée pour tout type de circuit :

(1) $$U_G = U_C + U_R$$

Ensuite, on écrit des **lois particulières** qui déterminent le comportement des composants présents dans le circuit :

(2) $U_G = E$, force électromotrice d'un générateur idéal

(3) $U_C = \dfrac{q}{C}$, avec q charge électrique en Coulomb emmagasinée sur les armatures du condensateur de capacité C (en Farads)

(4) $U_R = +Ri$, loi d'Ohm, avec R résistance du conducteur ohmique.
(selon la convention récepteur ; on a $U_R = V_A - V_B$; si $V_A > V_B$, alors c'est que i va de A vers B, et donc U_R a le même signe que i)

Il reste à exprimer la relation entre i et q, relation qui définit l'intensité i : $i = +\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ (d'après la convention prise par le courant sur le schéma, lorsque celui-ci est positif, la charge augmente).

En utilisant les relations (4) puis (3), on obtient successivement : $U_R = Ri = R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = RC\dfrac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$

Enfin, en remplaçant dans (1) : $E = U_C + RC\dfrac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$

Cette relation constitue l'équation différentielle du circuit. On pose souvent $\tau = RC$, constante de temps du circuit qui représente l'ordre de grandeur de la durée nécessaire pour charger le condensateur. Avec cette convention, l'équation devient :

$$E = U_C + \tau\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$$

2) Liste des équations différentielles rencontrées en Terminale S

Dans le tableau suivant, la première colonne représente les équations différentielles vues dans le cours de physique sous une forme « classique » qui diffère de la présentation usuelle en mathématiques. On remarque qu'à partir des écritures du physicien, les élèves tentent parfois de modifier la forme de ces équations (deuxième colonne) pour se rapprocher de l'écriture vue en mathématiques, et utiliser alors la méthode de résolution apprise. Ajoutons qu'en physique, à nouveau, on préférera utiliser la notation différentielle de Leibniz $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (voir page 39).

Équation différentielle établie dans le cours de physique	**Forme mathématique usuelle**	**Type d'équation différentielle en mathématiques**
Décharge d'un condensateur $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{q}{RC} = 0$	$\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{q}{RC}$	$y' = ay$
Charge d'un condensateur $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{q}{RC} = \dfrac{E}{R}$ ou $u_C + RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E$	$\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{q}{RC} + \dfrac{E}{R}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{u_C}{RC} + \dfrac{E}{RC}$	$y' = ay + b$
Établissement d'un courant à travers un circuit RL $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$	$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{L} - \dfrac{Ri}{L}$	$y' = ay + b$

Équation différentielle établie dans le cours de physique	**Forme mathématique usuelle**	**Type d'équation différentielle en mathématiques**
Disparition du courant dans un circuit RL $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{Ri}{L}=0$$	$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\frac{Ri}{L}$$	$y'=ay$
Décroissance radioactive $$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\lambda N$$	$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\lambda N$$	$y'=ay$
Chute verticale (frottements proportionnels à v) $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\pm g-\frac{\lambda}{m}v$$	$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\pm g-\frac{\lambda}{m}v$$	$y'=ay+b$
Chute verticale (frottements proportionnels à v^2) $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\pm g-\frac{K}{m}v^2$$	$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\pm g-\frac{K}{m}v^2$$	Résolution numérique par la méthode d'Euler
Oscillations non amorties – dans un circuit RC $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{u}{LC}=0$$ – avec un ressort $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=0$$		Type d'équation non rencontré en mathématique au lycée Voir exemple p. 82

II Exercices

A. Exemples d'exercices donnés en cours de mathématiques

1) Montrer qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle donnée

Cet exercice peut se faire dès le début de l'année en classe de Terminale S, il permet d'aborder très tôt la notion d'équation différentielle tout en réactivant des connaissances des années antérieures.

Énoncé (donné en classe de Terminale S en début d'année)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$ par $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. La fonction f est-elle solution sur $\left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$ de l'équation différentielle (E_5)[1] : $y = y'\sin(x)$?

Un exemple de solution

La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$ et pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}.$$

On a, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$:

$$\begin{aligned}(\sin(x)) \times f'(x) &= \frac{\sin(x)}{2\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2} \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2} \\ &= \tan\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

Finalement, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$, $(\sin(x)) \times f'(x) = f(x)$.

On en déduit que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y = y'\sin(x)$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$.

2) Résoudre des équations différentielles

Cet exercice est une application directe du cours concernant la résolution d'équations différentielles du type $y' = ay + b$.

Énoncé (donné en classe de Terminale S)

1 . Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y' = 10(y-1)$

2 . Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_2) : $y' + y = 2$, prenant la valeur 1 en 0.

Un exemple de solution

1 . $(E_1) \Longleftrightarrow y' = 10y - 10$

Cette équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$, avec $a = 10$ et $b = -10$.

Les solutions sont donc les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, k étant un réel ; soit $f_k(x) = ke^{-10x} + 1$.

---

1. Cette équation différentielle apparaît dans l'étude de projections cartographiques : elle traduit la conservation des angles par une projection azimutale. On obtient la projection stéréographique comme solution (projection depuis le pôle sud sur un plan tangent au pôle Nord).

Les élèves n'ont pas l'obligation de retenir par cœur la formule ci-dessus, ils peuvent utiliser la démarche vue en cours. Après avoir reconnu la forme $y' = ay + b$ de l'équation différentielle linéaire :
- Rechercher une solution particulière p ;
- Montrer l'équivalence de (E_1) et de (E_1') : $(y-p)' = 10(y-p)$;
- Résoudre (E_1') : $z' = 10z$ (en posant $z = y - p$), avec les connaissances du cours.

Notons que le théorème : « les solutions d'une équation différentielle linéaire ($y' + ay = m(x)$) sont de la forme $f = g + p$, où g est la solution générale de l'équation différentielle sans second membre $y' + ay = 0$ et p une solution particulière de $y' + ay = m(x)$ », n'est pas au programme du second cycle.

2 . $(E_2) \Longleftrightarrow y' = -y + 2$
Cette équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$, avec $a = -1$ et $b = 2$. Les solutions sont donc les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, k étant un réel ; soit $f_k(x) = k\mathrm{e}^{-x} + 2$.
$f_k(0) = 1 \Longleftrightarrow k = -1$.
Conclusion : l'équation différentielle (E_2) admet donc une unique solution prenant la valeur 1 en 0, c'est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\mathrm{e}^x + 2$.

3) Recherche de solutions de types particuliers

Énoncé (donné en classe de Terminale S)

Existe-t-il une fonction trinôme solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) :

$$(E) \qquad xy' - 2y = x \ ?$$

Un exemple de solution

Soit f une fonction trinôme, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
f est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si et seulement si pour tout x de $\mathbb{R}$,
$x(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x$, c'est-à-dire : $-bx - 2c = x$.
Il suffit de choisir $b = -1$ et $c = 0$.
Toutes les fonctions du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 - x$, a étant un réel non nul, sont solutions de l'équation différentielle (E).

4) Méthode d'Euler en mathématiques

Cet exercice est conçu en référence à l'exercice de physique intitulé « Le condensateur dans tous ses états » (énoncé p. 75). L'équation différentielle est d'abord donnée sous une forme littérale, pour rappeler l'équation différentielle du cours de physique, mais l'étude se fait avec les valeurs numériques, comme cela se fait en général en mathématiques au lycée. Les valeurs numériques sont celles de l'exercice de physique.

Énoncé (donné en Terminale S)

Soit l'équation différentielle (1) : $E = RCy' + y$, où E, R et C sont des constantes réelles. Dans cet exercice, on prend $E = 5$, $R = 2{,}2 \times 10^3$, $C = 4{,}7 \times 10^{-6}$, et on appelle f la solution de l'équation différentielle (1) telle que $f(0) = 0$.

1 . Soit g l'approximation de la fonction f obtenue par la méthode d'Euler avec un pas de 5×10^{-3}. Tracer la représentation graphique de g sur $[0 \ ; \ 0{,}04]$ dans un repère du plan ;

2 . a) Résoudre l'équation différentielle (1),

b) Déterminer f,

c) Tracer la courbe représentative de f dans le repère précédent ;

3 . Comparer l'approximation de $f(0{,}01)$ obtenue par la méthode d'Euler et celle obtenue par la calculatrice.

Un exemple de solution

En remplaçant chaque constante par sa valeur numérique, l'équation (1) devient :

$$5 = 0{,}010\,34\,y' + y$$

1 . Commençons par compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035	0,040
$g(x)$	0	2,42	3,67	4,31	4,64	4,82	4,91	4,95	4,97
$g'(x)$	484	250	129	67	34	18	9	5	2

Calcul de $g'(x)$ connaissant $g(x)$:

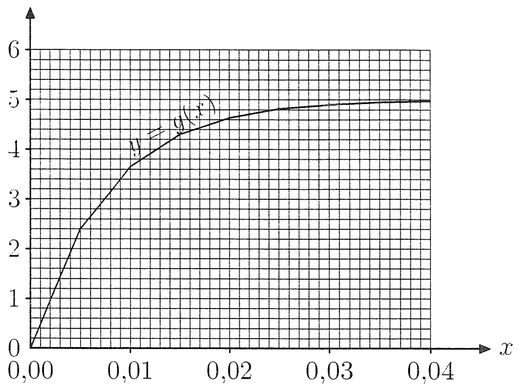
$$5 = 0{,}010\,34\,g'(x) + g(x), \text{ soit } g'(x) = \frac{5 - g(x)}{0{,}010\,34}.$$

La notation $g'(x)$ n'est pas correcte, la fonction g étant une fonction affine par morceaux, il s'agit ici du nombre dérivé à droite de g.

Calcul de $g(x+h)$ connaissant $g(x)$ et $g'(x)$:

$$g(x+h) = g(x) + hg'(x), \text{ avec un pas } h \text{ égal à } 0{,}005.$$

Dans le tableau ci-dessus, les valeurs de $g(x)$ sont données au centième près, et celles de $g'(x)$ à l'unité près ; les calculs intermédiaires sont faits avec la précision permise par une calculatrice.



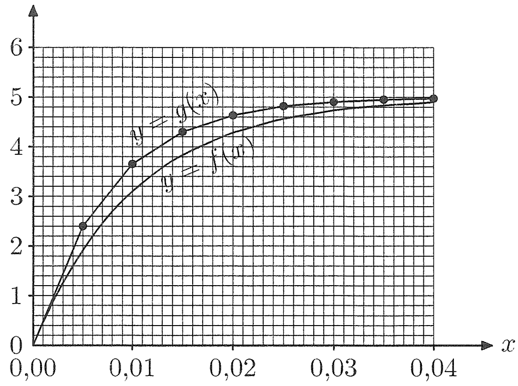
Représentation graphique de g (*la fonction g est une fonction affine par morceaux.*)

2 . a) (1) $5 = 0{,}010\,34\,y' + y$ équivaut à : $\quad y' = -\dfrac{1}{0{,}010\,34}y + \dfrac{5}{0{,}010\,34}$.

Cette équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$, avec $a = -\dfrac{1}{0{,}010\,34}$ et $b = \dfrac{5}{0{,}010\,34}$. Les solutions sont donc les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$, k étant un réel ; soit $f_k(x) = ke^{-\frac{x}{0{,}010\,34}} + 5$

b) La condition $f(0) = 0$ donne $k = -5$. D'où $f(x) = -5e^{-\frac{x}{0{,}010\,34}} + 5$.

c)



Représentation graphique de f et g dans le même repère.

3 . Par la méthode d'Euler, on obtient comme approximation de $f(0{,}01)$, $g(0{,}01) \approx 3{,}67$, et avec la calculatrice, on obtient $f(0{,}01) \approx 3{,}1$.

