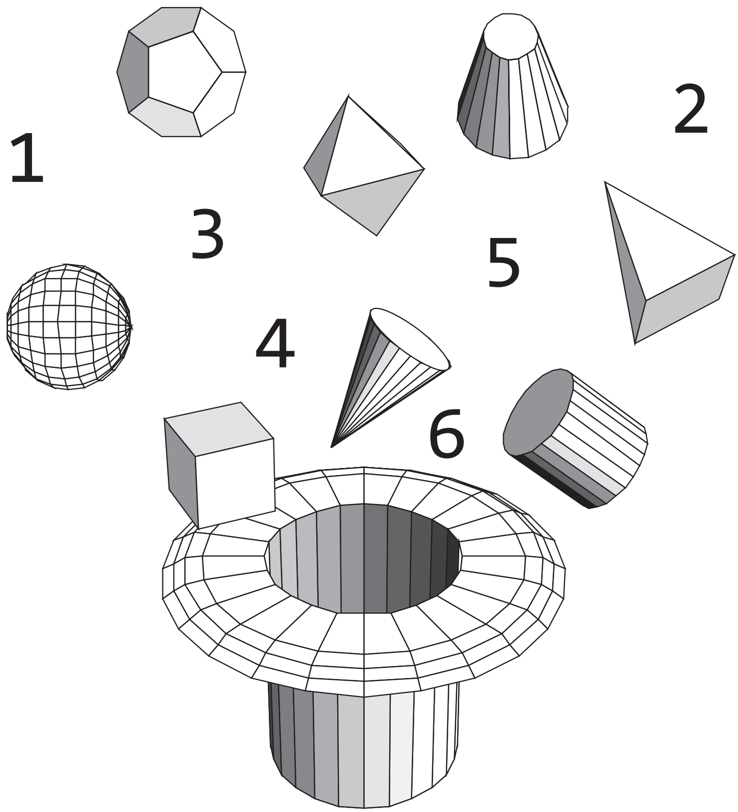
Mathématiques vivantes



Bulletin de l'IREM de Besançon

n° 72 – 2022

Presses universitaires de Franche-Comté

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Université de Franche-Comté

Directeur : Philippe Le Borgne

Département de Mathématiques – UFR Sciences et Techniques
16 route de Gray – 25030 BESANCON CEDEX – France

Tél. : 03 81 66 62 25 – Courriel : iremfc@univ-fcomte.fr
Site : http://www-irem.univ-fcomte.fr

ISSN papier : 1141-913X
ISSN électronique : à venir

Table des matières

Qui est qui ?

Florence Falguères est professeure de mathématiques en collège. Co-responsable du groupe IREM-RMT de Franche-Comté, elle est également coordinatrice internationale de langue française de l'Association du Rallye Mathématique Transalpin.

Mustapha Mokhtar-Kharroubi est professeur de mathématiques à l'université de Franche-Comté. Ses travaux, à cheval entre les équations aux dérivées partielles et l'analyse fonctionnelle, portent sur la théorie spectrale des semi-groupes et ses applications aux équations cinétiques et celles de Schrödinger.

François Netillard enseigne en classe préparatoire aux grandes écoles au lycée Germaine Tillion de Montbéliard ; il est aussi chercheur hébergé au sein du Laboratoire de Mathématiques de Besançon (LMB). Il s'intéresse également à l'histoire des mathématiques.

Éditorial

En guise d'éditorial, nous rendons compte d'une conversation sur les circonstances de la naissance, de la vie, de l'endormissement et du réveil du *Bulletin de liaison* de l'IREM de Besançon à laquelle ont participé Michel Henry, Henri Lombardi, Stefan Neuwirth et François Pétiard.

Des piles de brochures au ministère

M. H. En 1985 j'étais au bureau de l'ADIREM [Assemblée des directeurs d'IREM] avec comme président de l'ADIREM Marc Fort (qui ensuite est devenu inspecteur général) et un jour on voulait discuter de ce que faisait le ministère de nos brochures, des brochures des IREM et aussi des bulletins. Je suis allé au ministère et j'ai rencontré la personne chargée des brochures des IREM et la personne m'a dit : « Ah, vous voulez savoir ? Venez, je vous emmène ! » On a fait deux, trois étages, il m'a emmené dans un grand bureau, à peu près de cette taille-là, il y avait jusqu'au plafond des piles de brochures IREM et de bulletins et tout ça. Il m'a dit : « Qu'est-ce que vous voulez que je fasse de ça ? »

La littérature grise

M. H. À cette époque là on appelait les bulletins des IREM (ou j'appelais ça) « la littérature grise ». Pour moi c'était important parce que ça permettait aux animateurs qui la plupart étaient du second degré d'avoir un accès à l'écriture, un apprentissage de la rédaction. La plupart des bulletins et des brochures IREM n'étaient pas relus, il n'y avait pas de relecture, ce qui fait qu'il y avait des fois un petit peu n'importe quoi dedans, et les matheux rigolaient un peu quand ils regardaient ce qui se produisait dans les IREM. Heureusement on avait des soutiens parmi les matheux, je citerai notamment Jean-Pierre Kahane et puis Adrien Douady, ils avaient compris qu'il fallait quand même élever le niveau mais en même temps que c'était quelque chose d'important.

Les débuts du *Bulletin*

M. H. Dès que l'IREM a été créé fin 1969 (j'étais animateur en '70 à l'IREM et c'est Jean Parizet qui était le directeur), dans le programme de mise en place des IREM il y avait l'expression publique, l'aide, etc., et donc l'idée de créer un bulletin.

On était deux, avec Renée Vaudène (Philippe elle s'est appelée ensuite). On était les deux recrutés ici et puis quand les IREM ont été créés et que Parizet a été désigné comme directeur, il nous a dit : « Vous-là, les deux qui venez d'arriver, hop, à l'IREM ! » On n'a pas eu à dire, on ne l'a pas regretté d'ailleurs, et c'est là qu'on s'est formés dès 1970 pour moi et pour Renée aussi, on était les deux, sous prétexte qu'on sortait de l'ÉNS. Après, il a fallu qu'on aille faire notre recherche et on a arrêté l'IREM, et je m'y suis retrouvé nettement plus tard. Voilà pour le début.

S. N. Tu racontes cet épisode de 1985 comme un épisode qui caractérise le *Bulletin de liaison* comme quelque chose qui encombre les locaux du ministère, c'est-à-dire que l'éducation nationale ne savait pas trop quoi faire de cette production-là…

M. H. … disons, n'avait rien à faire. Par contre à l'IREM, je pensais, je pense toujours, que c'était très important parce que ça poussait un petit peu les collègues à écrire – parce qu'en réunion, comme ça, on cause, on cause – à écrire, à rédiger des choses, et puis à se former à l'écriture, il y avait beaucoup de formation qui était là-derrière.

H. L. La plupart des lycées de l'académie étaient abonnés au *Bulletin IREM*. Moi le souvenir que j'ai c'est plutôt que c'était d'un niveau tout à fait acceptable. En tous les cas quand j'avais la responsabilité du *Bulletin*, je relisais les articles ! Je n'ai presque jamais rejeté un article. Je crois que j'ai rejeté un article une fois parce que c'était vraiment trop universitaire, quoi, pas parce que les gens du secondaire disaient des conneries, je n'ai jamais eu cette impression !

M. H. Ils ne disent pas de conneries ! Et puis Fontaine relisait aussi beaucoup, c'était le directeur de l'IREM après Parizet. Il relisait beaucoup.

H. L. Il publiait aussi des articles intéressants dans le *Bulletin*.

M. H. Il y avait des choses très bonnes mais c'était quand même un travail de formation, je trouve.

S. N. Ça s'appelait le *Bulletin de liaison*, comme je disais tout-à-l'heure, ou ça portait un nom plus… ?

M. H. Ça ne s'appelait pas *Mathématiques vivantes*, déjà ?

Mathématiques vivantes

H. L. C'est moi qui lui ai donné ce nom. J'ai voulu mettre sur la page de couverture un dessin de F'murr, du chien en train de réfléchir à une intégrale, et la secrétaire de l'IREM m'a dit : « Ah non, ça, il faut demander l'autorisation à l'auteur ». On a écrit à l'auteur mais on est tombés sur quelqu'un qui n'était pas l'auteur – ils ont refusé. C'était dommage parce que ç'aurait été marrant ! Je trouvais qu'il y avait un aspect très ludique en fait dans les bulletins IREM, c'était suffisamment ouvert, quoi ! J'ai bien aimé cette période où je m'en suis occupé.

Qu'est-ce que j'ai fait de spécial ? Ah oui, j'ai décidé, j'ai essayé de faire qu'on publie dans chaque numéro un extrait d'un autre bulletin d'IREM, une bonne feuille, voilà, parce qu'il se passait en France plein de choses, puis les collègues évidemment n'allaient pas lire tous les bulletins IREM qui paraissent. Ça m'arrivait de tomber sur un article passionnant, je le mettais, voilà. C'est mes grands exploits. Après, je n'ai pas vraiment d'autre souvenir.

M. H. Quand j'étais à l'IREM, on a pas mal investi dans les brochures, c'était du travail un peu plus approfondi. Le bulletin, je ne m'en suis pas très occupé. Il y a

Claude Merker qui a donné aussi.

S. N. Peut-être que les questions que je pose n'ont pas de sens, peut-être qu'en fait le *Bulletin* était plutôt simplement un travail collectif où personne n'était vraiment en charge de l'édition ?

H. L. Moi j'ai été investi, on m'a dit : « Bon, maintenant, tu t'occuperas du *Bulletin* ». J'avais peut-être six heures ou douze heures par an pour faire ça, et puis je m'en suis occupé, raisonnablement, je pense que je relisais tous les articles. Franchement, moi, j'ai un bon souvenir !

F. P. Moi j'ai le souvenir d'une publication qui était *grosso modo*, à peu près deux par an, il me semble que c'était plus au début.

H. L. Après ça a diminué, il y a eu moins d'abonnements, les gens ont de moins en moins lu, quoi.

Le passage au numérique

F. P. J'en ai hérité en 2001, et là, pour le coup, j'avais la charge de l'édition, mais en plus de mettre aussi sur internet, c'était ça la grosse différence.

H. L. Ça devait te demander un boulot considérable !

F. P. C'était du boulot, quoi. Mais c'est pareil, il n'y avait pas de comité de lecture. C'était moi qui relisais, avec tous les biais que ça peut introduire, d'être tout seul à relire, je ne me sentais pas forcément extrêmement légitime dans certains cas, je ne sais pas si vous vous êtes sentis comme ça, mais il y a des fois quand on avait des articles de physique, ça peut arriver quand même, des articles de physique, je disais des choses, mais OK ! je suis incapable d'avoir une vision critique, pointue là-dessus.

S. N. Tu ne sais pas à qui tu as succédé ?

H. L. Il faudrait voir qui écrivait les éditos !

F. P. Je n'écrivais pas d'éditos !

H. L. Non, mais plutôt la présentation des bulletins. Moi il me semble que j'écrivais la présentation des bulletins.

S. N. C'est-à-dire qu'ici on a affaire à une littérature grise mais on a aussi un petit peu affaire à une histoire grise pour ainsi dire, tout ça c'est une histoire qui s'étale sur cinquante ans, de 1970 à 2020. Il reste très très peu de traces. Il reste tous les numéros ; tous les numéros sont à la BU sciences.

La relance de *Mathématiques vivantes*

S. N. Je peux vous raconter sous quels auspices nous avons relancé *Mathématiques vivantes*, déjà pour dire que pour moi, relancer *Mathématiques vivantes* c'était un moyen très facile, très simple, de remettre les gens à l'écriture, de faire en sorte que le travail qui se fait dans les groupes IREM ici à Besançon ait aussi une forme écrite. Ce n'est pas tellement une question de trace, c'est vraiment une question de forme. Dans les groupes il se passe quelque chose qui transforme les participants dans cette interaction, et cette transformation, cette progression, eh bien, si elle est accompagnée d'un travail d'écriture, se manifeste d'une manière qui permet d'ouvrir encore d'autres dimensions.