Remarques au sujet de la méthode d'Euler

- En mathématiques, nous distinguons la fonction f solution de l'équation différentielle, de son approximation g obtenue par la méthode d'Euler ;
- Les approximations se font, d'une part lorsque l'on calcule une valeur approchée de $f(x+h)$ en assimilant la courbe à une droite, et d'autre part lorsque l'on calcule le nombre dérivé en x en utilisant l'équation différentielle (à partir d'une valeur déjà approchée de $f(x)$) ;
- La fonction affine par morceaux g qui approxime la solution f n'a donc pas les sommets de sa représentation graphique sur celle de f (voir figure ci-dessus) ;
- Une activité d'introduction à la méthode d'Euler en mathématiques en Première scientifique est présentée en ligne dans le bulletin en ligne « Mathématiques Vivantes » n° 71 de l'IREM de BESANÇON, pages 24 à 26.

5) Un exemple de sujet de mathématiques au bac S

Cet exercice est extrait d'un sujet de bac S donné en 2003 en Guadeloupe, Guyane et Martinique.

Énoncé

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :

$$(E) \qquad y' - 2y = 2(\mathrm{e}^{2x} - 1).$$

1 . Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2x\mathrm{e}^{2x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E) ;

2 . On pose $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$.

Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E) ;

3 . Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0. Elle sera appelée g et étudiée dans la partie B.

Un exemple de solution

1 . La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $h'(x) = 2(e^{2x} + 2xe^{2x})$.
On a donc, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) - 2h(x) &= 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2(2xe^{2x} + 1) \\ &= 2(e^{2x} - 1) \end{aligned}$$

Conclusion

La fonction h est solution de l'équation (E) ;

2 . y est solution de (E) si et seulement si pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y'(x) - 2y(x) &= 2(e^{2x} - 1) \\ &= h'(x) - 2h(x) \\ y'(x) - h'(x) - 2y(x) + 2h(x) &= 0 \\ (y-h)'(x) - 2[(y-h)(x)] &= 0 \\ z'(x) - 2z(x) &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion

y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E_1), avec (E_1) :
$z' - 2z = 0$.

$$(E_1) \Longleftrightarrow z' = 2z.$$

Cette équation différentielle est de la forme $z' = az + b$, avec $a = 2$ et $b = 0$. Les solutions sont donc les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$,
soit $f_k(x) = ke^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$.

y est solution de (E) si et seulement si $(y - h)$ est solution de (E_1), c'est-à-dire si et seulement si pour tout x de $\mathbb{R}$, $(y - h)(x) = ke^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions g_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = ke^{2x} + 2xe^{2x} + 1. \quad k \in \mathbb{R}$$

3 . $g_k(0) = 0 \Longleftrightarrow k = 1$.

Donc il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0 ; c'est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -e^{2x} + 2xe^{2x} + 1$

B. Exemples d'exercices donnés en cours de physique

1) Le condensateur dans tous ses états

Énoncé (sujet de bac S, donné en septembre 2003, en Polynésie)

Cet exercice se propose d'étudier le comportement d'un condensateur.

Partie I

On réalise le circuit ci-contre (*schéma n° 1*) constitué d'un générateur de courant[1] d'un condensateur, d'un ampèremètre, et d'un interrupteur. Le condensateur est préalablement déchargé, et à la date $t = 0$ s, on ferme l'interrupteur K. L'ampèremètre indique alors une valeur constante pour l'intensité $I = 12$ µA. Un ordinateur muni d'une interface (non représenté) relève, à intervalles de temps réguliers, la tension u_{AB} aux bornes du condensateur. Les résultats sont les suivants :

$t(s)$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
u_{AB} (V)	0,00	1,32	2,64	4,00	5,35	6,70	7,98	9,20	10,6

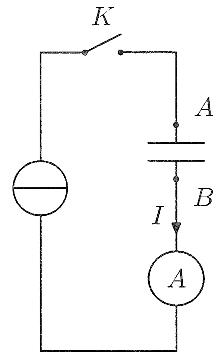
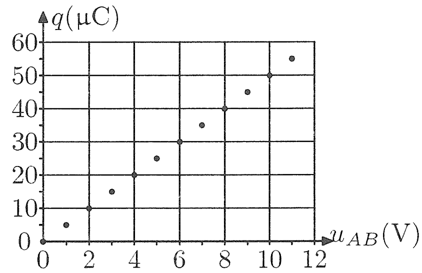


Schéma n° 1

1 . Rappeler la relation permettant de calculer la charge[2] q du condensateur en fonction de I. Calculer q à la date $t = 3{,}0$ s.

2 . On a représenté (*graphe n° 1*) la courbe donnant la charge q du condensateur en fonction de u_{AB}. Déterminer à partir de cette dernière, par une méthode que l'on explicitera, la valeur de la capacité C du condensateur.



Graphe n° 1

3 . La valeur indiquée par le constructeur est $C = 4{,}7$ µF à 10 % près. La valeur obtenue est-elle en accord avec la tolérance du constructeur ?

Partie II

On étudie maintenant la charge et la décharge d'un condensateur à travers un conducteur ohmique. Pour cela on réalise le montage suivant (*schéma n° 2*). Le condensateur est initialement déchargé, et à la date $t = 0$ s, on bascule l'interrupteur en position 1.

Données : $R = 2{,}2$ kΩ ; $C = 4{,}7$ µF ; $R' = 10$ kΩ.

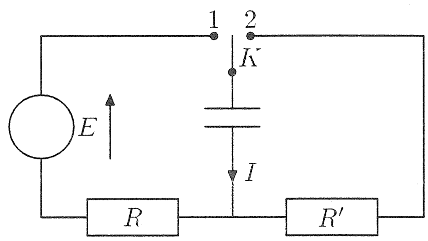


Schéma n° 2

1 . Établir l'équation différentielle $E = RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$ vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur pendant la phase de charge ;

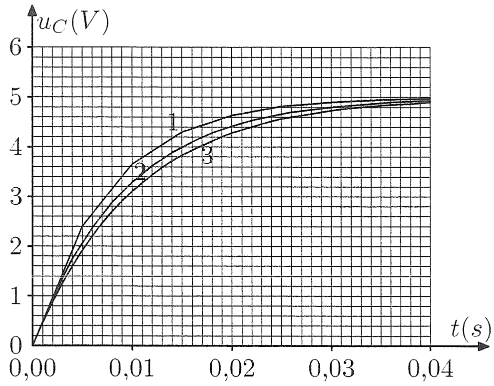
2 . La solution analytique de cette équation est de la forme : $u_C = A(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})$, compte tenu de la condition initiale relative à la charge du condensateur.

En vérifiant que cette expression est solution de l'équation différentielle, identifier A et α en fonction de E, R, C ;

1. Quel que soit le dipôle branché aux bornes d'un générateur de courant, c'est le générateur qui impose la valeur de l'intensité du courant. Pour un générateur de tension, c'est la tension qui est imposée.

2. En conséquence de la convention usuelle sur le sens du courant, q est ici la charge portée par l'armature A.

3 . À partir du graphe n° 2, déterminer la valeur E ;



Graphe n° 2

4 . La méthode d'Euler permet de calculer, pas à pas, les valeurs de u_C et de $\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)$ à intervalles de temps réguliers choisis Δt. Si Δt est considéré comme suffisamment petit dans le cadre de l'expérience, on peut écrire :

$$u_C(t+\Delta t) = u_C(t) + \left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_t \times \Delta t$$

On choisit $\Delta t = 1$ ms.

a) À l'aide de l'équation différentielle établie à la question 1., déterminer la valeur initiale de la dérivée notée : $\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0$.

b) En appliquant la méthode d'Euler, compléter le tableau suivant (à refaire sur la copie) :

t (ms)	0	1	2	3
$u_C(t)$ (...)	0			
$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (...)				

5 . Sur le graphe 2. on a représenté trois courbes :
- Courbe n° 1 : courbe obtenue par la méthode d'Euler avec un pas $\Delta t = 5$ ms.
- Courbe n° 2 : courbe obtenue par la méthode d'Euler avec un pas $\Delta t = 2$ ms.
- Courbe n° 3 : représentation de la solution analytique de l'équation différentielle.

a) Quelle est l'influence du pas Δt utilisé dans la méthode d'Euler ?

b) Quels sont les avantages et les inconvénients d'avoir un Δt très grand ou très petit ?

c) Qu'entend-on à la question 4. par « Si Δt est considéré comme suffisamment petit dans le cadre de l'expérience » ?

6 . Définir la constante de temps du circuit. Déterminer sa valeur à partir du graphe n° 2 par une méthode que l'on explicitera. En déduire une nouvelle valeur expérimentale de C et la comparer à la valeur nominale.

7 . On bascule alors l'inverseur en position 2. En justifiant, répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

a) La durée de la décharge du condensateur est supérieure à celle de la charge.

b) La constante de temps du circuit lors de la décharge est égale à $(R+R')C$.

Un exemple de solution

Partie I

1 . On a $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, i étant constante, égale à I. Donc $q = It + \text{cste}$.
Or, à $t=0$, $q=0$, donc : $q = It$.
$q = 12 \times 10^{-6} \times 3{,}0 = 36 \times 10^{-6}$ C

2 . Valeur de la capacité C du condensateur.
On a $q = C \times u_{AB}$, donc C est le coefficient directeur de la droite d'équation $q = f(u_{AB})$.
On choisit deux points appartenant à cette droite : O $(0\ ;\ 0)$ et A $(10\ ;\ 46 \times 10^{-6})$.
$C = \dfrac{q_A - q_0}{u_A - u_0} = \dfrac{46 \times 10^{-6}}{10} = 4{,}6 \times 10^{-6}$ F

3 . Oui la valeur obtenue est en accord avec la tolérance du constructeur car :

$$4{,}2\ \mu\text{F} \leqslant 4{,}6\ \mu\text{F} \leqslant 5{,}2\ \mu\text{F}.$$

Partie II

1 . Établissons l'équation différentielle vérifiée par u_c lors de la charge :
$E = u_C + u_R$ (loi d'additivité des tensions)
De plus $u_R = Ri$ et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ avec $q = Cu_C$
On obtient $i = \dfrac{\mathrm{d}\,(Cu_C)}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (C est une constante), et finalement

$$E = RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C \qquad (5)$$

2 . $u_C = A\,(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}) = A - A\mathrm{e}^{-\alpha t}$ où A et α sont des constantes strictement positives (le cas où $\alpha = 0$ correspond à un régime permanent).
(5) $\Rightarrow E = RC\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A\,(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})] + A\,(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})$ soit $E = RCA\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t} + A - A\mathrm{e}^{-\alpha t}$
d'où $E - A = A\mathrm{e}^{-\alpha t}(RC\alpha - 1)$
Puisque $E - A$ est une constante alors $A\mathrm{e}^{-\alpha t}(RC\alpha - 1)$ doit être constante.
On en déduit alors que $RC\alpha - 1 = 0$, d'où $\alpha = \dfrac{1}{RC}$.
La tension aux bornes du condensateur s'écrit donc $u_C = E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)$

Remarque : pour montrer rigoureusement que $RC\alpha - 1 = 0$, on peut noter f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = A\mathrm{e}^{-\alpha t}(RC\alpha - 1)$, et traduire le fait que cette fonction est constante par : $f'(t) = 0$ pour tout réel t de $[0\ ;\ +\infty[$. Or, $f'(t) = A(-\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha t}(RC\alpha - 1)$.
$f'(t) = 0 \Rightarrow RC\alpha - 1 = 0$, d'où $\alpha = \dfrac{1}{RC}$.

3 . Valeur de E : $\lim_{t\to\infty} u_C(t) = E$ donc graphiquement $E \approx 5{,}0$ V

4 . **a)** Détermination de $\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0$

D'après l'équation différentielle obtenue au 1),

$E - u_C = RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E - u_C}{RC}$.

À $t = 0$ s, $u_C = 0$ V donc $\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \dfrac{E}{RC}$

Application numérique : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{5{,}0}{2{,}2\times 10^3 \times 4{,}7\times 10^{-6}} = 4{,}8\times 10^2\ \mathrm{V\cdot s^{-1}}$

b) $u_C(t_1) = u_C(0) + \left(\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 \Delta t = 0 + 4{,}8\times 10^2 \times 1{,}0\times 10^{-3} = 4{,}8\times 10^{-1}$ V

Donc $\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_{t_1} = \dfrac{E - u_C(t_1)}{RC} = \dfrac{5{,}0 - 0{,}48}{2{,}2\times 10^3\times 4{,}7\times 10^{-6}} = 4{,}4\times 10^2\ \mathrm{V\cdot s^{-1}}$

Déterminons $u_C(t_2)$ à l'instant $t_2 = t_1 + \Delta t = 2{,}0$ ms

$$\begin{aligned}
u_C(t_2) &= u_C(t_1) + \left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_{t_1}\cdot\Delta t \\
&= 4{,}8\times 10^{-1} + \left(4{,}4\times 10^2\times 1{,}0\times 10^{-3}\right) \\
&= 4{,}8\times 10^{-1} + 4{,}4\times 10^{-1} \\
&= 9{,}2\times 10^{-1} = 0{,}92\ \mathrm{V}
\end{aligned}$$

Et de la même manière on peut calculer $u_C(t_3)$:

$\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_{t_2} = \dfrac{E - u_C(t_2)}{RC} = \dfrac{5{,}0 - 0{,}92}{1{,}034\times 10^2} = 3{,}9(5)\times 10^2\ \mathrm{V\cdot s^{-1}}$

$u_C(t_3) = u_C(t_2) + \left(\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_{t_2}\cdot\Delta t = 1{,}3$ V

Finalement, $\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_{t_3} = \dfrac{E - u_C(t_3)}{RC} = 3{,}7\times 10^2\ \mathrm{V\cdot s^{-1}}$

t (ms)	0	1	2	3
$u_C(t)$ (V)	0	0,48	0,92	1,3
$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ ($\mathrm{V\cdot s^{-1}}$)	$4{,}8\times 10^2$	$4{,}4\times 10^2$	$3{,}9\times 10^2$	$3{,}7\times 10^2$

5 . **a) Influence du pas Δt**

La courbe obtenue par la méthode d'Euler est d'autant plus proche de la représentation de la solution analytique de l'équation différentielle que le pas Δt est faible.

b) Δt très grand

Avantage : avec peu de calculs, on obtient l'allure de la représentation de la solution de l'équation différentielle. Inconvénient : la courbe est assez éloignée de la représentation de la solution analytique.

Δt très petit
Nécessite beaucoup de calculs (mais c'est désormais aisé à l'aide d'un tableur) mais la courbe est très proche de la représentation de la solution analytique.

c) Il faut que Δt soit très faible devant le temps caractéristique τ.
$\Delta t \ll \tau$ $\left(\text{en fait } \Delta t < \dfrac{\tau}{10}\right)$.

6 . **Constante de temps**
- Par définition $\tau = RC$
- τ correspond à l'abscisse du point de la courbe 3 tel que $u_C(\tau) \simeq 0{,}63E$, soit $u_C(\tau) \simeq 0{,}63 \times 5{,}0 \simeq 3{,}2$ V Graphiquement, on trouve $\tau = 1{,}1 \times 10^{-2}$ s $= 11$ ms.
- τ est aussi l'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine à la courbe avec l'asymptote horizontale à cette courbe.
- Physiquement, c'est la durée au bout de laquelle la tension aux bornes du condensateur serait égale à E si la charge complète de celui-ci était linéaire dans le temps.

Valeur expérimentale de C :
$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{1{,}1 \times 10^{-2}}{2{,}2 \times 10^{3}} = 0{,}50 \times 10^{-5} = 5{,}0 \times 10^{-6} \text{ F}$$
Comparaison avec la valeur nominale :
$$e = \frac{|C - C_n|}{C_n} = \frac{(5{,}0 - 4{,}7) \times 10^{-6}}{4{,}7 \times 10^{-6}} = 6{,}4 \times 10^{-2} = 6{,}4~\%$$

7 . **a)** VRAI, en effet, la constante de temps du circuit est alors $\tau' = R'C'$. Comme $R' > R$, $\tau' > \tau$.
Remarque : la durée de décharge est environ égale à $5\tau'$.

b) FAUX, car le circuit de décharge ne contient que le conducteur ohmique de résistance R'.

Remarque au sujet de la méthode d'Euler

Dans ce sujet de bac, il n'est pas fait la différence entre la grandeur u_C solution de l'équation différentielle, et l'approximation obtenue par la méthode d'Euler, et l'on écrit « $u_c = \ldots$ » au lieu de « $u_C \approx \ldots$ » comme on le ferait en mathématiques (voir p. 74).

2) Deux isotopes de l'iode pour étudier la thyroïde

Dans cet exercice, il est question de la loi de décroissance radioactive, mais l'équation différentielle vérifiée par la fonction donnant le nombre d'atomes radioactifs en fonction du temps ($\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$) n'apparaît pas explicitement. L'étude se fait à partir de l'expression de la solution ($N(t) = N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$), que les élèves doivent connaître.

Énoncé (donné en Terminale S)

La glande thyroïde produit des hormones essentielles à différentes fonctions de l'organisme à partir de l'iode alimentaire. Pour vérifier la forme ou le fonctionnement de cette glande, on procède à une scintigraphie thyroïdienne en utilisant les isotopes 131 ou 123 de l'iode. Pour cette scintigraphie, un patient ingère une masse $m = 1{,}00$ µg de l'isotope ^{131}I.

Données : constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1}. L'instant d'ingestion est pris pour origine des dates ($t = 0$ s).

1 . Montrer que le nombre d'atomes radioactifs initialement présents dans la dose ingérée est égal à $4{,}60 \times 10^{15}$. Ce nombre sera noté N_0 dans la suite de l'exercice ;

2 . L'isotope $^{131}\mathrm{I}$ est radioactif, émetteur β^-. Après avoir précisé les lois de conservation utilisées, écrire l'équation de sa désintégration.

Données : quelques symboles d'éléments chimiques :

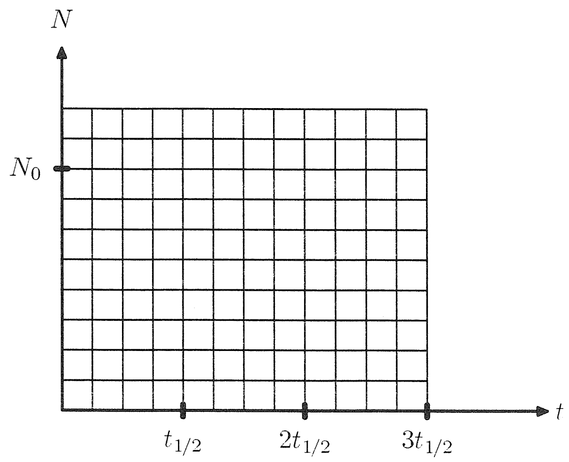
antimoine	tellure	iode	xénon	césium
$_{51}\mathrm{Sb}$	$_{52}\mathrm{Te}$	$_{53}\mathrm{I}$	$_{54}\mathrm{Xe}$	$_{51}\mathrm{Cs}$

3 . La demi-vie[1] de l'isotope $^{131}\mathrm{I}$ vaut 8,0 jours.

a) Rappeler la loi de décroissance en faisant intervenir N_0 et la constante radioactive λ,

b) Établir l'expression de la constante radioactive à partir de la demi-vie $t_{1/2}$ d'un échantillon d'iode $^{131}\mathrm{I}$;

4 . Tracer, sur la figure ci-dessous, l'allure de la courbe correspondant à l'évolution au cours du temps du nombre de noyaux radioactifs dans l'échantillon, en justifiant le raisonnement utilisé. On placera correctement les points correspondant aux instants $t_{1/2}$, $2t_{1/2}$ et $3t_{1/2}$;



5 . a) Définir l'activité d'un échantillon. À partir de la loi de décroissance radioactive, montrer que l'activité de l'échantillon à l'instant t est proportionnelle au nombre de noyaux radioactifs à cet instant,

b) En déduire l'expression littérale de l'activité A_0 de l'échantillon à l'origine des dates, en fonction de N_0 et $t_{1/2}$. Calculer sa valeur numérique, exprimée dans le système international,

c) Calculer, dans le système international, l'activité A de l'échantillon d'isotope $^{131}\mathrm{I}$ à l'instant de l'examen, sachant qu'en général l'examen est pratiqué quatre heures après l'ingestion radioactive,

d) En déduire la perte relative d'activité $\dfrac{\Delta A}{A_0} = \dfrac{A_0 - A}{A_0}$ (cette perte sera calculée et exprimée en pourcentage).

1. Durée au bout de laquelle le nombre de noyaux radioactifs est divisé par deux

Un exemple de solution

1 . Quantité de matière dans 1 µg d'iode : $n = \dfrac{m}{M} = \dfrac{1{,}00 \times 10^{-6}}{131} \times 10^{-3} = 7{,}6 \times 10^{-6}$ mol.
   $N_0 = N_A \times n = 4{,}60 \times 10^{15}$ noyaux.
2 . ${}^{131}_{53}\mathrm{I} \longrightarrow {}^{131}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$
   Lois : Conservation du nombre de nucléons. Conservation de la charge.
3 . a) $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   b) $t_{1/2}$ est la durée pour laquelle $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$, donc : $N(t_{1/2}) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{N_0}{2}\cdot$
   D'où : $\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{1}{2}$ et $\ln\left(\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}}\right) = -\ln(2)$, donc $\lambda t_{1/2} = \ln(2)$ et $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{t_{1/2}}\cdot$
4 . $N(t_{1/2}) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{N_0}{2}$ avec $N(2t_{1/2}) = N_0 \mathrm{e}^{-2\lambda t_{1/2}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{N_0}{2}$ et $N(3t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{8}\cdot$
5 . a) L'activité est le nombre de désintégrations par seconde, soit $A = -\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\cdot$ En dérivant : $A(t) = -\dfrac{\mathrm{d}(N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t})}{\mathrm{d}t} = -N_0 \dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\lambda t})}{\mathrm{d}t} = -N_0(-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda N(t)$.
   L'activité est donc proportionnelle à $N(t)$, le nombre de noyaux à la date t.
   b) L'activité initiale : $A_0 = \lambda N_0 = N_0 \dfrac{\ln(2)}{t_{1/2}}\cdot$
   Application numérique : $A_0 = 4{,}59 \times 10^{15} \times \ln(2) \times \dfrac{1}{8 \times 24 \times 3\,600}$ en s^{-1}, soit $A_0 = 4{,}61 \times 10^{9}$ Bq.
   c) 4 heures après l'injection : $A(t) = N_0 \times \lambda \times \mathrm{e}^{-\lambda t} = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$, donc

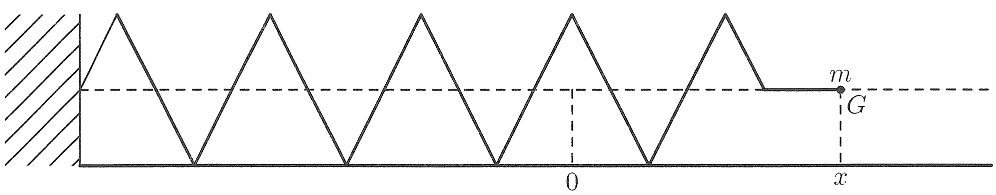
$$A(4\ \mathrm{h}) = 4{,}61 \times \mathrm{e}^{-\frac{4\ln(2)}{8\times 24}} = 4{,}54 \times 10^{9}\ \mathrm{Bq}.$$

   Remarque : attention aux unités.
   d) Donc $\dfrac{A_0 - A}{A_0} = 1.4\ \%$.