Et puis l'autre facteur a été que dans le groupe IREM dont je fais partie, qui est le groupe « Mathématiques et Philosophie », des participants ont voulu écrire et n'avaient pas d'endroit où écrire. Au début je me suis dit : « Je vais essayer de voir ce qui se passe au niveau des brochures ». Je savais que très très peu de brochures s'éditaient et que c'était pour ainsi dire passé de mode et puis un jour j'ai eu cet éclair de génie de penser à la revue *Mathématiques vivantes* et de me dire : « La solution la plus simple, c'est celle-ci ».

J'ai fait un appel à participation, j'espérais en fait recruter des gens dans tous les groupes IREM, c'était ça un petit peu mon idée, finalement j'ai eu assez peu de succès, il y avait François Pétiard et Francine Athias qui ont tout de suite répondu présent, il y avait Anne-Marie Aebischer qui était tentée mais qui finalement n'a pas voulu. Et puis après, le seul travail de recherche que j'ai fait en plus, c'est de trouver des collègues du secondaire. et là je me suis souvenu d'une ancienne étudiante, Nathalie Koehl, dont je savais qu'elle s'intéressait aussi à la littérature, au côté littéraire de la chose, à l'écriture : je l'ai contactée et elle était prête aussitôt à participer.

Pour le fonctionnement de *Mathématiques vivantes*, il y avait une chose qui me tenait à cœur, c'est d'abord de faire quelque chose qui soit très très léger au niveau financier, voire à coût zéro, au début j'avais pensé à lui donner l'aspect d'un fanzine tiré à la photocopieuse plus une présence sur internet. Aujourd'hui c'est aussi le moment où la présence sur internet des revues s'est institutionnalisée ; il y a maintenant beaucoup de sites qui hébergent des revues qui sont accessibles gratuitement. Il y a eu une petite déconvenue, j'espérais voir notre revue accueillie par un tel site qui s'appelle le centre Mersenne. Ça a presque marché et puis à la fin les gens se sont rendu compte que notre proposition était trop différente des *Comptes rendus de l'académie des sciences*, des *Annales de l'institut Fourier*, d'autres revues de ce genre-là. Il y a une forme de peur du contact entre les revues qui se prennent très au sérieux, qui sont très scientifiques, et puis une revue comme la nôtre qui cherche justement à ne pas trop se prendre au sérieux, parce qu'on ne veut pas faire sentir de ticket d'entrée (ou de prix d'entrée) pour les auteurs potentiels.

M. H. Il y a des IREM qui ont eu des revues remarquables, l'IREM de Strasbourg notamment, l'IREM de Lyon aussi, à Dijon ils ont eu la *Feuille de vigne*, il y a quand même eu des IREM où ça a perduré. À Besançon ça c'est arrêté…

F. P. … en 2006. Il n'y avait plus beaucoup d'articles. Le numéro 72 putatif en 2006, je l'ai encore sur ma machine, je te le ferai parvenir, il n'y avait plus rien, quoi. Je n'avais absolument pas le temps d'aller à la pêche aux articles. J'attendais que les articles viennent, il faut être honnête. Je ne sais pas comment pour toi ça se passait ?

H. L. Oui, oui, il n'y avait pas de problème, il y en avait !

M. H. Il me semble que chaque groupe IREM était quand même un petit peu poussé à donner des choses. Je me suis un moment un petit peu occupé du groupe « Collège ». Le problème c'était d'arriver à faire écrire. On avait une petite pression quand même pour sortir des articles. Quand on a créé le groupe « Probabilités », là aussi, on a…

La relecture des articles

S. N. L'autre chose qui me tenait beaucoup à cœur, c'est de faire de manière très sérieuse la relecture des articles. Un petit peu comme le disait Henri tout-à-l'heure, l'idée est qu'un article est d'emblée accepté, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de volonté de rejeter un article, il n'est même pas question de réfléchir si un article doit être rejeté ou pas, mais par contre d'avoir plusieurs relecteurs ; pour le moment on a une formule avec trois relecteurs, pour que l'article soit vraiment éprouvé par la lecture de ces personnes-là, qui réagissent, qu'il y ait une forme aussi d'accueil du texte écrit par quelqu'un qui après produit un effet que je ne cherche pas à calculer.

F. P. C'est un travail d'édition en fait !

M. H. Contrairement au système universitaire, scientifique, est-ce que ça ne serait pas : « tous relecteurs ! », c'est-à-dire, tout animateur IREM est potentiellement un relecteur ?

H. L. Pour un article, vous cherchez trois relecteurs. C'est pas toujours les mêmes.

S. N. L'idée c'est que c'est jamais les mêmes. Pour le moment tous les articles ont aussi été relus par François et par moi. Je fais une relecture de pure forme. Pour toi, je ne sais pas exactement ?

F. P. Ça dépend des articles aussi. L'article sur le cercle des neuf points, j'ai un peu regardé. En même temps que tu saisis les formules en LaTeX, ça gamberge ! C'est une relecture un peu technique, mais aussi de français, de façon générale.

Un fanzine

S. N. Nous avons opté pour le format de fanzine, c'est-à-dire le format A5, pour qu'il puisse être tiré à la photocopieuse, agrafé.

M. H. Donc sur papier !

S. N. Quand nous avons voulu être accueillis par ce fameux centre Mersenne, nous avons été poussés à institutionnaliser notre démarche. Ça a fait que j'ai dû prendre contact avec plein d'interlocuteurs institutionnels, en particulier les presses universitaires de Franche-Comté. Il fallait qu'il y ait un éditeur derrière. La revue est officiellement éditée par les presses universitaires de Franche-Comté et elle est officiellement imprimée par un imprimeur en quelques exemplaires au prix de vente de cinq euros.

F. P. Ce sera principalement une diffusion numérique.

M. H. Même dans l'édition, ils en impriment vingt et puis après ils en impriment à la demande.

S. N. Finalement j'en suis assez content, que la revue papier existe aussi, même si au début l'idée c'était vraiment de faire quelque chose sans engagement financier de la part de l'IREM, simplement parce que l'IREM n'a pas d'argent.

Garder une forme de liberté de ton

S. N. J'ai eu un petit peu une sensation d'être entre deux feux, parce que d'un côté je raconte comment je me suis comporté vis-à-vis de ces interlocuteurs comme le centre Mersenne, et puis par ailleurs, en parlant avec les gens de l'IREM, en particulier avec Henri, j'ai eu aussi une pression de ne pas trop me prendre au sérieux, de continuer à garder une forme de liberté de ton, de plaisir et de simplement laisser la vie se faire, laisser les mathématiques vivre sans exigences auxquelles on donne des noms divers et variés aujourd'hui comme l'excellence, la scientificité…

M. H. Si on a tant d'animateurs qui font ça bénévolement, quasiment tous, c'est parce que ça leur plait, sinon ils ne seraient pas là.

S. N. Ça fait que ces documents que les institutions m'ont demandé, je les ai remplis avec cette liberté de ton-là, c'est-à-dire que je n'ai pas fait de compromis… j'ai fait le compromis sur le fait que j'ai précisé exactement comment les différents processus éditoriaux ont lieu, mais je les ai précisés sous une forme qui était très libre et très différente de l'usage académique, et c'est sans doute là où ça a coincé, où ça a grincé ! et puis c'est bien comme ça.

Alors, est-ce que là, ce que je raconte, ce qui résulte de toutes nos discussions à quatre dans ce comité éditorial, ça colle avec l'histoire de *Mathématiques vivantes*, vous voyez une forme de continuité, ou vous voyez plutôt un projet d'une forme différente, d'une nature différente ?

H. L. Il faut expérimenter et je ne serais pas étonné que ça marche, voilà ! C'est une histoire d'état d'esprit en fait. Il y a quand même pas mal d'animateurs, s'ils sentent que c'est très ouvert, ça peut marcher. Ils ont eu sans doute l'impression que c'était très difficile d'avoir une brochure d'acceptée, ça les a un peu découragés.

M. H. Ça me rappelle les collègues disant : « Moi, si tu veux un article pour *Mathématiques vivantes*, je le fais, mais surtout pas pour *Repères*, ce n'est pas de mon niveau ! »

H. L. Et puis *Repères* a rejeté des articles qu'il n'aurait pas dû rejeter à mon avis, ça a fait de la mauvaise publicité !

À l'occasion de la relance de ce bulletin de liaison de l'IREM, nous reproduisons l'éditorial du premier numéro, paru en novembre 1978, qui montre que les raisons d'être de cette revue restent inchangées.

POURQUOI UN BULLETIN DE LIAISON DE L'I.R.E.M. DE BESANCON ?

Alors que les activités de l'I.R.E.M. sont désormais nombreuses, variées et, je crois que nous pouvons le dire, bien rodées, la publication périodique d'un bulletin de liaison est apparue comme une évidente nécessité, ne serait-ce que pour informer nos collègues de ce qui se fait à l'I.R.E.M.

Le travail, à l'intérieur de chacun de nos stages, serait, en effet, assez vain s'il ne profitait pas à tous nos collègues, stagiaires ou non de l'I.R.E.M., et si ceux-ci n'avaient pas la possibilité de faire part de leurs critiques.

Ce bulletin ne veut donc pas être une tribune réservée à nos seuls stagiaires et animateurs, mais, au contraire, un moyen de dialogue et d'échanges avec tous les professeurs sur l'enseignement des mathématiques et ses liaisons avec les autres disciplines, qu'il s'agisse de culture mathématique ou qu'il s'agisse de la pratique enseignante quotidienne.

Pour ce qui concerne la culture mathématique, nous entendons nous préoccuper essentiellement de questions présentant un intérêt réel, quitte à sacrifier l'originalité. Il est en effet certain que bien des choses connues de beaucoup ne le sont pas de tous et, le cas échéant, nous n'hésiterons pas à publier des petits exposés ou des exercices "bien connus", comme on dit parfois, peut-être un peu hâtivement. C'est ainsi que, par exemple, l'on trouvera plus loin un article sur l'algorithme du calcul de la racine carrée.

Mais la culture mathématique, c'est aussi (et surtout ?), la pratique des problèmes. Nous leur consacrerons donc régulièrement une rubrique, inaugurée dès ce premier numéro.

La pratique enseignante, source inépuisable de recherche, est l'objet des travaux de la plupart des groupes de l'I.R.E.M. Ils seront, bien entendu, présentés dans ce bulletin, dans l'espoir, d'une part d'une mise en application par un certain nombre de nos collègues et, d'autre part, d'une analyse critique qui, dans un tel domaine, ne peut qu'être fructueuse. On trouvera, par exemple, dans ce numéro une présentation d'un fascicule de fiches pour la classe de cinquième réalisé dans le stage C1, ainsi qu'une relation d'utilisation pédagogique de films effectuée par les responsables des stages audio-visuels.

Mais, et il s'en faut de beaucoup, l'I.R.E.M. n'a pas l'exclusivité de l'activité pédagogique, et nous voudrions aussi que nos collègues soient nombreux à nous présenter leurs réalisations personnelles ou leurs "trucs de métier".

Puisqu'avec ce bulletin nous entendons transmettre l'information, nous publierons, lorsque l'occasion se présentera, des documents officiels importants ; il en est ainsi, par exemple, des programmes de quatrième et de troisième que l'on trouvera plus loin. Nous indiquerons également la liste des publications (livres ou revues) reçues à l'I.R.E.M. Ces documents sont à la disposition de tous, soit pour une consultation sur place, soit pour un emprunt.