3) Élastique horizontal

Énoncé (donné en Terminale S)

Un oscillateur élastique horizontal est constitué d'un solide de masse $m = 10$ g et d'un ressort de constante de raideur k. Les positions du centre de gravité G du solide sont repérés en mesurant l'abscisse x sur un axe horizontal. La position $x = 0$ correspond à la position d'équilibre du solide.



On comprime le ressort en déplaçant le solide jusqu'à la valeur $x_0 = -3$ cm, $x_0 < 0$ et on lâche celui-ci sans vitesse initiale à la date $t = 0$. Le mouvement est périodique, de période $T = 120$ ms.

1 . Faire un schéma et représenter les forces susceptibles de s'exercer sur le mobile ;

2 . Établir l'équation différentielle du mouvement lorsque les frottements sont négligés (on indiquera précisément la loi utilisée et on choisira le référentiel d'étude adapté).

Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme : $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$;

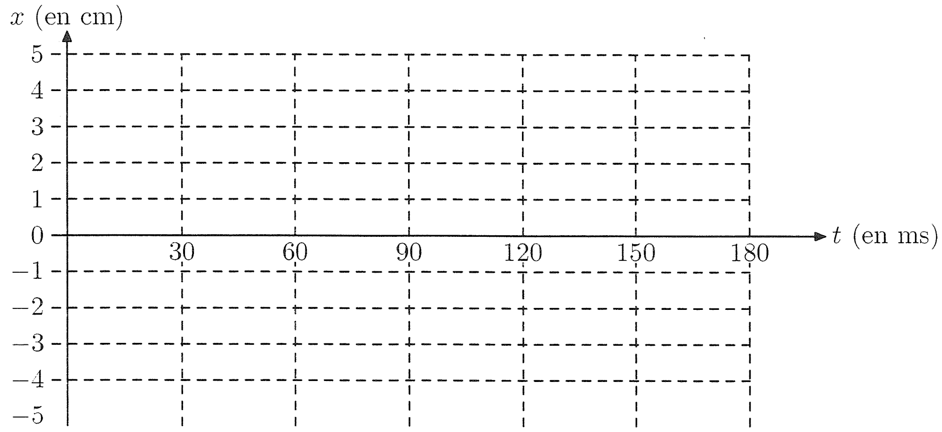
3 . La solution de cette équation est donnée sous la forme $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ lorsque tout type de frottement est négligé.

Déterminer la pulsation ω_0, ainsi que la valeur de la constante de raideur k.

4 . Exprimer littéralement l'énergie mécanique de l'oscillateur à la date $t = 0$, en déduire la valeur de l'amplitude du mouvement $x_m > 0$ en explicitant le raisonnement effectué. Vérifier que la phase à l'origine vaut $\phi_0 = \pi$;

5 . Déterminer numériquement la valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur. En déduire la vitesse maximale atteinte par le solide S.

6 . Quelle est la position du solide à la date $t = \dfrac{T}{4}$? Représenter sommairement l'allure de la courbe $x = f(t)$ sur le graphe ci-dessous ;

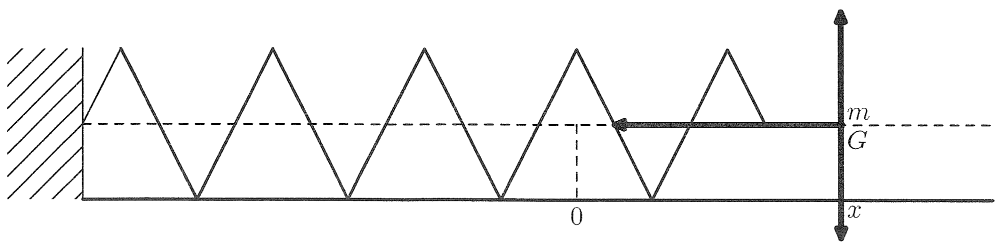


7 . Calculer le travail W de la tension (ou force) exercée par le ressort sur le solide pour passer de la position A initiale à la position B occupée à la date $\dfrac{T}{4}$;

8 . Le solide se détache du ressort dans cette position B, quelle est l'énergie cinétique du solide isolé du ressort ?

Un exemple de solution

1 . Schéma :



2 . On applique la deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$

On obtient $\overrightarrow{R} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = m\overrightarrow{a}$, et selon (Ox) : $R_x + P_x + T_x = ma_x$

D'où : $-kx = m\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{k}{m}\,x$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m}\,x = 0$.

L'équation est de la forme $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$, avec $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}\cdot$

3 . On identifie donc $\dfrac{k}{m}$ à ω_0^2. D'où : $k = m \times \omega_0^2$. Or $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 52{,}3\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
Donc, $k = 27{,}4\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

4 . L'énergie mécanique à $t = 0$ est égale à l'énergie potentielle initiale puisque l'énergie cinétique est nulle. $E_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2}\,kx_0^2 = E_\mathrm{pmax}$, donc l'amplitude, ici $x_\mathrm{max} = 3$ cm.
Or $x_0 = -x_m = x_m\cos(\omega_0 t + \phi_0)$ donc $\cos(\phi_0) = 1$ et $\phi_0 = \pi$.

5 . $E_\mathrm{po} = E_\mathrm{M} = 0{,}012\,3$ J, donc l'énergie cinétique est maximale quand :
$E_\mathrm{M} = E_\mathrm{cm} = \dfrac{1}{2}\,mv_\mathrm{m}^2$ et $v_\mathrm{m} = \sqrt{\dfrac{2E_\mathrm{M}}{m}}$, $v_\mathrm{m} = 1{,}56\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

6 . À $\dfrac{T}{4}$, x vaut $x_\mathrm{m}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = 0$ et E_C est maximum.

7 . $W = E_{\mathrm{C}_B} - E_{\mathrm{C}_A} = 0{,}012\,3$ J.

8 . $E_\mathrm{C} = E_\mathrm{M}$.

Quatrième partie

OUTILS MATHÉMATIQUES UTILISÉS EN SCIENCES PHYSIQUES

Pour mieux voir comment on peut croiser ou associer les connaissances des élèves en mathématiques et en physique-chimie, nous présentons des extraits de programmes.

- Dans une première série de tableaux (pages 87 à 90), nous établissons une liste, par année, des notions abordées en cours de mathématiques, qui présentent un lien avec la notion de fonction. Lorsque cela est possible, nous indiquons une application en physique ou en chimie, avec l'indication du niveau où cela est traité (dernière colonne des tableaux).

  Ainsi, le professeur de mathématiques peut aller consulter un manuel de physique, ou de préférence son collègue de physique-chimie, soit pour introduire cette notion, soit pour en proposer une application. Le professeur de physique, quant à lui, peut voir si les notions mathématiques nécessaires sont au programme, et le cas échéant, s'entendre avec son collègue de mathématiques pour qu'elles soient abordées au moment opportun.
- Nous listons ensuite, sous l'intitulé « Fonctions disponibles », page 91, les fonctions connues des élèves selon leur année d'études.
- Enfin, nous proposons une synthèse des programmes de physique et de chimie, année par année, pages 91 à 108

I Applications en physique et en chimie des fonctions étudiées en mathématiques

A. Classe de Seconde

	MATHÉMATIQUES *Extraits du programme*	PHYSIQUE-CHIMIE *Des applications*
	Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule.	Seconde : Courbes d'étalonnage (voir p. 21) Terminale S : Évolution des systèmes en fonction du temps
	Savoir donner ou calculer l'image d'un nombre par une fonction	
	Sens de variation d'une fonction : maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	
FONCTIONS DISPONIBLES	– Fonctions linéaires et fonctions affines – Fonction « carré » – Fonction « inverse » – Fonctions cos et sin	Pendule simple Mesure de l'épaisseur d'un cheveu par diffraction (voir p.21) Quantité de matière en fonction de l'avancement (voir p.24) Loi de réfraction (ou deuxième loi de Descartes-Snell)

B. Classe de Première S

	MATHÉMATIQUES *Extraits du programme*	PHYSIQUE-CHIMIE *Des applications*
FONCTIONS DISPONIBLES	Fonctions polynômes : – Fonctions trinômes : variations, allure de la courbe, racines et signe . – Autres fonctions polynômes (surtout du troisième degré) : pas de résultats généraux, mais étude d'exemples. Fonctions rationnelles, irrationnelles : Étude d'exemples simples. Fonctions trigonométriques : Étude d'exemples de fonctions composées des fonctions cosinus ou sinus et d'une fonction affine. Fonction valeur absolue.	Terminale S : oscillateurs électriques et mécaniques : solution de l'équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$, de la forme $u(t) = U_{\max} \cos(2\pi f t + \phi_0)$. Spécialité : porteuse HF (modulation).
DÉRIVATION	Nombre dérivé en un point : – Approche cinématique (passage de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée pour des mouvements rectilignes) ou graphique ; – Définition ; – Tangente à une courbe, approximation affine associée à la fonction. Fonction dérivée : – Lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée ; – Fonctions dérivées des fonctions usuelles (polynômes, cosinus, sinus, racine) ; – Opérations : somme, produit, quotient, composée $f \circ u$ dans le cas où u est une fonction affine. Méthode d'Euler : *On construira point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par :* $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$ *en utilisant l'approximation :* $\Delta f \approx f'(a)\Delta t.$	Première S : calcul de la vitesse instantanée d'un mobile autoporteur. Terminale S : *N.B. Le fil conducteur du programme de physique de TS est « évolution temporelle des systèmes ».* – Mécanique : vitesse $v_G(t)$, accélération $a_G(t)$, avec $a_G(t) = \dfrac{\mathrm{d}v_G(t)}{\mathrm{d}t}$; – Électricité : intensité du courant $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$; – Radioactivité : activité d'un échantillon de noyaux radioactifs $A(t) = \dfrac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}$; – Cinétique chimique : vitesse de réaction $v(t) = \dfrac{1}{V}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$. Applications de la méthode d'Euler : – Mécanique : chute ralentie ; – Électricité : charge et décharge d'un condensateur ; – Radioactivité.

	MATHÉMATIQUES *Extraits du programme*	PHYSIQUE-CHIMIE *Des applications*
LIMITES	Limites de fonctions : – Pas de définition formelle, mais une vision intuitive, puis manipulations de règles ; – Asymptotes verticales, horizontales ou obliques.	Terminale S : Asymptote horizontale : régime asymptotique ou permanent, temps caractéristique, vitesse limite. Chimie : avancement final ; temps de 1/2 réaction.