Tenter d'élargir l'action de l'I.R.E.M., voilà donc quel est l'objectif que nous nous sommes fixés avec la publication de ce bulletin. Ce n'est certes pas avec ce premier numéro qu'il sera atteint, mais nous attendons et nous espérons les remarques, critiques et suggestions qui nous permettront de faire mieux dans la suite.

Jean-Claude FONTAINE
Directeur de l'I.R.E.M.

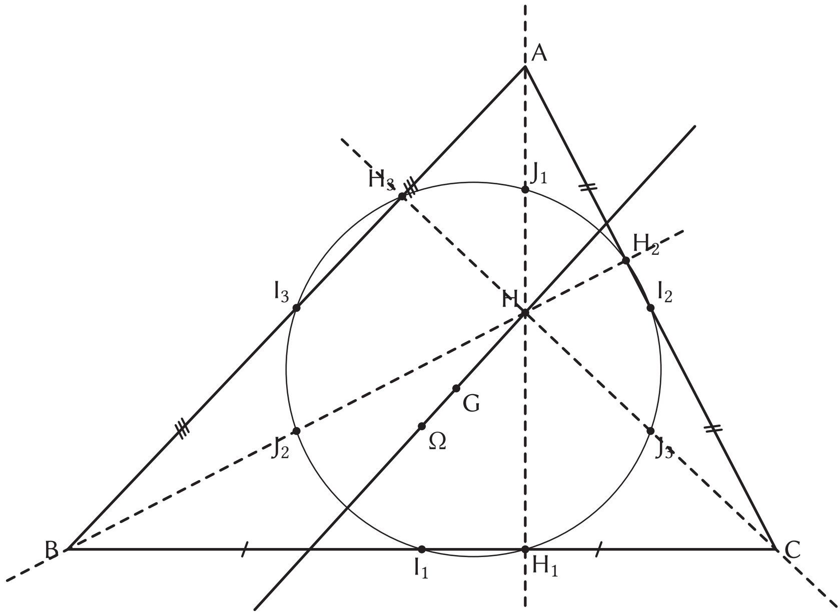
Pour toute correspondance concernant ce bulletin, s'adresser à :

I.R.E.M. de BESANCON
Faculté des Sciences et des Techniques
Route de Gray
25030 BESANCON CEDEX
Tél. : (81) 80 - 65 - 01
ou : (81) 81 - 80 - 08 poste 389

o
o o

Cercle d'Euler et de Feuerbach

François Netillard



Sommaire

Introduction

Le célèbre cercle des neuf points, plus connu en France sous le nom de cercle d'Euler, a fait l'objet de nombreuses recherches, démonstrations et découvertes. Le document que vous vous apprêtez à lire se veut accessible à un public d'élèves en fin de Lycée avec une spécialité Mathématiques, à des étudiants suivant un cursus scientifique ou à des enseignants qui veulent approfondir leurs connaissances en géométrie et plus particulièrement sur ce cercle.

L'histoire a retenu, semble-t-il à tort, le nom de cercle d'Euler car aucun document écrit par ce grand mathématicien ne permet de dire qu'on peut l'associer au cercle portant son nom. Cependant, le centre du cercle est sur une droite particulière qu'on associe également à Euler et qui, elle, est bien le fruit d'un de ses nombreux travaux ! Il semble donc indispensable de parler du cercle « et » de la droite d'Euler dans cet ouvrage.

Concernant le nom du cercle, on aurait très bien pu associer les noms des français C. Brianchon et J.-V. Poncelet ou le nom de l'allemand K. Feuerbach pour les résultats qu'ils ont obtenus concernant l'association entre le cercle et les neuf poins remarquables qui lui sont associés. Nos voisins allemands n'ont d'ailleurs pas hésité à le nommer « cercle de Feuerbach ». Cette question concernant la paternité mathématique du cercle des neuf points, ainsi que l'intérêt porté au travers de l'histoire pour lui nous motivent à nous plonger dans des démonstrations historiques et modernes des mathématiciens nommés précédemment ainsi que d'autres plus ou moins connus.

Le premier chapitre est consacré à des rappels et notions, parfois nouvelles, peut-être, pour le lecteur qui se veulent indispensables à la compréhension de démonstrations centrales de cet ouvrage.

Dans le second chapitre, nous verrons des démonstrations modernes des propriétés associées à la droite et surtout au cercle d'Euler. La dernière démonstration de ce chapitre, consacrée au théorème de Feuerbach, pourra éventuellement faire le bonheur des candidats aux concours de l'agrégation interne et de l'agrégation externe en quête d'un point de développement inédit, ou encore d'enseignants en quête de belles applications géométriques pour leur cours ou pour un devoir en temps libre.

Le troisième et dernier chapitre, quant à lui, traitera de nombreuses démonstrations et commentaires historiques liés au cercle d'Euler. Cette partie nous fera découvrir la façon dont ces joyaux du passé ont été abordés à leur origine.

1. Rappels

Ce chapitre aborde des définitions et propriétés nécessaires à la compréhension de certaines démonstrations modernes données dans le chapitre suivant, et plus particulièrement à celles relatives au théorème de Feuerbach.

On se place dans un plan affine euclidien noté $\mathscr{E}_2$, muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le plan $\mathscr{E}_2$ pourra être identifié au plan complexe $\mathbb{C}$.

On suppose connues les notions de mesure algébrique et de produit scalaire.

1.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle

On désigne par $(\mathscr{C}_{\Omega,R})$ un cercle de centre Ω et de rayon R $(\geqslant 0)$.

Propriété 1.1. *Soit* M *un point de* $\mathscr{E}_2$. *Si on note* A *et* B *les points d'intersection d'une droite passant par* M *(qui coupe* $(\mathscr{C}_{\Omega,R})$ *en deux points distincts) et de* $(\mathscr{C}_{\Omega,R})$*, alors :*

$$\overline{\mathrm{MA}} \cdot \overline{\mathrm{MB}} = \Omega\mathrm{M}^2 - R^2.$$

Démonstration

On note A' le point de $(\mathscr{C}_{\Omega,R})$ diamétralement opposé à A.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{MA}} \cdot \overline{\mathrm{MB}} &= \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{MA}'} + \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}}) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MA}'} \\
&= (\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega} + \overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega} - \overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}).
\end{aligned}$$

Donc $\overline{\mathrm{MA}} \cdot \overline{\mathrm{MB}} = \Omega\mathrm{M}^2 - R^2$.

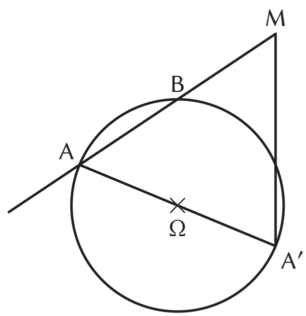


FIGURE 1.1 – *Puissance d'un point par rapport à un cercle.*

Définition 1.2. *On appelle* ***puissance de*** M*, point du plan* $\mathscr{E}_2$*,* ***par rapport au cercle*** $(\mathscr{C}_{\Omega,R})$ *le réel*

$$\mathcal{P}(\mathrm{M}) = \overline{\mathrm{MA}} \cdot \overline{\mathrm{MB}}$$

où A *et* B *sont deux points distincts de* $(\mathscr{C}_{\Omega,R})$ *tels que* $\mathrm{M} \in (\mathrm{AB})$.
Ainsi : $\mathcal{P}(\mathrm{M}) = \Omega\mathrm{M}^2 - R^2$.

Remarque

On constate que $\mathcal{P}(\mathrm{M}) > 0$ lorsque M est extérieur au disque dont la frontière est $(\mathscr{C}_{\Omega,R})$.

Propriété 1.3.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{E}_2$ *extérieur au disque dont la frontière est* $(\mathscr{C}_{\Omega,R})$, *et* T, T′ *les points de contact des tangentes à* $(\mathscr{C})$ *issues de* M.
Alors $\mathcal{P}(\mathrm{M}) = \mathrm{MT}^2 = \mathrm{MT'}^2$.

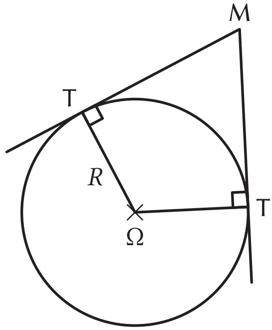


FIGURE 1.2 – *Tangentes.*

Démonstration

On applique le théorème de Pythagore aux triangles MTΩ et MT′Ω rectangles, respectivement, en T et en T′. Ainsi, on obtient :

$$\Omega\mathrm{M}^2 = \mathrm{MT}^2 + \Omega\mathrm{T}^2 = \mathrm{MT'}^2 + \Omega\mathrm{T'}^2.$$

Propriété 1.4. *Soit* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D} \in \mathscr{E}_2$ *quatre points, trois à trois non alignés et tels que* (AB) *ne soit pas parallèle à* (CD). *On nomme* M *le point d'intersection de* (AB) *et* (CD).
A, B, C *et* D *sont cocycliques si et seulement si* $\overline{\mathrm{MA}} \cdot \overline{\mathrm{MB}} = \overline{\mathrm{MC}} \cdot \overline{\mathrm{MD}}$.

Démonstration

- Si A, B, C et D sont cocycliques, alors $\overline{\mathrm{MA}} \cdot \overline{\mathrm{MB}} = \mathcal{P}(\mathrm{M}) = \overline{\mathrm{MC}} \cdot \overline{\mathrm{MD}}$.
- Réciproquement, supposons $\overline{\mathrm{MA}} \cdot \overline{\mathrm{MB}} = \overline{\mathrm{MC}} \cdot \overline{\mathrm{MD}}$. Notons D′ le point d'intersection de (MC) et du cercle circonscrit à ABC.
  Pour le cercle circonscrit à ABC : $\overline{\mathrm{MC}} \cdot \overline{\mathrm{MD}} = \overline{\mathrm{MA}} \cdot \overline{\mathrm{MB}} = \mathcal{P}(\mathrm{M}) = \overline{\mathrm{MC}} \cdot \overline{\mathrm{MD'}}$.
  Or $\mathrm{M} \neq \mathrm{C}$. Donc $\mathrm{D'} = \mathrm{D}$.

Définition 1.5. *L'axe radical de deux cercles de centres distincts est l'ensemble des points ayant la même puissance par rapport à ces deux cercles.*

Propriété 1.6. *L'axe radical de deux cercles de centres distincts est une droite perpendiculaire à la droite passant par les centres des cercles.*

Démonstration

On note O et O′ les centres des deux cercles, et R et R' leurs rayons respectifs.

L'ensemble des points M de même puissance par rapport aux deux cercles vérifie $\mathrm{MO}^2 - R^2 = \mathrm{MO}'^2 - R'^2$ ou encore $\mathrm{MO}^2 - \mathrm{MO}'^2 = R^2 - R'^2$.

Le second membre de l'égalité est constant. Notons-le k.

Ainsi : $(\overrightarrow{\mathrm{MO}} - \overrightarrow{\mathrm{MO'}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{MO'}}) = k$.

Soit I le milieu de [OO′] et H le projeté orthogonal de M sur (OO′).

On déduit de l'égalité précédente :

$$\overrightarrow{\mathrm{O'O}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{MH}} + \overrightarrow{\mathrm{HI}} + \overrightarrow{\mathrm{IO}} + \overrightarrow{\mathrm{MH}} + \overrightarrow{\mathrm{HI}} + \overrightarrow{\mathrm{IO'}}) = k.$$

Comme I est le milieu de [OO′] et que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O'O}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MH}}$ sont orthogonaux, on obtient finalement, en sachant que les points O, I, H et O′ sont alignés, l'égalité suivante :

$$2\overrightarrow{\mathrm{O'O}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HI}} = 2\overline{\mathrm{O'O}} \cdot \overline{\mathrm{HI}} = k.$$

Donc $\overline{\mathrm{HI}} = \dfrac{k}{2\overline{\mathrm{O'O}}}$, et on en déduit alors que H est fixe.

L'ensemble des points M ayant la même puissance par rapport aux deux cercles est donc une droite perpendiculaire à (OO′).

Corollaire 1.7. *Pour deux cercles sécants, l'axe radical est la droite passant par les points d'intersection des cercles.*

Pour deux cercles tangents, l'axe radical est la tangente commune aux cercles.

Démonstration

Pour deux cercles sécants, les deux points d'intersection ont une puissance nulle par rapport à chacun des cercles et appartiennent donc à l'axe radical.

Pour deux cercles tangents, la tangente commune à ces cercles est perpendiculaire à la droite passant par les centres de ces cercles. Ainsi, cette tangente est parallèle à l'axe radical des cercles. Par ailleurs, le point de contact appartient à l'axe radical puisqu'il est de puissance nulle par rapport à chacun des cercles. On en déduit ainsi que l'axe radical de deux cercles tangents est la tangente commune aux deux cercles.

Corollaire 1.8. *Les axes radicaux de trois cercles, notés $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, de centres respectifs* O_1, O_2, O_3 *non alignés concourent en un point.*

Démonstration

Soit (d_1) l'axe radical de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, (d_2) l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$, et (d_3) l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Comme les trois centres des cercles ne sont pas alignés, les axes radicaux (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

Soit I le point d'intersection de (d_1) et (d_2).

I appartient à (d_1). Donc la puissance de I par rapport à $\mathscr{C}_2$ et la puissance de I par rapport à $\mathscr{C}_3$ sont égales.

I appartient à (d_2). Donc la puissance de I par rapport à $\mathscr{C}_1$ et la puissance de I par rapport à $\mathscr{C}_3$ sont égales.

On en déduit que la puissance de I par rapport à $\mathscr{C}_1$ et la puissance de I par rapport à $\mathscr{C}_2$ sont égales. Donc I appartient à (d_3).

Ainsi, les trois axes (d_1), (d_2) et (d_3) sont concourants en I.

Définition 1.9. *Le point d'intersection des axes radicaux de trois cercles de centres non alignés est appelé centre radical des trois cercles.*

1.2 Inversion plane

Définition 1.10. *Soit* $\mathrm{O} \in \mathscr{E}_2$ *et* $k \in \mathbb{R}_+^*$. *On appelle* ***inversion de pôle*** *(ou* ***centre****)* O *et* ***de rapport k****, l'application :*

$$I_{\mathrm{O},k} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{E}_2 \setminus \{\mathrm{O}\} & \longrightarrow & \mathscr{E}_2 \setminus \{\mathrm{O}\} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}' \end{array} \right.$$

telle que $\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = \dfrac{k}{\mathrm{OM}^2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

Propriété 1.11 (évidente). $I_{\mathrm{O},k}$ *est une involution de* $\mathscr{E}_2 \setminus \{\mathrm{O}\}$*, c'est-à-dire que* $I_{\mathrm{O},k} \circ I_{\mathrm{O},k}$ *est l'application identité.*

Propriété 1.12. *On considère le centre* O *de l'inversion* $I_{\mathrm{O},k}$ *comme origine du repère orthonormé.*

Pour tout $\mathrm{M}(x,y)$ *de* $\mathscr{E}_2 \setminus \{\mathrm{O}\}$, $I_{\mathrm{O},k}(\mathrm{M})$ *a pour coordonnées* $\left(\dfrac{kx}{x^2+y^2}, \dfrac{ky}{x^2+y^2}\right)$.

Démonstration

En notant $\mathrm{M}(x,y)$ et $\mathrm{M}'(x',y')$, avec $\mathrm{M}' = I_{\mathrm{O},k}(\mathrm{M})$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, et :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}'} = k \iff \lambda x^2 + \lambda y^2 = k \iff \lambda = \frac{k}{x^2+y^2}$$

d'où : $x' = \dfrac{kx}{x^2+y^2}$, $y' = \dfrac{ky}{x^2+y^2}$.

Propriété 1.13. *L'ensemble des points de $\mathscr{E}_2 \setminus \{\mathrm{O}\}$ invariants par $\mathrm{I}_{\mathrm{O},k}$ est le cercle de centre* O *et de rayon $\sqrt{k}$, appelé* **cercle d'inversion** *de $\mathrm{I}_{\mathrm{O},k}$.*

Démonstration

On a, pour tout M de $\mathscr{E}_2 \setminus \{O\}$:

$$I_{\mathrm{O},k}(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \iff \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{k}{\mathrm{OM}^2}\overrightarrow{\mathrm{OM}} \iff k = \mathrm{OM}^2.$$

Propriété 1.14. *L'image par $\mathrm{I}_{\mathrm{O},k}$ d'un cercle passant par* O *(et privé de* O*) est une droite ne passant pas par* O*, et celle d'un cercle ne passant pas par* O *est un cercle ne passant pas par* O*.*

Démonstration

$I_{\mathrm{O},k}$ est involutive donc est bijective.

On considère le centre O de l'inversion $I_{\mathrm{O},k}$ comme origine du repère.

Soit $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Alors, pour $\mathrm{M}(x, y)$, distinct de O, un point de $I_{\mathrm{O},k}(\mathscr{C})$, $I_{\mathrm{O},k}(\mathrm{M})$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{kx}{x^2+y^2}, \dfrac{ky}{x^2+y^2}\right)$ d'après la propriété 1.12 et appartient à $\mathscr{C}$ ($I_{\mathrm{O},k}$ est une involution).

On en déduit alors que le couple (x, y) vérifie :

$$\left(\frac{kx}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{ky}{x^2+y^2}\right)^2 + 2a\frac{kx}{x^2+y^2} + 2b\frac{ky}{x^2+y^2} + c = 0,$$

ce qui revient, après simplification par $x^2 + y^2$ $(\neq 0)$ à :

$$c(x^2 + y^2) + 2akx + 2bky + k^2 = 0.$$

Si $c = 0$ (c'est-à-dire si $\mathrm{O} \in \mathscr{C}$), alors $I_{\mathrm{O},k}(\mathscr{C})$ est une droite ne passant pas par O.

Si $c \neq 0$ (c'est-à-dire si $\mathrm{O} \notin \mathscr{C}$), alors $I_{\mathrm{O},k}(\mathscr{C})$ est un cercle ne passant pas par O.

1.3 Cercles orthogonaux

Définition 1.15. *Deux cercles sécants dans un plan sont dits orthogonaux si et seulement si, en chacun des deux points d'intersection, les tangentes à l'un et à l'autre cercle sont orthogonales.*

Remarque : par raison de symétrie, il suffit de vérifier qu'on a l'orthogonalité en un seul des points d'intersection.

Propriété 1.16. *Pour une inversion $I_{\mathrm{O},k}$ de centre* O *et de rapport* k*, un cercle orthogonal au cercle d'inversion est globalement invariant.*

Démonstration

Soit M un point d'un cercle $(\mathscr{C})$ orthogonal au cercle d'inversion. Si M n'est pas sur le cercle d'inversion, alors on note M′ le second point d'intersection de la droite (OM) avec le cercle $(\mathscr{C})$. Donc, d'après la propriété 1.3 :

$$\overline{\mathrm{OM}} \cdot \overline{\mathrm{OM'}} = \sqrt{k}^2 = k.$$

Et on en déduit que M′ est l'image de M par l'inversion $I_{\mathrm{O},k}$ considérée.

1.4 Division harmonique

La division harmonique, suite à l'avènement des mathématiques modernes au début des années 1970, fut supprimée des programmes de l'enseignement secondaire. On l'étudiait alors dès la Seconde en prévision de l'étude des sections coniques. Les sections coniques, étudiées analytiquement en Terminale C (puis S) en tant que courbes du second degré, ont également disparu des programmes actuels.

Définition 1.17. *On dit que deux points* C *et* D *sont conjugués harmoniques par rapport aux points* A *et* B *si et seulement s'ils sont tous alignés et vérifient une des relations suivantes :*

1. $\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} = \dfrac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}}$ *et l'un des points appartient au segment* [AB]*, tandis que l'autre lui est extérieur ;*
2. $\dfrac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{CB}}} = -\dfrac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{DB}}}$ *;*
3. $\overline{\mathrm{AC}}.\overline{\mathrm{BD}} + \overline{\mathrm{AD}}.\overline{\mathrm{BC}} = 0$ *;*
4. $\dfrac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{CB}}} : \dfrac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{DB}}} = -1.$

On dit aussi que C *et* D *divisent harmoniquement le segment* [AB].

Propriété 1.18. *Soit a, b, c, d les abscisses des quatre points* A, B, C, D *d'une division harmonique d'un axe* $(\mathrm{O}x)$ *gradué.*

Alors $(a+b)(c+d) = 2(ab+cd)$.

De plus, si l'origine est en I*, milieu de* [AB]*, alors*

$$\overline{\mathrm{IA}}^2 = \overline{\mathrm{IB}}^2 = \overline{\mathrm{IC}} \cdot \overline{\mathrm{ID}}.$$

Démonstration
La relation $\overline{\mathsf{AC}} \cdot \overline{\mathsf{BD}} + \overline{\mathsf{AD}} \cdot \overline{\mathsf{BC}} = 0$ s'écrit :

$$(c-a)(d-b) + (d-a)(c-b) = 0,$$

ou :

$$2(ab+cd) = ac + ad + bc + bd = (a+b)(c+d).$$

Ainsi, on a

$$(*) \qquad (a+b)(c+d) = 2(ab+cd).$$

Par ailleurs, si l'origine est en I, milieu de [AB], on a :

$$b = \overline{\mathsf{IB}} = -\overline{\mathsf{IA}} = -a; \quad c = \overline{\mathsf{IC}} \text{ et } d = \overline{\mathsf{ID}}.$$

La relation (∗) devient :

$$0 = 2(-a^2 + cd), \text{ soit } a^2 = b^2 = cd.$$

Donc $\overline{\mathsf{IA}}^2 = \overline{\mathsf{IB}}^2 = \overline{\mathsf{IC}} \cdot \overline{\mathsf{ID}}$.

Propriété 1.19. *Si les points* C *et* D *sont conjugués harmoniques par rapport à* A *et* B, *alors les points* A *et* B *sont conjugués harmoniques par rapport à* C *et* D.

Démonstration
La relation $\dfrac{\overline{\mathsf{CA}}}{\overline{\mathsf{CB}}} = -\dfrac{\overline{\mathsf{DA}}}{\overline{\mathsf{DB}}}$ entraîne $\dfrac{\overline{\mathsf{AC}}}{\overline{\mathsf{AD}}} = -\dfrac{\overline{\mathsf{BC}}}{\overline{\mathsf{BD}}}$.

Propriété 1.20 (voir la figure ci-dessous). *Les pieds des bissectrices intérieure et extérieure issues de* A *du triangle* ABC *sont conjugués harmoniques par rapport aux points* B *et* C.