C. Classe de Terminale S

	MATHÉMATIQUES *Extraits du programme*	PHYSIQUE-CHIMIE *Des applications*
FONCTIONS DISPONIBLES	Fonctions exponentielles – Fonction : $x \mapsto e^x$; – Fonctions : $x \mapsto e^{u(x)}$; – Fonctions : $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$. Fonctions logarithmes – Fonction ln ; – Fonction log (mentionnée pour son utilité dans les autres disciplines). Fonctions trigonométriques : fonction tangente Fonction racine n-ième	Terminale S : radioactivité, électricité, mécanique : solutions d'équations différentielles du premier ordre (avec ou sans second membre). Radioactivité (constante radioactive et demi-vie). Chimie : pH-métrie.
DÉRIVATION	Écriture différentielle $dy = f'(x)dx$. *On se contentera d'expliquer que l'écriture différentielle exprime symboliquement l'égalité $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)$, où ε tend vers 0 avec Δx.* *À l'occasion des exercices, on rencontre des relations entre grandeurs de la forme $x = f(t)$, $y = g(x)$, $v = u(t)$, etc ...où t représente un temps, x et y des longueurs, v une vitesse : dans ces conditions, $f'(t)$ est une vitesse, $g'(x)$ est un nombre et $u'(t)$ une accélération, ce que l'écriture différentielle met en valeur.* Dérivation d'une fonction composée. Équations différentielles – Étude de l'équation $y' = ky$; *l'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables f telles que $f(x+y) = f(x)f(y)$. On construira avec la méthode d'Euler des représentations graphiques approchées de f dans le cas $k = 1$.*	TS : cas des fonctions sinusoïdales.

	MATHÉMATIQUES *Extraits du programme*	PHYSIQUE-CHIMIE *Des applications*
	– Solutions de $y' = ay + b$; *on fera le lien avec l'étude de ces équations en physique ; on définira le temps caractéristique* $\tau = -1/a$ *pour* $a < 0$.	Voir plus haut
LIMITES	Limites de fonctions : – « Définitions » ; – Théorème des gendarmes ; – Règles supplémentaires : quotient, composée. Continuité : – Définition ; – Théorème des valeurs intermédiaires.	
CALCUL INTÉGRAL	Introduction de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme aire sous la courbe. Propriétés (linéarité, positivité, ordre, relation de Chasles), valeur moyenne d'une fonction. *On illustrera l'intérêt de l'intégrale par diverses situations, entre autres : expression intégrale de la distance parcourue sur une droite par un point mobile dont on connaît la vitesse instantanée : ...* *Ce travail est une façon de préparer le théorème liant intégrales et primitives, particulièrement frappant dans le cas du point mobile.* *En lien avec la physique, on mentionnera le problème des unités : si* x *et* y *sont deux grandeurs liées par une relation* $y = f(x)$, *l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *est une grandeur homogène au produit des grandeurs* x *et* y *tandis que la valeur moyenne est homogène à* y. Intégration et dérivation : – Calcul de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une primitive de f ; – Intégration par parties.	Terminale S : – Énergie potentielle élastique associée à la force $F_x = -kx$; – Exploitation de la deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a_G}$

II Fonctions disponibles

Dans le tableau ci-dessous, nous avons répertorié les fonctions de références connues des lycéens, et nous les avons classées selon les années.

NIVEAUX	FONCTIONS DISPONIBLES
À la fin du collège	Fonctions linéaires et affines.
Classe de Seconde	Fonction « carré ». Fonction inverse.
Classe de Première S	Fonctions polynômes : – Fonctions trinômes : variations, allure de la courbe, racines et signe. – Autres fonctions polynômes (surtout du troisième degré) : pas de résultats généraux, mais étude d'exemples. Fonctions rationnelles, irrationnelles : étude d'exemples simples. Fonctions trigonométriques : étude d'exemples de fonctions composées des fonctions cosinus ou sinus et d'une fonction affine. Fonction valeur absolue.
Classe de Terminale S	Fonctions exponentielles : – fonction $x \mapsto e^x$; – fonctions $x \mapsto e^{u(x)}$; – fonctions $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$. Fonctions logarithmes : – fonction ln ; – fonction log (mentionnée pour son utilité dans les autres disciplines). Fonctions trigonométriques : fonction tangente. Fonction racine n-ième.

III Programmes de sciences physiques

A. Classe de Seconde

1) Programme de physique

I - Exploration de l'espace

1 - De l'atome aux galaxies

1.1. Présentation de l'Univers

L'atome, la Terre, le système solaire, la Galaxie, les autres galaxies.

1.2. Échelle des longueurs

Échelle des distances dans l'Univers de l'atome aux galaxies. Unités de longueur. Taille comparée des différents systèmes.

1.3. L'année de lumière

Propagation rectiligne de la lumière.

Vitesse de la lumière dans le vide et dans l'air.

Définition et intérêt de l'année de lumière.

2 - Messages de la lumière

2.1. Un système dispersif, le prisme

Caractérisation d'une radiation.

Loi de DESCARTES sur la réfraction pour une radiation (l'un des milieux étant l'air).

Dispersion de la lumière blanche par un prisme.

Variation de l'indice d'un milieu transparent selon la radiation qui le traverse.

Interprétation qualitative de la dispersion de la lumière par un prisme.

2.2. Les spectres d'émission et d'absorption

2.2.1. Spectres d'émission

Spectres continus d'origine thermique.

Spectres de raies.

2.2.2. Spectres d'absorption

Bandes d'absorption de solutions colorées.

Raies d'absorption caractéristiques d'un atome ou d'un ion.

2.3. Application à l'astrophysique

II - L'UNIVERS EN MOUVEMENT ET LE TEMPS

1 - Mouvements et forces

1.1. Relativité du mouvement

1.2. Principe d'inertie

1.2.a. Effets d'une force sur le mouvement d'un corps. Rôle de la masse du corps.

1.2.b. Énoncé du principe d'inertie pour un observateur terrestre : « Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme si les forces qui s'exercent sur lui se compensent. »

1.3. La gravitation universelle

1.3.a. L'interaction gravitationnelle entre deux corps.

1.3.b. La pesanteur résulte de l'attraction terrestre. Comparaison du poids d'un même corps sur la Terre et sur la Lune.

1.3.c. Trajectoire d'un projectile. Interprétation du mouvement de la Lune (ou d'un satellite) par extrapolation du mouvement d'un projectile.

2 - Le temps

Utilisation d'un phénomène périodique.

2.1. Phénomènes astronomiques : l'alternance des jours et des nuits, des phases de la Lune, des saisons permettent de régler le rythme de la vie (jour, heure, mois, année).

2.2. Dispositifs construits par l'Homme

III - L'AIR QUI NOUS ENTOURE

1 - Du macroscopique au microscopique

1.1. Description d'un gaz à l'échelle microscopique

1.2. Nécessité de décrire l'état gazeux par des grandeurs physiques macroscopiques.

1.2.1. Notion de pression.

Force pressante exercée sur une surface, perpendiculairement à cette surface.

Définition de la pression exercée sur une paroi par la relation $P = F/S$.

Instrument de mesure de la pression : le manomètre.

Unités de pression.

Mise en évidence et origine de la pression dans un gaz ; interprétation microscopique.

1.2.2. Notion d'état thermique.

De nombreux phénomènes physiques peuvent renseigner sur l'état thermique d'un corps comme la dilatation des liquides, la dilatation des gaz, la variation de la résistance électrique, l'émission de rayonnement (cf. Message de la lumière), ...

La mesure d'une température implique l'équilibre thermique de deux corps en contact.

2 - Lien entre agitation thermique et température : équation d'état des gaz parfaits

L'agitation des molécules constituant un gaz à faible pression caractérise son état thermique et peut être utilisée pour définir sa température. Tous les gaz permettent de définir la même échelle de température, dite échelle Kelvin.

L'absence d'agitation thermique correspond au zéro absolu.

L'unité de température absolue : le kelvin.

La température en degré Celsius est déduite de la température absolue T.

2) Programme de chimie

I - CHIMIQUE OU NATUREL

1 - La chimie du monde : mise en évidence de l'ubiquité des espèces chimiques

1.1. Inventaire et classement de quelques espèces chimiques.

1.2. Espèces chimiques naturelles et espèces chimiques synthétiques.

2 - Le monde de la chimie : approches expérimentale et historique de l'extraction, de la séparation et de l'identification d'espèces chimiques.

2.1. Techniques d'extraction d'espèces chimiques organiques.

a. Approche historique.

b. Principe de l'extraction par solvant.

c. Extraction d'espèces chimiques à partir d'un « produit » de la nature : extraction par solvant ou par entraînement à la vapeur.

2.2. Séparation et identification d'espèces chimiques. Caractérisation ou identification par comparaison d'une espèce chimique extraite.

a. Chromatographie : principe de la chromatographie, phase fixe, phase mobile, révélation, interprétation, application à la séparation des espèces d'un mélange et à l'analyse.

b. Caractéristiques physiques : Tf, Teb, densité, indice de réfraction, couleur, solubilités.

3 - Le monde de la chimie : la synthèse des espèces chimiques au laboratoire et dans l'industrie

3.1. Nécessité de la chimie de synthèse : quelques exemples de synthèse dans la chimie lourde et dans la chimie fine (à haute valeur ajoutée) à partir des matières premières de la nature et en fonction des besoins des consommateurs.

3.2. Synthèse d'une espèce chimique.

3.3. Caractérisation d'une espèce chimique synthétique et comparaison avec un extrait naturel comportant la même espèce chimique que l'espèce synthétisée.

II - CONSTITUTION DE LA MATIÈRE

1 - Des modèles simples de description de l'atome

1.1. Un modèle de l'atome
Noyau (protons et neutrons), électrons.
Nombre de charge et numéro atomique Z.
Nombre de nucléons A.
Charge électrique élémentaire, charges des constituants de l'atome.
Électroneutralité de l'atome.
Masse : masses des constituants de l'atome; masse approchée d'un atome et de son noyau, considérée comme la somme des masses de ses constituants.
Dimension : ordre de grandeur du rapport des dimensions respectives de l'atome et de son noyau.

1.2. L'élément chimique
Définitions des isotopes.
Définitions des ions monoatomiques.
Caractérisation de l'élément par son numéro atomique et son symbole.
Conservation de l'élément au cours des transformations chimiques.

1.3. Un modèle du cortège électronique.
Répartition des électrons en différentes couches, appelées K, L, M.
Répartition des électrons pour les éléments de Z compris entre 1 et 18.

2 - De l'atome aux édifices chimiques

2.1. Les règles du duet et de l'octet

a. Énoncé des règles de stabilité des atomes de gaz nobles (ou « rares »), inertie chimique.

b. Application aux ions monoatomiques stables.

c. Application aux molécules à l'aide du modèle de Lewis de la liaison covalente.
Représentation de Lewis de quelques molécules.
Dénombrement des doublets d'électrons liants et non liants.
Notions d'isomérie.

2.2. La géométrie de quelques molécules simples
Disposition relative des doublets d'électrons en fonction de leur nombre.
Application à des molécules ne présentant que des liaisons simples.
Représentation de Cram.

3 - **La Classification périodique des éléments**

3.1. Classification périodique des éléments

La démarche de MENDELEÏEV pour établir sa Classification ; son génie, ses erreurs.

Les critères actuels de la Classification : Z et les électrons de la couche externe.

3.2. Utilisation de la Classification périodique

Familles chimiques.

Formules des molécules usuelles et charges des ions monoatomiques ; généralisation à des éléments de Z plus élevés.

III - TRANSFORMATION DE LA MATIÈRE

1 - **Outils de description d'un système**

1.1. De l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique, la mole

Unité de la quantité de matière : la mole.

Constante d'Avogadro.

Masse molaire atomique et masse molaire moléculaire.

Volume molaire à T et P.

1.2. Concentration molaire des espèces moléculaires en solution

Notions de solvant, soluté, solution et solution aqueuse.

Dissolution d'une espèce moléculaire.

Concentration molaire d'une espèce dissoute en solution non saturée.

Dilution d'une solution.

2 - **Transformation chimique d'un système**

2.1. Modélisation de la transformation : réaction chimique

Exemples de transformations chimiques.