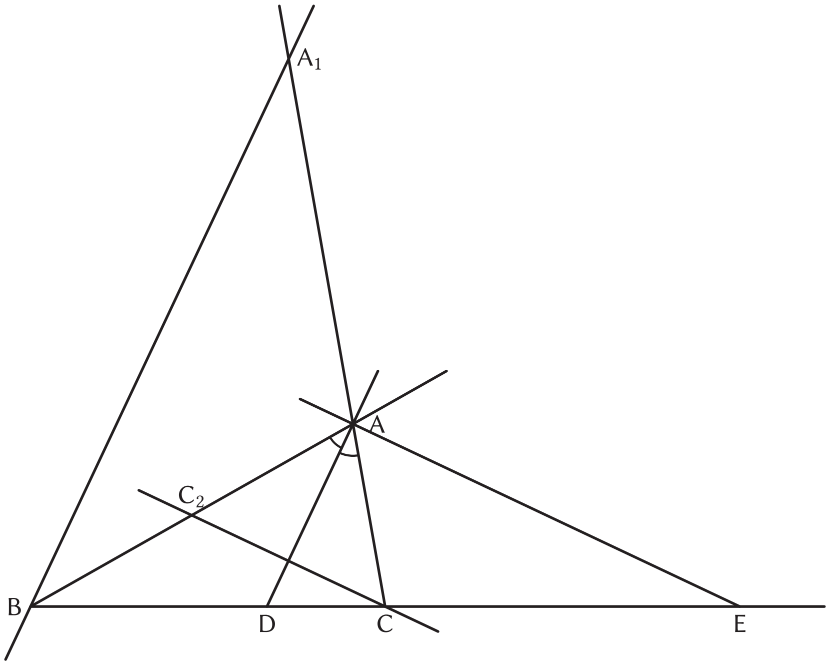


FIGURE 1.3 – *Division harmonique.*

Démonstration

On pose AB = c, AC = b et BC = a.

En comparant les angles $\widehat{ABA_1}$ et $\widehat{BA_1A}$ à $\widehat{DAC}$, puisque (AD) // (BA_1), on constate qu'ils sont égaux, de par les propriétés des angles alternes-internes et correspondants.

ABA_1 est donc isocèle en A, et $AA_1 = AB = c$.

En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle BCA_1, on trouve :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AA_1}{AC} = \frac{c}{b}.$$

De même, ACC_2 est isocèle en A, et $AC_2 = AC = b$.

En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle BAE, on trouve :

$$\frac{AC_2}{AB} = \frac{EC}{EB} = \frac{b}{c}.$$

On conclut ainsi que $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{EB}{EC}$.

1.5 Droites antiparallèles

Définition 1.21. *Deux couples de droites* (D, D') *et* (Δ, Δ') *sont antiparallèles si et seulement si les angles de droites* $\widehat{(D, \Delta)}$ *et* $\widehat{(\Delta', D')}$ *sont égaux* $\mod \pi$.
On dit aussi que D' *est antiparallèle à* D *par rapport aux droites* Δ *et* Δ'.

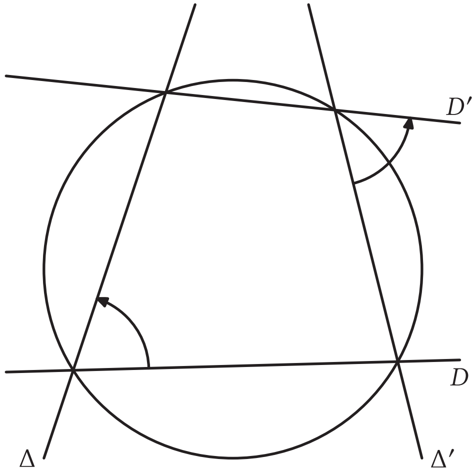


Figure 1.4 – *Droites antiparallèles (1).*

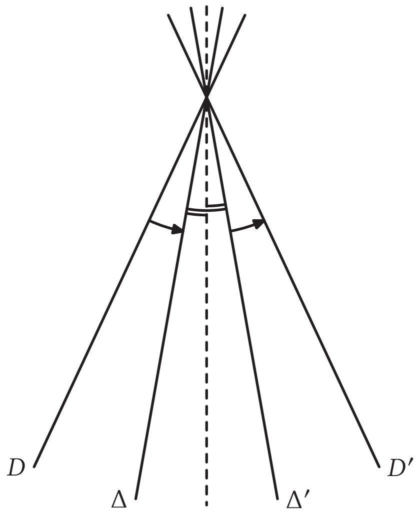


Figure 1.5 – *Droites antiparallèles (2).*

Définition 1.22. *Un quadrangle est la figure formée par quatre points* A, B, C, D *tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés : ce sont les sommets du quadrangle.*

Les six droites joignant ces points deux à deux sont les côtés du quadrangle.

Définition 1.23. *Un quadrangle est dit inscriptible si et seulement si ses quatre sommets sont sur un même cercle.*

On rappelle la propriété suivante qui est un corollaire du théorème de l'angle inscrit :

Propriété 1.24. *Soit* A, B, C, D *quatre points distincts du plan.*

Alors A, B, C *et* D *sont cocycliques ou alignés si et seulement si on a l'égalité d'angles orientés :*

$$(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}) = (\overrightarrow{\mathrm{DA}}, \overrightarrow{\mathrm{DB}}) \bmod \pi.$$

Corollaire 1.25. *Pour que deux couples de côtés opposés d'un quadrangle* ABCD *soient antiparallèles, il faut et il suffit que ce quadrangle soit inscriptible.*

Démonstration

Pour que (AB) et (CD) soient antiparallèles par rapport à (AD) et (BC), il faut et il suffit que $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = (\overrightarrow{\mathrm{CB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}) \bmod \pi$, c'est-à-dire que le quadrangle soit inscriptible, d'après la propriété précédente.

Propriété 1.26. *Pour que deux couples de droites sécantes* (D, D') *et* (Δ, Δ') *soient antiparallèles, il faut et il suffit que les bissectrices des angles* $\widehat{(D, D')}$ *et* $\widehat{(\Delta, \Delta')}$ *aient même direction, autrement dit qu'elles soient parallèles.*

Démonstration

Si (D, D') et (Δ, Δ') sont antiparallèles, alors on a la relation :

$$\widehat{(D, \Delta)} = \widehat{(\Delta', D')} \bmod \pi. \tag{1.1}$$

Et, si $(\mathrm{O}u)$ est la direction d'une bissectrice de l'angle $\widehat{(D, D')}$, alors on a la relation :

$$(\widehat{D, (\mathrm{O}u)}) = (\widehat{(\mathrm{O}u), D'}) \bmod \pi. \tag{1.2}$$

Par différence, cela entraîne :

$$(\widehat{D, (\mathrm{O}u)}) = (\widehat{(\mathrm{O}u), \Delta'}) \bmod \pi. \tag{1.3}$$

Réciproquement, la relation (1.1) est conséquence des relations (1.2) et (1.3).

Propriété 1.27. *Soit un triangle* ABC.

Alors, en notant $(\mathrm{A}x)$ *la tangente au cercle circonscrit à* ABC *en* A, *les couples de droites* ((AB), (AC)) *et* $((\mathrm{BC}), (\mathrm{A}x))$ *sont antiparallèles.*

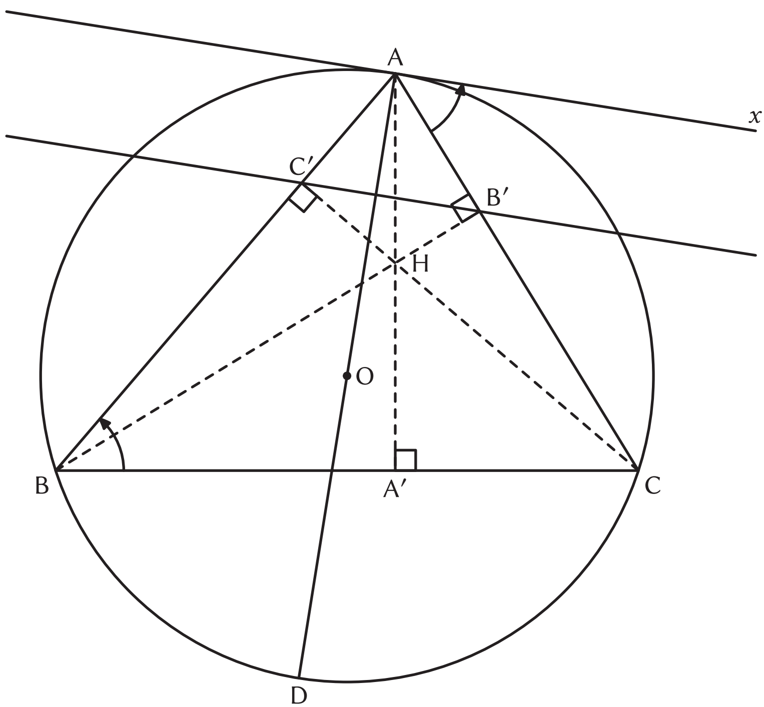


FIGURE 1.6 – *Tangente au cercle circonscrit et droites antiparallèles.*

Démonstration

On note A′, B′, C′ les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B, C.

$$(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C}) = (\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{C'C}) \bmod \pi \left(= \frac{\pi}{2} \bmod \pi\right).$$

Donc, d'après la propriété 1.24, le quadrangle BCB′C′ est inscriptible.

Ainsi, d'après le corollaire 1.25, les couples de droites ((AB), (AC)), ((BB′), (CC′)) et ((BC), (B′C′)) sont deux à deux antiparallèles.

Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Alors ADC est rectangle en C, et donc

$$\frac{\pi}{2} - \widehat{DAC} = \widehat{CDA} \bmod \pi.$$

Par ailleurs, d'après le théorème de l'angle inscrit :

$$\widehat{CDA} = \widehat{CBA} \bmod \pi.$$

On déduit alors du fait que $(\mathrm{A}x)$ et (AD) sont perpendiculaires la relation suivante :

$$\widehat{\mathrm{CA}x} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\mathrm{DAC}} \bmod \pi = \widehat{\mathrm{CDA}} \bmod \pi = \widehat{\mathrm{CBA}} \bmod \pi.$$

Cette dernière égalité ainsi que le fait que les couples de droites $((\mathrm{AB}), (\mathrm{AC}))$ et $((\mathrm{BC}), (\mathrm{B'C'}))$ sont antiparallèles nous permettent de conclure que $((\mathrm{AB}), (\mathrm{AC}))$ et $(\mathrm{BC}), (\mathrm{A}x))$ sont antiparallèles.

2. La droite et le cercle d'Euler

On se place dans $\mathscr{E}_2$. A, B et C sont trois points non alignés.
Nous adopterons les notations habituelles : dans le triangle ABC, les milieux des côtés [BC], [CA], [AB] sont respectivement A′, B′, C′, les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement I, J, K, le centre de gravité est G, l'orthocentre H et le centre du cercle circonscrit O.

2.1 La droite d'Euler

Soit ABC un triangle.

Propriété 2.1. *L'orthocentre* H *du triangle* ABC *vérifie :*

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Le barycentre G *du triangle* ABC *vérifie :*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

La démonstration qui suit est issue de [2].
Démonstration
Cherchons le point S tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
Il est unique de par sa définition qui permet d'écrire :
$\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ou encore $\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{OA'}$.
C'est-à-dire que (AS) est perpendiculaire à (BC) : c'est donc la hauteur issue de A. De même, (BS) et (CS) sont les hauteurs issues l'une de B, l'autre de C et le point S n'est autre que … l'orthocentre H du triangle !
H est donc l'unique point vérifiant :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

De plus, en tant qu'isobarycentre des sommets, G vérifie en particulier :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Propriété 2.2 (corollaire de 2.1). *Le centre du cercle circonscrit à* ABC*, le centre de gravité de* ABC *et l'orthocentre de* ABC *sont alignés.*

Définition 2.3. *Soit* ABC *un triangle non équilatéral. Dans ce cas, le centre* O *du cercle circonscrit à* ABC*, son centre de gravité* G *et son orthocentre sont distincts, et on appelle* ***droite d'Euler*** *la droite passant par ces trois points.*

Remarque

Il existe d'autres démonstrations permettant de justifier l'existence de cette droite. En particulier, vous trouverez dans plusieurs ouvrages ou sites internet l'utilisation de l'homothétie de centre G et de rapport -2 qui transforme les médiatrices de ABC en les hauteurs de ABC, et donc qui transforme O en H.

Attardons-nous plutôt sur une démonstration accessible au collège.

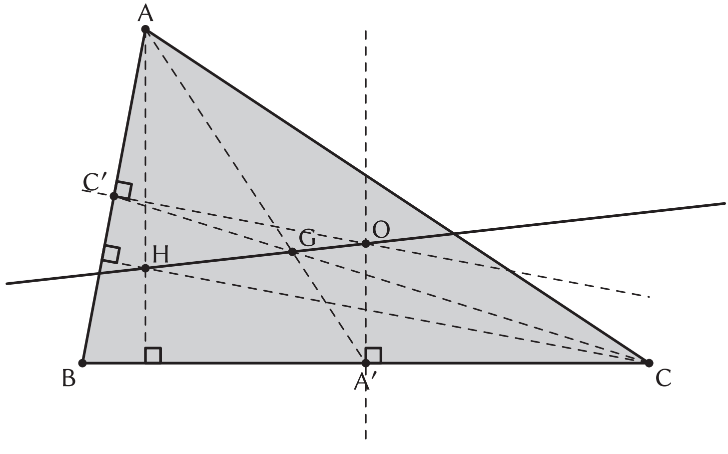


Figure 2.1 – *Droite d'Euler.*

Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à ABC, noté $\mathscr{C}$.

(AB) et (BD) sont perpendiculaires, puisque le triangle ABD est inscrit dans $\mathscr{C}$ et [AD] est un diamètre de ce cercle.

(AB) et (CH) sont perpendiculaires, puisque (CH) est une hauteur de ABC.

On en déduit ainsi que les droites (BH) et (CD) sont parallèles, étant toutes deux perpendiculaires à une même droite.

De façon similaire, on montre que (BH) et (DC) sont toutes deux perpendiculaires à (AC), et donc parallèles entre elles.

On peut ainsi conclure que BHCD, en tant que quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme. On en déduit alors que (AA′) est une médiane de ADH, et G est donc aussi le centre de gravité de ADH. Enfin, comme (HO) est une autre médiane de ADH, G appartient à cette droite.

2.2 Le cercle d'Euler ou cercle des « neuf points »

Soit ABC un triangle.

Propriété 2.4. *Les pieds des hauteurs, les milieux des côtés et les milieux des segments* [AH], [BH] *et* [CH] *sont cocycliques ; et le centre du cercle passant par ces points est le milieu de* [OH].

Pour la démonstration qui suit, nous nous sommes inspirés de [3].

Démonstration

Utilisons une homothétie pour démontrer la cocyclicité des neuf points.

Intéressons-nous tout d'abord aux milieux des côtés du triangle ABC.

Le centre de gravité G du triangle ABC étant situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet, l'homothétie $h_{\mathrm{G},\frac{-1}{2}}$ de centre G et de rapport $\dfrac{-1}{2}$ transforme chaque sommet en le milieu du côté opposé, donc le cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC en le cercle médian, $(\mathscr{C}')$, passant par les milieux des côtés et de rayon la moitié de celui de $(\mathscr{C})$.

Précisons le centre de $(\mathscr{C}')$: l'homothétie $h_{\mathrm{G},\frac{-1}{2}}$ transforme, en effet, les hauteurs du triangle ABC en ses médiatrices ; donc l'orthocentre H en le centre O du cercle circonscrit $(\mathscr{C})$. Le point O, lui, est transformé en O′, milieu de [OH] puisque $\overrightarrow{\mathrm{GO'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$, et $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ entraînent

$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} + \overrightarrow{\mathrm{GO'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}}.$$

Donc O′ est le centre du cercle $(\mathscr{C}')$, c'est-à-dire que le milieu de [OH] est le centre de $(\mathscr{C}')$.

Cela permet de dire que le centre de $(\mathscr{C}')$ appartient à la « droite d'Euler » !

Intéressons-nous maintenant aux pieds des hauteurs.

La projection orthogonale sur (BC) transforme H en I, pied de la hauteur issue de A, O en A′ milieu de [BC] et O′ en I′ milieu de [IA′]. O′ appartient donc à la médiatrice de [IA′] et O′I = O′A′. Les pieds des trois hauteurs sont donc, eux aussi, sur le cercle médian $(\mathscr{C}')$.

Intéressons-nous enfin aux milieux des segments [AH], [BH] et [CH].

Il existe une deuxième homothétie h', de rapport positif cette fois, qui transforme $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$: comme $\overrightarrow{\mathrm{HO}'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{HO}}$, h' a pour centre H. Elle transforme les sommets A, B et C du triangle en les milieux respectifs α, β, γ des segments [AH], [BH] et [CH], qui sont donc eux aussi sur le cercle $(\mathscr{C}')$.

Ainsi le cercle $(\mathscr{C}')$ contient les neuf points : A′, B′, C′, I, J, K, α, β, γ.

Définition 2.5. *On appelle **cercle d'Euler** le cercle passant par ces neuf points : les pieds des hauteurs, les milieux des côtés et les milieux des segments d'extrémités un sommet et l'orthocentre du triangle.*

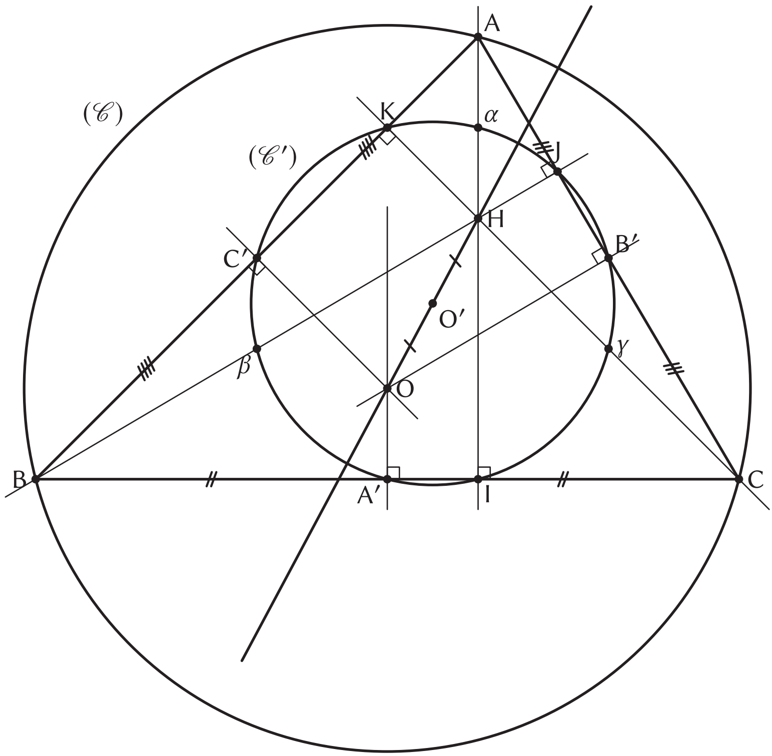


Figure 2.2 – *Cercle d'Euler.*

2.3 Le théorème de Feuerbach

Le théorème de Feuerbach nous permet de découvrir quatre nouveaux points remarquables appartenant au cercle d'Euler.

Définition 2.6. *Un cercle exinscrit d'un triangle est un cercle qui est tangent aux droites supportant les côtés du triangle, mais qui n'est pas le cercle inscrit.*

Théorème 2.7 (de Feuerbach). *Le cercle d'Euler d'un triangle* ABC *est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits du triangle* ABC.

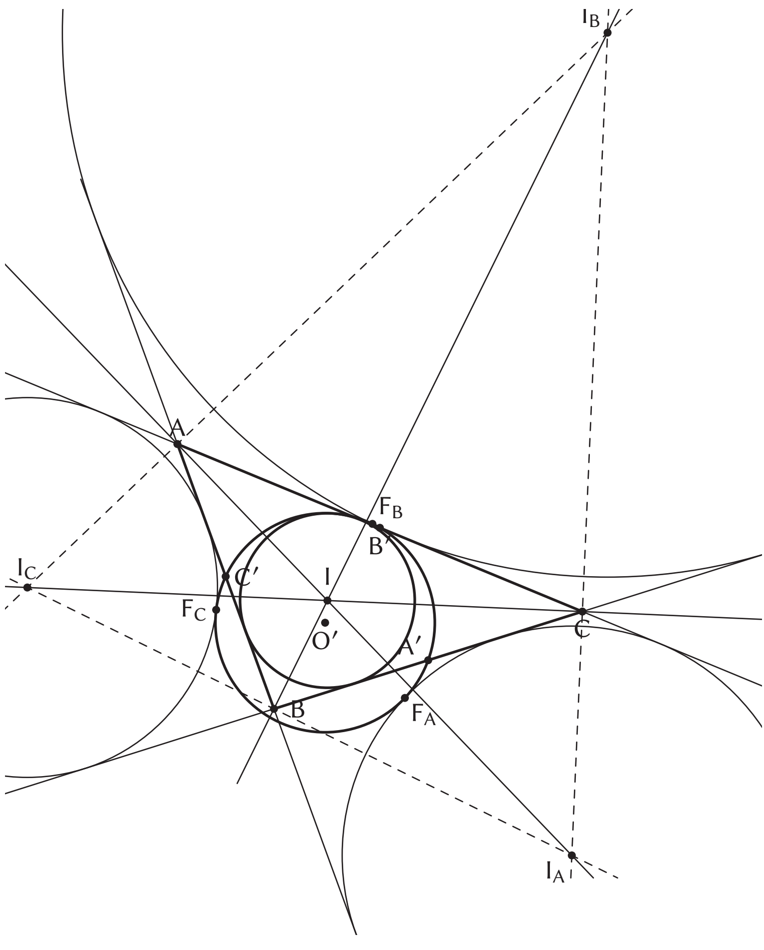


Figure 2.3 – *Théorème de Feuerbach.*

Nous donnons deux démonstrations faisant intervenir une inversion. Chacune d'elles est élégante et rapide et il nous a semblé important pour le lecteur d'être confronté à ces deux preuves. En effet, nous trouvons peu ou pas d'ouvrages récents dans la littérature mathématique qui font appel à une inversion pour prouver ce théorème, et les outils utilisés ne sont pas bien connus et peu abordés aujourd'hui dans l'enseignement secondaire ou supérieur.

Pour la première démonstration, nous nous sommes inspirés de [5]. La deuxième démonstration, quant à elle, est issue de [8].

2.3.1 Première démonstration du théorème de Feuerbach

— Supposons tout d'abord que : AC = AB.

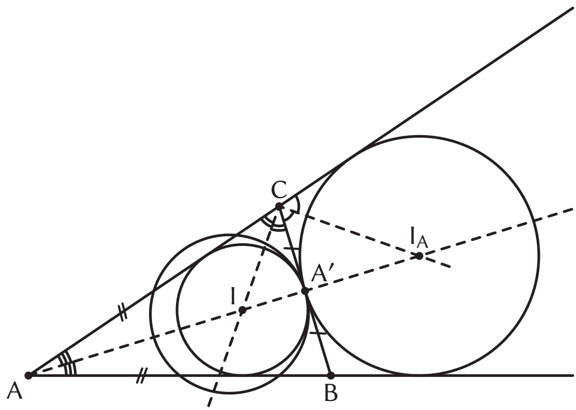


Figure 2.4 – *Première démonstration du théorème de Feuerbach (cas* AC = AB*).*

Dans ce cas, le cercle d'Euler, le cercle inscrit et le cercle exinscrit $\mathscr{C}_A$ sont tangents à (BC) en A′, milieu de [BC].

— Supposons maintenant que : AC > AB.