État initial et état final d'un système.

Réaction chimique.

Écriture symbolique de la réaction chimique : équation.

Réactifs et produits.

Ajustement des nombres stœchiométriques.

2.2. Bilan de matière

Initiation à l'avancement.

Expression des quantités de matière (en mol) des réactifs et des produits au cours de la transformation.

Réactif limitant et avancement maximal.

Bilan matière.

B. Classe de Première S

1) Programme de physique

I - Les interactions fondamentales

1 - **Particules élémentaires**

Les constituants de la matière : neutrons, protons ; électrons

Connaître l'ordre de grandeur du rapport des masses du nucléon et de l'électron.

Connaître l'ordre de grandeur du rayon d'un atome et d'un noyau

2 - **Interactions fondamentales**

La masse et l'interaction gravitationnelle ; loi de Newton
Les charges et l'interaction électrique ;
loi de Coulomb ; direction, sens,
valeur $F = kqq'/d^2$ avec $k \approx 9 \times 10^9$ SI
Phénomènes d'électrisation
Isolants . Conducteurs ; porteurs de charge.
Les nucléons et l'interaction forte. Taille atomique.
Deux interactions à l'œuvre dans le noyau : la répulsion coulombienne entre protons compensée, jusqu'à l'uranium, par une interaction attractive intense mais de courte portée

3 - **Interactions et cohésion de la matière à diverses échelles**

Échelle astronomique, échelle atomique et humaine, échelle du noyau.

II - Forces, travail et énergie

A - FORCES ET MOUVEMENTS

1 - **Mouvement d'un solide indéformable**

1.1. Vecteur vitesse d'un point du solide

1.2. Centre d'inertie d'un solide

1.3. Mouvement de translation d'un solide

1.4. Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe ; vitesse angulaire

2 - **Forces macroscopiques d'exerçant sur un solide**

Actions exercées sur un solide ; exemples d'effets produits (maintien en équilibre, mise en mouvement de rotation, déformations).

3 - **Une approche des lois de Newton**

1^re^ loi : Principe d'inertie
Ce principe n'est vrai que dans certains référentiels. dans un référentiel galiléen. si le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_G}$ du centre d'inertie ne varie pas, la somme $\overrightarrow{F} = \sum \overrightarrow{f}$ des forces qui s'exercent sur le solide est nulle et réciproquement.
2^e^ loi : aspect semi-quantitatif : comparaison de la somme des forces et de la variation du vecteur vitesse du centre d'inertie dans un référentiel galiléen.
Dans un référentiel galiléen, si le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_G}$ du centre d'inertie varie, la somme $\overrightarrow{F} = \sum \overrightarrow{f}$ des forces qui s'exercent sur le solide n'est pas nulle. Sa direction et son sens sont ceux de la variation de $\overrightarrow{V_G}$ entre deux instants proches.
3^e^ loi : principe des actions : on a toujours l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{F}_{A/B} = -\overrightarrow{F}_{B/A}$

B - TRAVAIL ET ÉNERGIE

1 - **Travail d'une force**

1.1. Notion de travail d'une force. Effets possibles d'une force dont le point d'*application* se déplace.

1.2. Travail d'une force constante
$W_{AB} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos(\alpha)$
Unité de travail : le joule (symbole J)
Expression du travail du poids d'un corps.
Travail moteur, travail résistant.

1.3. Puissance du travail d'une ou plusieurs forces.
Utiliser la relation $P = W/\Delta t$.

2 - Le travail : un mode de transfert de l'énergie

2.1. Travail et énergie cinétique
Dans un référentiel terrestre, étude expérimentale de la chute libre d'un corps au voisinage de la Terre ; travail du poids : $W_{AB}(P) = \Delta[1/2\, MV_G^2]$
Interprétation énergétique ; définition de l'énergie cinétique d'un solide en translation.
Généralisation : pour un solide en translation soumis à diverses forces :

$$\frac{1}{2} MV_B^2 - \frac{1}{2} MV_A^2 = \sum W_{AB}(F_{\text{ext}}).$$

2.2. Travail et énergie potentielle de pesanteur
Énergie potentielle d'un solide en interaction avec la Terre ; cas particulier des situations localisées au voisinage de la terre. Relation $E_{\text{p}} = Mgz$.
Transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique dans le cas de la chute libre.

2.3. Travail et énergie interne
Quelques autres effets du travail reçu (déformations élastiques, élévation de température, changements d'état physico-chimiques). Notion d'énergie interne.

3 - Le transfert thermique

Un travail reçu peut produire une élévation de température d'un corps. Une élévation de température peut être obtenue par transfert d'énergie sous une autre forme : le transfert thermique : aspect microscopique.
Autre mode de transfert énergétique : le rayonnement.

III - Électrodynamique

A - CIRCUIT ÉLECTRIQUE EN COURANT CONTINU

1 - Transferts d'énergie au niveau d'un générateur et d'un récepteur

1.1. Énergie électrique W_{E} reçue par un récepteur, traversé par le courant d'intensité I pendant Δt : $W_{\text{E}} = (V_A - V_B)I\Delta t$ avec $U_{AB} = (V_A - V_B) > 0$
Puissance électrique du transfert : $P = U_{AB}I$.

1.2. Effet joule : applications

1.3. Énergie électrique transférée du générateur au reste du circuit pendant la durée Δt : $W_{\text{E}} = (V_P - V_N)I\Delta t$, $(V_P - V_N) = U_{PN}$ désigne la différence de potentiel ou tension entre les bornes positive et négative du générateur et I l'intensité du courant qui le traverse.
Puissance électrique du transfert : $P = U_{PN}I$.

1.4. Bilan du transfert d'énergie pendant la durée Δt.

Un récepteur absorbe une énergie électrique $U_{AB}I\Delta t$, en « dissipe » une partie $rI^2\Delta t$ et convertit le reste sous une autre (mécanique, chimique).

Un générateur transforme partiellement une forme d'énergie (mécanique, chimique) $EI\Delta t$ en énergie électrique disponible $U_{NP}I\Delta t$. Le complément $rI^2\Delta t$ est « dissipé » sous forme thermique par effet joule.

2 - Comportement global d'un circuit

2.1. Distribution de l'énergie électrique :

pendant la durée Δt : W_e (générateur) = W_e (récepteur)

Justification énergétique des lois d'additivité des tensions et des intensités (loi des nœuds).

2.2. Étude des paramètres influant sur l'énergie transférée par le générateur au reste d'un circuit résistif :

- Influence de la force électromotrice E.
- Influence des résistances et de leur association.
- Relation $I = E/R_{eq}$.
- Puissance maximale disponible aux bornes d'un générateur, tolérée par un récepteur.

B - MAGNÉTISME, FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

1 - Champ magnétique

Action d'un aimant, d'un courant continu, sur une très courte aiguille aimantée.

Vecteur champ magnétique $\overrightarrow{B}$: direction, sens, valeur et unité. Exemples de lignes de champ magnétique ; champ magnétique uniforme. Superposition de deux champs magnétiques (addition vectorielle).

2 - Champ magnétique créé par un courant

Proportionnalité de la valeur du champ B et de l'intensité du courant en l'absence de milieux magnétiques.

Champ magnétique créé par :

- un courant rectiligne
- un solénoïde

3 - Forces électromagnétiques

Loi de Laplace ; direction, sens, valeur de la force : $F = I/B\ \sin(\alpha)$

4 - Couplage électromécanique

Conversion d'énergie électrique en énergie mécanique.

Rôle moteur des forces de Laplace.

Observation de l'effet réciproque associé au mouvement d'un circuit dans un champ magnétique : conversion d'énergie mécanique en énergie électrique.

IV - Optique

1 - Conditions de visibilité d'un objet

- Rôle de l'œil dans la vision directe des objets.
- Propagation de la lumière : modèle du rayon lumineux ; point - objet.

– Lentilles convergentes ; lentilles divergentes. Critères simples de tri.

2 - **Images formées par les systèmes optiques**

2.1. Images données par un miroir plan.

Observation et localisation de l'image d'un objet donnée par un miroir plan.

Point-image conjugué d'un point objet. Lois de la réflexion.

2.2. Images données par une lentille convergente.

Observation et localisation des images données par une lentille convergente. centre optique, foyers ; distance focale, vergence. Modélisation analytique : relations de conjugaison et de grandissement des lentilles minces convergentes.

La loupe.

3 - **Un exemple d'appareil optique**

Modélisation expérimentale d'un instrument d'optique simple : lunette astronomique.

Lunette terrestre ou jumelles, appareil de projection ou de rétro-projection.

2) Chimie

I - La mesure en chimie

A - POURQUOI MESURER DES QUANTITÉS DE MATIÈRE ?

À partir d'exemples pris dans la vie courante, montrer la nécessité de disposer de différentes techniques de mesure et sensibiliser au choix d'une technique en fonction d'un objectif.

B - GRANDEURS PHYSIQUES LIÉES AUX QUANTITÉS DE MATIÈRE

1 - **Masse, volume, pression**

Grandeurs physiques liées aux quantités de matière solide ou liquide (masse, volume). et gazeuse (masse, volume, pression).

Volume molaire d'un gaz parfait à pression et température connues.

2 - **Concentration ; solutions électrolytiques**

Solide ionique.

Obtention d'une solution électrolytique par dissolution de solides ioniques, de liquides ou de gaz dans l'eau.

caractère dipolaire d'une molécule (dipôle permanent) : exemples de la molécule de chlorure d'hydrogène et de la molécule d'eau ; corrélation avec la classification périodique des éléments.

Solvatation des ions ; interaction entre les ions dissous et les molécules d'eau. Cas particulier du proton.

Concentration molaire de soluté apporté, noté c, et concentration molaire effective espèces dissoutes, notée $[X]$.

3 - **Applications au suivi d'une transformation chimique**

Évolution d'un système au cours d'une transformation chimique : avancement, tableau descriptif de l'évolution et bilan de matière.

C - COMMENT DÉTERMINER DES QUANTITÉS DE MATIÈRE EN SOLUTION À L'AIDE D'UNE MESURE PHYSIQUE ? L'EXEMPLE DE LA CONDUCTIMÉTRIE

1 - **Conductance d'une solution ionique, G**

Méthode de mesure de la conductance. Grandeurs d'influence (température et état de surface des électrodes, surface des électrodes, distance entre elles, nature et concentration de la solution).
Courbe d'étalonnage $G = f(c)$.

2 - **Conductivité d'une solution ionique, σ**

Définition à partir de la relation concentrations à partir d'une solution mère $G = \sigma\, S/L$.
Relation entre σ et c.

3 - **Conductivité molaire ionique**, λ_i, et relation entre les conductivités molaires ioniques et la conductivité d'une solution

D - COMMENT DÉTERMINER DES QUANTITÉS DE MATIÈRE EN SOLUTION À L'AIDE DE LA RÉACTION CHIMIQUE

1 - **Réactions acido-basiques**

Exemples de réactions acido-basiques comme réactions impliquant des transferts de photons.

2 - **Réactions d'oxydoréduction**

Exemples de réactions d'oxydoréduction comme réactions impliquant des transferts d'électrons.

3 - **Dosages (ou titrages) directs**

La réaction chimique comme outil de détermination des quantités de matière. Utilisation d'un tableau décrivant l'évolution du système au cours du dosage. Équivalence lors d'un dosage.

II - La chimie créatrice

A - LA CHIMIE ORGANIQUE : DE SA NAISSANCE À SON OMNIPRÉSENCE DANS LE QUOTIDIEN

1 - Qu'est-ce que la chimie organique ?

2 - Le carbone élément de base de la chimie organique.