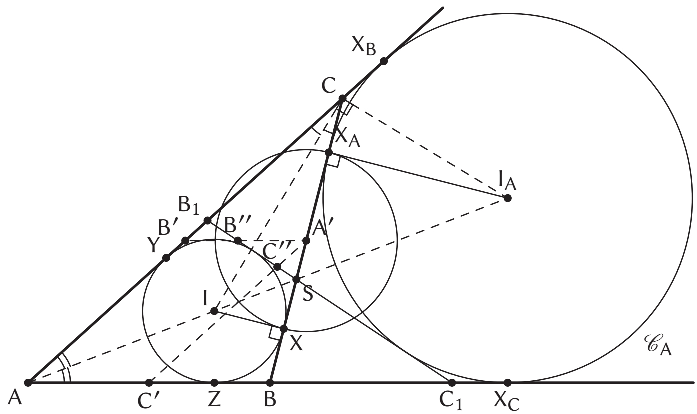


Figure 2.5 – *Première démonstration du théorème de Feuerbach (cas* AC > AB*).*

A', B' et C' sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Le cercle inscrit dans ABC touche $[BC]$ en X, $[AC]$ en Y et $[AB]$ en Z.
Le premier cercle exinscrit, noté $\mathscr{C}_A$ de centre I_A touche $[BC]$ en X_A, $[AC)$ en X_B et $[AB)$ en X_C.
La tangente commune au cercle inscrit et au cercle exinscrit $\mathscr{C}_A$, qui est distincte de (BC), est une droite qui intersecte (AC), (BC) et (AB) respectivement en B_1, S et C_1. Nous voyons également sur le dessin le cercle ω de diamètre $[XX_A]$ et les points S, B'' et C'' qui sont respectivement les points d'intersection de (B_1C_1) avec (BC), $(A'B')$ et $(A'C')$.
Posons $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, où : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Fait nº 1 : l'inversion $I_{A',\left(\frac{b-c}{2}\right)^2}$ de centre A' et de rapport $\left(\dfrac{b-c}{2}\right)^2$ est telle que l'image du cercle d'Euler est une droite ne passant pas par A'.
Les triangles IXB et IBZ étant rectangles d'hypoténuse $[IB]$, et vérifiant $IX = IZ$, on en déduit (théorème de Pythagore) :

$$BZ = BX.$$

Par un raisonnement similaire, on trouve :

$$CX = CY \text{ et } AY = AZ.$$

Ainsi, on en déduit : $BX + CY + AY = s$. D'où $\mathbf{BX = s - b}$.
Puisque I_AX_AC et I_AX_BC sont deux triangles rectangles d'hypoténuse $[I_AC]$, et : $I_AX_A = I_AX_B$, on en déduit (théorème de Pythagore) :

$$X_AC = X_BC.$$

Par un raisonnement similaire, on trouve :

$$X_CB = X_AB \text{ et } X_BA = X_CA.$$

Or : $BC + AC + AB = 2s$.
On a ainsi : $(X_AB + X_AC) + (AX_B - X_BC) + (AX_C - X_CB) = 2s$.
Donc, grâce aux égalités de longueurs établies précédemment, on obtient :

$$2AX_B = 2s.$$

Puis : $X_AC = CX_B = AX_B - AC = s - b$.
On a alors montré que : $BX = X_AC = s - b$.
Le centre de ω est donc A' (le milieu de $[BC]$) et le diamètre de ω est :

$$XX_A = a - 2(s - b) = b - c.$$

Ainsi, on en déduit que l'image du cercle d'Euler par l'inversion $I_{\mathrm{A}',\left(\frac{b-c}{2}\right)^2}$ est une droite ne passant pas par A′.

Fait nº 2. La droite image du cercle d'Euler par $\boldsymbol{I_{\mathrm{A}',\left(\frac{b-c}{2}\right)^2}}$ contient les points $\mathbf{B''}$ et $\mathbf{C''}$, et passe donc par les points $\mathbf{B_1}$ et $\mathbf{C_1}$.

Pour justifier ce fait, on va montrer que B″ et C″ sont les images de B′ et C′ par $I_{\mathrm{A}',\left(\frac{b-c}{2}\right)^2}$.

S appartient à la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$. Pour la suite, nous allons nous aider du dessin suivant :

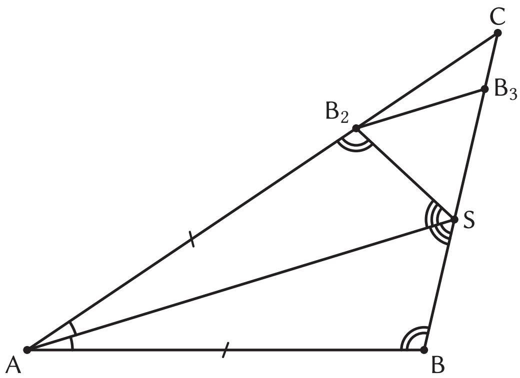


Figure 2.6 – *Première démonstration du théorème de Feuerbach (suite).*

Soit B_2 le point de [AC] tel que $\mathrm{AB}_2 = \mathrm{AB}$ (remarque : $\mathrm{B}_2 = \mathrm{B}_1$) et B_3 le symétrique de B par rapport à S.

Puisque AC > AB, on a : $\mathrm{B}_3 \in [\mathrm{BC}]$.

$$\widehat{\mathrm{B}_3\mathrm{SB}_2} = \pi - (\widehat{\mathrm{ASB}} + \widehat{\mathrm{B}_2\mathrm{SA}}).$$

Or : $\mathrm{AB}_2 = \mathrm{AB}$ et $\widehat{\mathrm{BAS}} = \widehat{\mathrm{SAB}_2}$.

Donc les triangles ASB et $\mathrm{AB}_2\mathrm{S}$ sont isométriques, puis :

$$\widehat{\mathrm{B}_3\mathrm{SB}_2} = \pi - 2\widehat{\mathrm{ASB}}, \text{ et : } \mathrm{SB}_2 = \mathrm{SB}\ (= \mathrm{SB}_3).$$

Ainsi $\mathrm{SB}_2\mathrm{B}_3$ est isocèle en S, et :

$$\widehat{\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\mathrm{S}} = \widehat{\mathrm{SB}_2\mathrm{B}_3} = \frac{\pi - \widehat{\mathrm{B}_3\mathrm{SB}_2}}{2} = \widehat{\mathrm{ASB}}.$$

Donc :

$\widehat{\mathrm{B}_3\mathrm{B}_2\mathrm{C}} = \pi - (\widehat{\mathrm{AB}_2\mathrm{S}} + \widehat{\mathrm{SB}_2\mathrm{B}_3}) = \pi - (\widehat{\mathrm{SBA}} + \widehat{\mathrm{ASB}}) = \widehat{\mathrm{BAS}} = \widehat{\mathrm{SAC}}.$

On rappelle, pour la deuxième égalité, que ASB et AB_2S sont isométriques. Cela nous permet de dire que $(B_2B_3) \parallel (AS)$. D'où, à l'aide du théorème de Thalès, on trouve : $\dfrac{AB_2}{AC} = \dfrac{SB_3}{SC}$, puis : $\dfrac{SB}{SC} = \dfrac{c}{b}$.

Et comme $S \in [CB]$, on a alors $CS = \dfrac{ab}{b+c}$ et $SB = \dfrac{ac}{b+c}$.

Aussi, $CS = CX_A + X_AS = XB + X_AS$ et $SB = XB + SX$.

Donc :

$CS - SB = X_AS - SX = X_AA' + A'S - SX = A'X - SX + A'S = 2A'S$.

On déduit de ce qu'on vient de montrer que $SA' = \dfrac{a(b-c)}{2(b+c)}$.

De plus, $BC_1 = AC_1 - AB = b - c$ et $CB_1 = b - c$.

Ainsi, puisque les triangles $SA'B''$ et SBC_1 sont semblables et que les triangles $SA'C''$ et SCB_1 sont, eux aussi, semblables, nous avons les égalités suivantes :

$$\frac{A'B''}{b-c} = \frac{A'B''}{BC_1} = \frac{SA'}{SB} = \frac{b-c}{2c} \text{ et } \frac{A'C''}{b-c} = \frac{A'C''}{CB_1} = \frac{SA'}{SC} = \frac{b-c}{2b}.$$

D'où : $A'B' \cdot A'B'' = \dfrac{c}{2} \cdot \dfrac{(b-c)^2}{2c} = \left(\dfrac{b-c}{2}\right)^2$

et $A'C' \cdot A'C'' = \dfrac{b}{2} \cdot \dfrac{(b-c)^2}{2b} = \left(\dfrac{b-c}{2}\right)^2$.

Les images respectives par $I_{A',\left(\frac{b-c}{2}\right)^2}$ de B' et C' sont donc B'' et C''.

Conclusion

On déduit du fait n° 2, à savoir que les images respectives par $I_{A',\left(\frac{b-c}{2}\right)^2}$ de B' et C' sont B'' et C'', que l'image du cercle d'Euler est (B_1C_1).

De plus, puisque ω est le cercle d'inversion de $I_{A',\left(\frac{b-c}{2}\right)^2}$ et que ω est orthogonal au cercle inscrit dans ABC et au premier cercle exinscrit $\mathscr{C}_A$, ces deux derniers cercles sont globalement invariants par $I_{A',\left(\frac{b-c}{2}\right)^2}$.

Le cercle d'Euler est donc tangent à ces cercles.

2.3.2 Deuxième démonstration du théorème de Feuerbach

Pour cette deuxième démonstration, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.8. *Dans un triangle* ABC*, le point d'intersection de la bissectrice intérieure issue de* A *et du cercle circonscrit à* ABC *(noté* P_1 *dans la démonstration) est le milieu du segment* $[II_A]$*, où* I *est le centre du cercle inscrit et* I_A *est le centre du cercle exinscrit tangent à* [BC].

Démonstration

— On s'intéresse d'abord au cas où ABC est non isocèle en A.

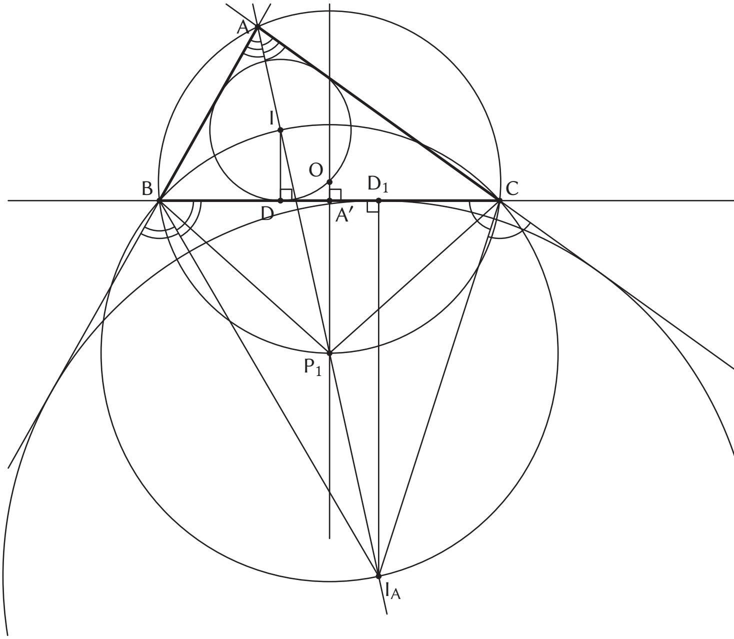


FIGURE 2.7 – *Démonstration du lemme 2.8, cas non isocèle.*

D'après le théorème de l'angle inscrit et le fait que (AP_1) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, on a les égalités suivantes :

$$\widehat{P_1BC} = \widehat{P_1AC} = \widehat{BAP_1} = \widehat{BCP_1}.$$

BP_1C est donc isocèle en P_1, et P_1 appartient à la médiatrice de $[BC]$.