3 - Quelques dates dans l'histoire de la chimie organique

4 - L'omniprésence de la chimie organique

B - APPRENDRE À LIRE UNE FORMULE CHIMIQUE

III - L'énergie au quotidien : la cohésion de la matière et les aspects énergétiques de ses transformations

1 - La cohésion de la matière

2 - Les transformations de la matière : aspects énergétiques et aspects thermiques associés.

3 - Quelques applications au quotidien des effets thermiques.

C. Classe de Terminale S

1) Programme de physique : enseignement obligatoire

I - Propagation d'une onde : ondes progressives

1 - Les ondes mécaniques progressives

Définition d'une onde. Célérité. Ondes longitudinales et transversales. propriétés générales des ondes. Cas des ondes sonores.

Ondes progressives à une dimension. Expression du retard temporel entre deux points M et M' pour un milieu dont la célérité est v : $\tau = MM'/v$.

2 - Ondes progressives mécaniques périodiques

Périodicité temporelle et spatiale. Expression de la longueur d'onde : $\lambda = cT$.

Diffraction, mise en évidence de l'influence de la largeur de l'ouverture ou de la dimension de l'obstacle.

Dispersion : mise en évidence pour les ondes à la surface de l'eau.

3 - La lumière, modèle ondulatoire

Diffraction pour une lumière blanche et pour une lumière monochromatique.

Écart angulaire ou demi-largeur angulaire θ d'un faisceau diffracté par une ouverture de largeur a : $\theta = \lambda/a$.

Réfraction de la lumière, dispersion par un prisme, indice de réfraction d'un milieu.

II -Transformations nucléaires

1 - Décroissance radioactive

Composition des noyaux, diagramme (N, Z). Radioactivité α, β^-, β^+, émission γ. Lois de conservations : conservation de la charge et du nombre de nucléons.

Activité d'un échantillon radioactif, aspects statistiques. Unité de l'activité, le Becquerel.

Évolution de la population d'un échantillon : $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Demi-vie d'un échantillon, relation entre la constante radioactive λ et la demi-vie : $t_{1/2} = \ln(2)/\lambda$. Application à la datation.

2 - Noyaux, masse et énergie

Équivalence masse énergie : $E = mc^2$. Définition de l'électronvolt : eV, keV, MeV.

Défaut de masse, énergie de liaison par nucléon, courbe d'Aston.

Fission et fusion, bilan d'énergie.

III - Évolution des systèmes électriques

1 - Dipôle *RC*

Le condensateur, description, symbole.

Relation entre intensité et charge : $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$.

Algébrisation en convention récepteur de i, u, q.

Relation $q = Cu$ pour le condensateur, capacité C en farad (F).

Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension. Étude expérimentale. Évolution de la tension u aux bornes du condensateur, résolution analytique de l'équation différentielle. Influence de l'amplitude de l'échelon de tension, de R, de C. Constante de temps du circuit : $\tau = RC$. Continuité de la tension aux bornes du condensateur. Énergie emmagasinée dans un condensateur.

2 - Dipôle *RL*

Description sommaire d'une bobine, symbole. Tension aux bornes d'une bobine en convention récepteur : $u = Ri + L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$. Inductance en Henry (H).

Réponse en courant d'une bobine à un échelon de tension : étude expérimentale et étude théorique : équation différentielle et résolution analytique.

Continuité de l'intensité du courant dans un circuit comportant une bobine.

Énergie emmagasinée dans une bobine.

3 - Oscillations libres dans un circuit *RLC*

Décharge oscillante d'un condensateur dans une bobine. Influence de la résistance : régime pseudopériodique, régime critique et apériodique. période propre et pseudopériode.

Interprétation énergétique : transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine. Effet joule. Résolution analytique dans le cas d'un amortissement négligeable : solution sinusoïdale : $u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \Phi)$, amplitude U_0, pulsation ω_0, phase à l'origine Φ.

Expression de la période propre : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

Entretien des oscillations.

IV - Évolution temporelle des systèmes mécaniques

1 - Les lois de Newton

Énoncé des trois lois de Newton. Importance du choix du système, du référentiel, choix des repères de temps et d'espace. Référentiels galiléens.

Définition de l'accélération : $\overrightarrow{a} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a} = m\,\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t}$.

Exploitation de documents : tracé et exploitation des courbes $V_G = f(t)$.

2 - Étude de cas particuliers :

- Chute verticale d'un solide

  Application de la deuxième loi de Newton à un mouvement de chute verticale (solide soumis à son poids, à la poussée d'Archimède, aux forces de frottements fluides).

  Équation différentielle du mouvement, résolution par une méthode numérique itérative (méthode d'Euler). Vitesse limite, régime permanent (ou asymptotique), notion de temps caractéristique.

  Chute libre, établissement et résolution de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = g$; importance des conditions initiales.

- Mouvements plans : mouvements de projectiles dans un champ de pesanteur uniforme lorsque les frottements sont négligés.

  Équations horaires paramétriques :

  $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t + x_0$; $y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + y_0$.

  Équation de la trajectoire.

  Importance des conditions initiales.

  Satellites et planètes : Lois de Képler, référentiels héliocentrique et géocentrique.

  Étude du mouvement circulaire uniforme, accélération normale $a_n = V^2/R$.

  Application de la deuxième loi de Newton, modélisation du mouvement des centres d'inertie par un mouvement circulaire et uniforme : période de révolution, vitesse en fonction de l'altitude. cas des satellites géostationnaires.

Interprétation qualitative de l'impesanteur.

3 - **Systèmes oscillants**

- Présentation de divers systèmes oscillants mécaniques.
  Pendule pesant, pendule simple, système solide ressort en oscillation libre : position d'équilibre. Régimes pseudopériodiques et apériodiques. Isochronisme des petites oscillations, expression de la période propre d'un pendule simple. Justification par analyse dimensionnelle.
- Étude du dispositif solide-ressort.
  Application de la deuxième loi de Newton, équation différentielle et solution analytique dans le cas des frottements nuls. Expression de la période propre.
- Le phénomène de résonance
  Présentation expérimentale. Système excitateur, système résonateur. Influence de l'amortissement. Exemples.

4 - **Aspects énergétiques**

Travail élémentaire d'une force $\mathrm{d}W = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l}$. Travail d'une force extérieure appliquée à l'extrémité d'un ressort. Énergie potentielle élastique du ressort.

Énergie mécanique du système ressort-solide.

Énergie mécanique d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme.

$E_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgz.$

V - Évolution temporelle des systèmes et mesure du temps (révision et aspects culturels, aucune connaissance exigée)

- Exemples de mesure d'une durée :
  - À partir d'une décroissance radioactive.
  - À partir de phénomènes périodiques (mouvement des astres, rotation de la terre, horloges mécaniques, horloges atomiques). Définition de la seconde.
- Mesure d'une durée pour déterminer une longueur ou une vitesse.
  Télémétrie ultrasonore, télémétrie laser, définition du mètre à partir de la seconde et de la vitesse de la lumière, histoire des longitudes, mesure de la célérité du son. Histoire de la mesure de la célérité de la lumière.

2) Programme de chimie

I - Cinétique chimique. La transformation d'un système chimique est-elle toujours rapide ?

1 - **Transformations lentes et rapides**

Écriture des équations d'oxydoréduction. Couples oxydant/réducteur mis en jeu.

Influence des facteurs cinétiques : température et concentration des réactifs.

2 - **Suivi temporel d'une transformation**

Tracé des courbes d'évolution de quantités de matières et de l'avancement x de la réaction au cours du temps.

Définition de la vitesse volumique de réaction : $v = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$; où x est l'avancement, et V le volume de la solution.

Évolution de la vitesse de réaction au cours du temps (à partir de l'observation des courbes). Temps de demi-réaction $t_{1/2}$.

Méthode de suivi : spectrophotométrie ou mesure d'absorbance (relation entre absorbance et concentration à une longueur d'onde donnée : $A = kc$), conductimétrie, mesure de pression ou de volume d'un gaz.

3 - **Interprétation microscopique**

Influence des facteurs cinétiques sur le nombre de chocs efficaces lors d'une réaction chimique.

II - Notion d'équilibre chimique. La transformation d'un système chimique est-elle toujours totale ?

1 - **Une transformation n'est pas toujours totale et la réaction a lieu dans les deux sens**

Réaction acide/base, mesure du pH. Relation $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H_3O^+}]$.

Avancement final, avancement maximal, taux d'avancement.

Écriture symbolique de la réaction en utilisant le signe =.

Par exemple, $aA + bB = cC + dD$, avec a, b, c et d les coefficients stœchiométriques des espèces A, B, C et D.

État d'équilibre d'un système chimique, interprétation microscopique.

2 - **État d'équilibre d'un système**

Détermination de l'état d'équilibre d'un système à partir du pH ou d'une mesure de la conductance G de la solution. Expression de la conductance en fonction des concentrations des ions. $G = \sum \lambda_i [X_i]$.

Quotient réactionnel, expression littérale en fonction des concentrations $Q_\mathrm{r} = \dfrac{[A]^a[B]^b}{[C]^c[D]^d}$

Constante d'équilibre $K_\mathrm{r} = Q_\mathrm{rE}$ à température donnée.

Influence de l'état initial sur le taux d'avancement.

3 - **Transformations associées à des réactions acidobasiques en solution aqueuse**

Autophotolyse de l'eau. produit ionique de l'eau $\mathrm{K_E} = [\mathrm{H_3O^+}][\mathrm{OH^-}]$.

Constante d'acidité $\mathrm{K_a}$. $\mathrm{pK_a} = -\log(\mathrm{K_a})$. constante d'équilibre associée à une réaction acidobasique. détermination à partir des $\mathrm{pK_a}$ des couples mis en jeu.

Diagramme de prédominance et de distribution des espèces acides et basiques en solution.

Zone de virage d'un indicateur coloré acidobasique.

Titrage pH-métrique d'un acide ou d'une base.

III - Sens d'évolution d'un système chimique. Le sens spontané d'évolution d'un système est-il prévisible ? Le sens d'évolution d'un système peut-il être inversé ?

1 - **Le système chimique évolue spontanément vers l'état d'équilibre**

Évolution du quotient réactionnel Q_r d'un système initial vers la valeur de K_r, détermination du sens d'évolution par comparaison entre Q_r et K_r.

2 - **Les piles, dispositifs mettant en jeu des transformations spontanées permettant de récupérer de l'énergie**

Constitution et fonctionnement d'une pile. Schématisation. Mouvement des porteurs de charges rôle du pont salin. Polarité des électrodes. Force électromotrice. Sens des transferts d'électrons, sens du courant électrique. Quantité d'électricité maximum débitée. Quelques exemples de piles usuelles.

3 - Exemples de transformations forcées, électrolyse

Réactions aux électrodes. Oxydation anodique, réduction cathodique. Applications industrielles.

IV - Comment le chimiste contrôle-t-il les transformations de la matière ?

Le contrôle de l'évolution des systèmes chimiques est illustré par des exemples pris dans l'industrie des parfums, arômes, savons et dans l'industrie pharmaceutique.

Contrôle de la vitesse, du rendement, emploi d'un catalyseur.

1 - Les réactions d'estérification et d'hydrolyse

Formation d'un ester à partir d'un acide et d'un alcool, écriture de l'équation de la réaction correspondante appelée réaction d'estérification. Réaction inverse appelée hydrolyse.

Définition du rendement. Définition du catalyseur. Contrôle de l'état du système en prenant un excès de réactif ou élimination d'un produit.

2 - Exemples de contrôles de l'évolution dans l'industrie chimique et dans les sciences de la vie

Mise en œuvre pratique de ces transformations : justification d'un protocole. Chauffage à reflux, distillation fractionnée, cristallisation.

Réaction à partir d'un anhydride d'acide.

Hydrolyse basique d'un ester : saponification. Propriétés des savons : partie hydrophile et partie hydrophobe.

Catalyse homogène, hétérogène, sélectivité des catalyseurs.

3) Programme de physique : enseignement de spécialité

I - Produire des images, observer

1 - Formation d'une image

1.1. Image formée par une lentille mince convergente.

Conditions de Gauss. Construction graphique.

Relation de conjugaison, grandissement. $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}} = C$

1.2. Image formée par un miroir sphérique convergent.

Construction graphique. Construction d'un faisceau lumineux issu d'un point de la source à distance finie ou infinie.

Savoirs faire expérimentaux : réaliser un montage optique à partir d'un schéma, rechercher la position d'une image, utiliser un banc d'optique pour effectuer des mesures et déterminer expérimentalement la distance focale pour une lentille ou un miroir

2 - Quelques instruments d'optique

2.1. Le microscope : description, modélisation par un système de deux lentilles minces. Construction graphique de l'image intermédiaire et de l'image définitive. Diamètre apparent d'un objet. Grossissement standard. Cercle oculaire.

2.2. La lunette astronomique et le télescope de Newton : description et modélisation de la lunette par un système afocal de deux lentilles minces. Modélisation du télescope de Newton par un système de miroirs et lentille mince.

Savoirs faire expérimentaux : savoir construire la marche d'un faisceau lumineux à travers un instrument, savoir utiliser et exploiter l'expression du grossissement. savoir construire la position du cercle oculaire et connaître son intérêt pratique. Savoir choisir des lentilles adaptées dans un montage permettant d'illustrer le fonctionnement de ces trois instruments, savoir régler le montage et effectuer des mesures.

II - Produire des sons, écouter

1 - Production d'un son par un instrument de musique

Vibration d'un système, couplage avec l'air. cas de quelques instruments réels.

2 - Modes de vibrations

2.1. Vibration d'une corde tendue entre deux points fixes. Modes propres : fondamental et harmoniques. Nœuds et ventres de vibration.

2.2. Vibration d'une colonne d'air. Mise en évidence des modes propres de vibration par excitation sinusoïdale. Sélection des fréquences émises par la longueur de la colonne d'air.

3 - Interprétation ondulatoire

Réflexions sur un obstacle fixe ou deux obstacles fixes. Superposition d'une onde réfléchie : ondes stationnaires. Quantification des modes observés : relation entre la longueur d'onde et la longueur du milieu. Justification des fréquences propres.

Cas d'une colonne d'air.

Savoirs faire expérimentaux : savoir mesurer une fréquence ou une période. savoir mettre en évidence les modes propres de vibration d'une corde ou d'une colonne d'air. Détermination d'une longueur d'onde à partir d'un système d'ondes stationnaires. Mesure d'une célérité.

4 - Acoustique musicale et physique des sons

Domaine des fréquences audibles. sensibilité de l'oreille.

Hauteur d'un son et fréquence fondamentale. Timbre et harmoniques. Importance du phénomène transitoire.

Intensité sonore et niveau sonore en décibel.

$L = 10\log_{10}\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, avec $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

Gammes, octave, gamme tempérée.

Savoirs faire expérimentaux : savoir faire l'acquisition et l'analyse spectrale d'une note produite par un instrument de musique.

III - Produire des signaux, communiquer

1 - Les ondes électromagnétiques, support de choix pour transmettre des informations

Transmission des informations par des ondes électromagnétiques. Classement des ondes selon leur fréquence. Rôles d'une antenne émettrice et d'une antenne réceptrice.

Différence entre modulation d'amplitude et modulation de fréquence. Expression d'une tension modulée à partir de l'expression d'une tension : $u(t) = U_{\max}\cos(2\pi ft + \Phi_0)$.

Savoirs faire expérimentaux : savoir observer avec un oscilloscope le signal d'un fil conducteur connecté à l'une des entrées. Savoir transmettre un signal de fréquence sonore par un faisceau lumineux.

2 - **Modulation d'amplitude**

Principe de la modulation d'amplitude. Exemple de réalisation. Notion de surmodulation. Choix de la fréquence du signal à moduler en fonction des caractéristiques du signal modulant.

Principe de la démodulation d'amplitude. détection d'enveloppe, élimination d'une composante continue. Restitution du signal modulant.

Savoirs faire expérimentaux : savoir réaliser un montage de modulation d'amplitude et de démodulation à partir d'un schéma. Savoir choisir des tensions pour une modulation de bonne qualité. Savoir choisir les composants R et C pour une bonne démodulation. Savoir exploiter des oscillogrammes.

3 - **Réalisation d'un dispositif permettant de recevoir une émission radio en modulation d'amplitude**

Rôle du dipôle LC dans la réception d'un signal modulé.

Réalisation d'un récepteur radio.

Savoirs faire expérimentaux : savoir utiliser un dipôle LC pour obtenir un filtre passe bande adéquat. savoir expliquer son utilité. Savoir associer les divers modules nécessaires pour la réalisation d'un récepteur radio.

4) Programme de chimie : enseignement de spécialité

On donne ici les compétences exigibles des élèves. mais le programme permet de réinvestir une bonne partie des connaissances du tronc commun. Différentes activités sont proposées dans les documents d'accompagnements (synthèse. dosages. extractions). nous ne donnerons pas de détails.

Partie A : extraire et identifier des espèces chimiques

- Réaliser une chromatographie par une technique donnée.
- Exploiter un chromatogramme.
- Réaliser une extraction liquide.
- Choisir la verrerie appropriée pour réaliser une manipulation à partir d'un protocole expérimental et d'une liste de matériel.

Partie B : créer et reproduire des espèces chimiques

- Réaliser les opérations suivantes : chauffage à reflux, distillation, lavage d'une phase organique, séchage d'un solide, cristallisation et recristallisation.
- Appliquer des consignes de sécurité.
- Justifier les opérations d'un protocole à partir de données physico chimiques (solubilité, température de changement d'état, pH, densité.
- Calculer un rendement.
- Reconnaître le groupe caractéristique amide.

Partie C : effectuer des contrôles de qualité

Dosage par étalonnage : exemple à partir d'une échelle de teinte et de mesures d'absorbance.

Titrage direct et indirect :
- Réaction d'oxydo-réduction.
- Réaction acide/base et dosage par pH-métrie.
- Réaction de précipitation et dosage par conductimétrie.
- Réaction de complexation, avec indicateur de fin de réaction.

Savoir exploiter une courbe d'étalonnage, savoir exploiter un titrage, utiliser les domaines de prédominance des espèces acide et basique pour justifier un protocole.

Savoir reconnaître un titrage direct d'un titrage indirect.

Partie D : élaborer un produit de consommation, de la matière première à la formulation

- Séparer : illustration de quelques procédés de séparation utilisés en métallurgie.
- Électrolyser.
  Procédés d'affinage : purification.
  Protections contre la corrosion : anodisation, électrozingage.
- Formuler, conditionner : formulation d'un médicament, conservateurs et emballages.

Savoir réinvestir les connaissances en chimie du tronc commun sur les électrolyses.

Ressources

a) Livres

[1] BOUYRIE G., « Physique et calcul différentiel », *in Bulletin de l'Union des Physiciens*, n° 851, fév. 2003, p. 275 à 298.

[2] GROUPE MATH-PHYSIQUE DE L'IREM DE STRASBOURG, *Dictionnaire de Mathématiques et de Sciences physiques*, *IREM de Strasbourg*, 1996.

[3] COSTE R., PYTHON N., WINTHER J. « La liaison mathématiques-physique en classe de Terminale S », *in Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*, n° 452, mai-juin 2004, p. 351 à 364.

[4] COUP J., *Manuel scolaire de Physique en TS, programme 2002*, Bordas, Paris, 2002.

[5] NOGUES M., *Le concept de fonction*, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 1992/1993.

[6] QUELEN J.P., « Deux situations traitées de concert en mathématiques et en physique », *in Repères*, n° 65, oct. 2006, p. 33 à 42.

[7] ROGALSKI M., *Carrefours entre Analyse Algèbre Géométrie*, Ellipses, Paris, 2001

[8] ROUVEL D., « Scolie au sujet d'une relation entre les mathématiques et la physique »

[9] TOMASINOL A., *Manuel scolaire de Physique-Chimie en Seconde, programme 2000*, Nathan, Paris, 2000.

[10] WINTHER J., COSTE R., « Les équations différentielles en Terminale scientifique », *in Bulletin de l'Union des Physiciens*, n° 855, juin 2003

b) Sites internet

http://www-irem.univ-fcomte.fr/
« Réflexion sur la liaison mathématiques-physique-chimie », *in Bulletin de l'IREM de Franche-Comté*, n° 71.

http://labolycee.org/
Les annales du bac S de Physique-Chimie de 2003 à 2007.

http://eduscol.education.fr/
Programmes de mathématiques et de sciences physiques au lycée, documents d'accompagnement.

Presses universitaires de Franche-Comté
Université de Franche-Comté
Place Saint-Jacques - 25030 Besançon Cedex

Imprimé par Dicolor
21121 Ahuy

Dépôt légal : 2e trimestre 2008
Dépôt légal imprimeur : 08 06 1022

Auteurs Claire Chalnot, Françoise de Labachelerie, Philippe Guillaume, Christine Huot, Michel Magnenet, Alain Parmentelat, Philippe Speyer-Pays, Stéphane Verjux et Jean-Marie Vigoureux (GROUPE MATHÉMATIQUES-SCIENCES PHYSIQUES)

Titre Les fonctions en mathématiques et en sciences physiques. Accords et variations de la Seconde à la Terminale.

Langage Français

Caractéristiques de l'édition

Édition	Première édition
Éditeur	Presses universitaires de Franche-Comté
Diffuseur	IREM de Franche-Comté
Année	2008
Format	21 x 29,7 cm (A4) 118 pages recto verso support papier
Dépôt légal	2e trimestre 2008
ISBN	978-2-84867-228-1

Public Formateurs et professeurs de mathématiques ou de sciences physique de lycée

Résumé Cette brochure est écrite conjointement par des enseignants de mathématiques et de sciences physiques, animateurs à l'IREM de l'Université de Franche-Comté. Elle met en évidence les différentes approches de la notion de fonction au lycée dans les deux disciplines. Sans pour autant chercher à les uniformiser, les pratiques pédagogiques sont comparées en vue de les rendre cohérentes. La première partie est consacrée à des définitions et propriétés générales des fonctions, la deuxième à leur dérivation, la troisième aux équations différentielles. Chacune de ces parties commence par une courte synthèse des connaissances mathématiques enseignées aux élèves. Des exercices de chaque matière sont ensuite présentés, corrigés et commentés. Enfin la quatrième partie met en regard les programmes des deux disciplines dans les classes de Seconde, de Première et de Terminale scientifiques.

Mots clés Fonction, équation, variable, constante, paramètre, graphe, dérivée, équation différentielle, approximation, tangente, expérimentation, expérience, diffraction, courbe, condensateur, méthode d'Euler, étalonnage, harmonisation, cohérence, IREM, mathématiques, jeux mathématiques, Franche-Comté, université, presses universitaires.

Presses universitaires de Franche-Comté
http://presses-ufc.univ-fcomte.fr

Prix public : 9 eur

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Université de Franche-Comté

Département de Mathématiques - UFR Sciences et Techniques
16 route de Gray - 25030 BESANÇON Cedex - France

Tél. : 03 81 66 62 25 - Fax : 03 81 66 66 23
Courriel : iremfc@univ-fcomte.fr – http: //www-irem.univ-fcomte.fr/