Par ailleurs, II_AB et II_AC sont deux triangles rectangles d'hypoténuse $[II_A]$. Donc I, B, C et I_A sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[II_A]$.

Or le centre de ce cercle est à la fois sur la bissectrice (AI) et sur la médiatrice de $[BC]$.

Ainsi, comme ABC n'est pas isocèle, ces deux droites sont distinctes, et le centre du cercle est leur point d'intersection, c'est-à-dire P_1.

— Intéressons-nous maintenant au cas où ABC est isocèle en A.

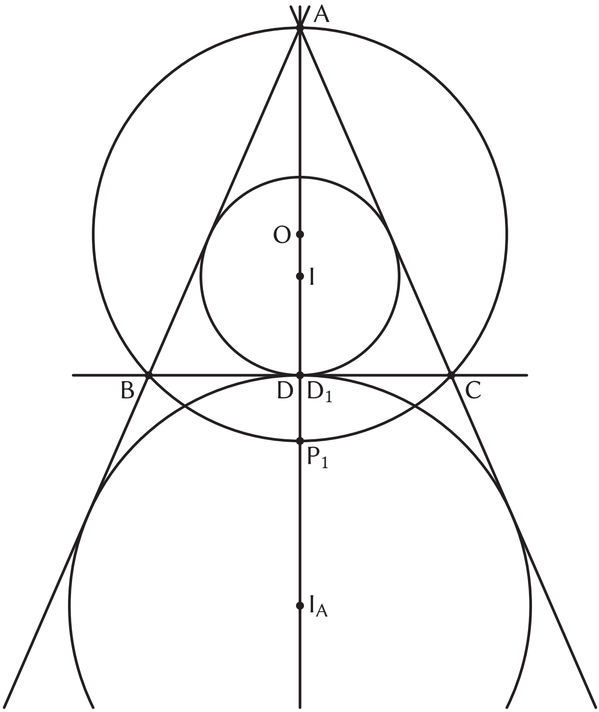


FIGURE 2.8 – *Démonstration du lemme 2.8, cas isocèle.*

Deux angles inscrits dans un cercle interceptant des arcs de cercles complémentaires sont supplémentaires.
Donc $\widehat{BP_1C} = \pi - \widehat{BAC}$.
De même : $\widehat{BI_AC} = \pi - \widehat{BIC}$.
On en déduit :

$$\widehat{BI_AC} = \pi - \left(\pi - \frac{1}{2}\left(\widehat{CBA} + \widehat{BCA}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{BAC}\right).$$

Finalement, on a donc l'égalité suivante :

$$\widehat{BI_AC} = \frac{1}{2}\widehat{BP_1C}.$$

Ainsi, P_1 est l'unique point de $[II_A]$ tel que $\widehat{BI_AC} = \frac{1}{2}\widehat{BP_1C}$.

Les triangles $\mathrm{II_AB}$ et $\mathrm{II_AC}$ sont deux triangles rectangles d'hypoténuse $[\mathrm{II_A}]$. On en déduit que les points I, $\mathrm{I_A}$, B et C sont cocycliques. Et, d'après le théorème de l'angle inscrit, le centre P du cercle de diamètre $[\mathrm{II_A}]$ vérifie l'égalité $\widehat{\mathrm{BI_AC}} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{BPC}}$. Donc $\mathrm{P} = \mathrm{P_1}$.

Continuons maintenant avec la deuxième démonstration du théorème de Feuerbach

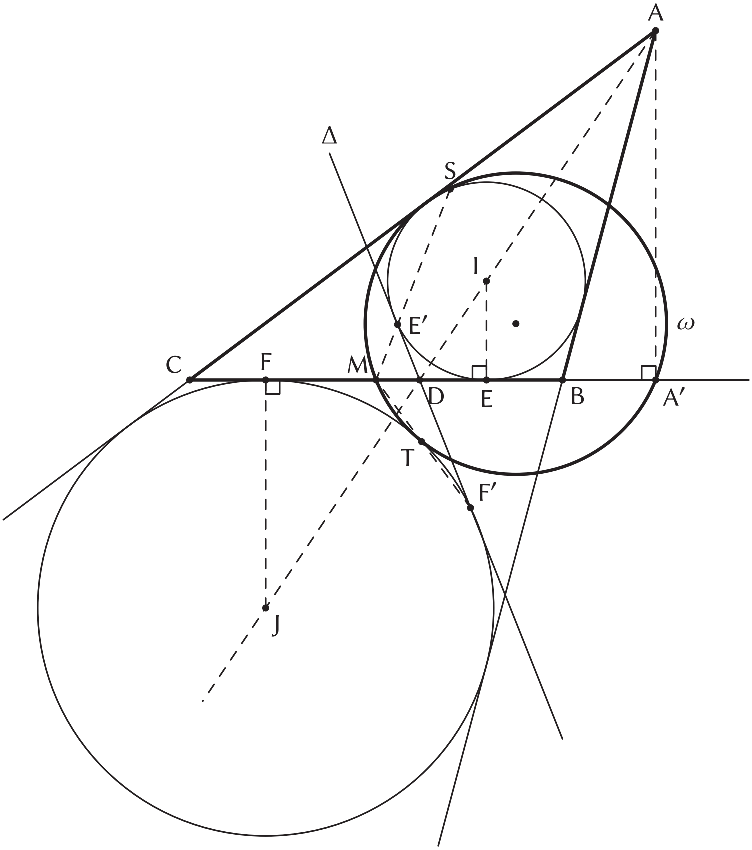


Figure 2.9 – *Deuxième démonstration du théorème de Feuerbach (cas non isocèle).*

Dans un triangle ABC, désignons par M, D et A′ les pieds de la médiane, de la bissectrice intérieure et de la hauteur issues de A, par G le centre de gravité, par I le centre du cercle inscrit, par J le centre du cercle exinscrit tangent à [BC] (noté $\mathrm{I_A}$ précédemment) et enfin par E et F les points de contact des cercles inscrit et exinscrit de centre J avec le côté [BC].

D'après la propriété 1.20, I et J sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et D. De plus, d'après le lemme 2.8, le milieu de [IJ] est sur la médiatrice de [BC].

Ainsi, par projection orthogonale sur (BC), on en déduit que E et F sont conjugués harmoniques par rapport aux points A' et D, et que M est le milieu de $[EF]$.

D'après la propriété 1.18, on en déduit :

$$\overline{ME}^2 = \overline{MF}^2 = \overline{MD} \cdot \overline{MA'}.$$

Pour l'inversion de pôle M et de rapport $\overline{ME}^2$, le cercle inscrit dans ABC et le cercle exinscrit à ABC de centre J sont des cercles orthogonaux au cercle d'inversion. D'après la propriété 1.16, l'inversion de pôle M et de rapport $\overline{ME}^2$ laisse invariants ces cercles.

Le cercle d'Euler ω du triangle ABC, passant par M et A', est transformé en une droite Δ passant par D et parallèle à la tangente en M au cercle ω.

Or, l'homothétie de centre G de rapport $\dfrac{-1}{2}$ transforme A en M, et le cercle circonscrit au triangle ABC en ω, le cercle d'Euler au triangle ABC.

La tangente en M au cercle ω est donc parallèle à la tangente en A au cercle circonscrit à ABC et, par suite, antiparallèle à (BC) par rapport aux droites (AB) et (AC), d'après la propriété 1.27. Il en est de même de la droite Δ qui est par conséquent symétrique de (BC) par rapport à la bissectrice (AD). La droite Δ est donc la deuxième tangente commune intérieure $(E'F')$ aux cercles inscrit dans ABC et exinscrit à ABC de centre I_A.

Il en résulte que le cercle ω est tangent à ces deux cercles aux points S et T, distincts respectivement de E' et F', où (ME') et (MF') les intersectent.

Définition 2.9. *On appelle point de Feuerbach chacun des points de contact du cercle d'Euler avec les quatre cercles, inscrit et exinscrits.*

Remarque

Le cercle des « neuf points » en contient maintenant treize avec les points de Feuerbach.

À travers ce chapitre, nous avons mis en avant les définitions et propriétés de base relatives à la droite d'Euler et surtout au cercle d'Euler. Nous pouvons d'ailleurs rappeler que ce cercle est aussi appelé cercle de Feuerbach en Allemagne et il était donc naturel d'aborder le théorème de Feuerbach en fin de chapitre, d'autant plus que, comme cela a été signalé précédemment, quatre nouveaux points remarquables ont alors été repérés sur le cercle, en plus des neuf points connus.

Les différents points commentés auparavant sont des prérequis indispensables pour aborder l'aspect historique de ces figures géométriques.

3. Aspect historique

À la fin du XIX^{e} siècle, la géométrie du triangle était vue comme l'une des plus grandes réussites mathématiques, et la droite d'Euler, tout comme le cercle d'Euler, était l'un de ses joyaux. Les mathématiciens qui délaissaient la géométrie du triangle pour étudier de nouveaux domaines comme la logique, l'algèbre abstraite ou la topologie prenaient alors de vrais risques pour leur carrière professionnelle.

3.1 Aperçu historique du document à l'origine de la droite d'Euler

Ce paragraphe est essentiellement une traduction de l'article [10]. Comme cela a été signalé en introduction de ce document, rien ne permet d'associer L. Euler au cercle qui porte son nom. L'unique lien qu'on peut faire entre cet illustre mathématicien et ce cercle est la droite qui, elle, porte son nom à juste titre. Nous rappelons d'abord ici le contexte historique dans lequel il a publié l'article relatif à la droite d'Euler, puis nous donnerons les grandes lignes de ce travail.

En 1767, dans le journal de l'académie de Saint-Pétersbourg, L. Euler a publié *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficilimorum* (traduisez : *« Solutions faciles de problèmes difficiles en géométrie »*). Il a écrit son texte en 1763 alors qu'il vivait à Berlin et travaillait à l'académie de Frédéric II de Prusse, dit Frédéric le Grand.

Les sept années de guerre (de 1756 à 1763) venaient juste de se terminer. Durant les dernières années de guerre, Berlin était occupée par des troupes étrangères. Euler et les autres académiciens vivaient ces années dans la peur concernant leur propre sécurité et celle de leur famille. Cependant, suite à des événements dramatiques, Frédéric le Grand évita la défaite et il remporta cette guerre. Quand il retourna à Berlin, il essaya de diriger l'académie des sciences de la même façon qu'il avait dirigé ses troupes. En seulement trois ans, Euler et lui étaient en discorde. Euler partit alors à Saint-Pétersbourg, en Russie, où il travailla à l'académie de l'impératrice Catherine II, dite Catherine la Grande. C'est pour cette raison que le travail d'Euler auquel nous nous intéressons a été publié dans cette ville.

Nous l'étudions maintenant. Pour faciliter la lecture, nous gardons ses notations, ainsi que les intitulés des figures de son document. Les figures ne sont pas modifiées par rapport au document original.

Euler commence en nous rappelant que le triangle a quatre points particuliers importants.

1. Le point d'intersection des hauteurs qui, depuis 1870, grâce à E. Since, est appelé orthocentre après avoir été appelé le point d'Archimède. Euler n'a pas utilisé cette dernière appellation. Il a noté ce point E.
2. Le point d'intersection des médianes. Euler l'appelle, comme nous, le centre de gravité. Il l'a noté F.
3. Le point d'intersection des bissectrices. Euler l'a noté G et, comme c'est le cas aujourd'hui, l'a appelé le centre du cercle inscrit.
4. Le point d'intersection des médiatrices. Euler l'a noté H et, comme c'est le cas aujourd'hui, l'a appelé le centre du cercle circonscrit.

Dans son document, Euler énonce ce qu'il considère comme étant le résultat principal de cet ouvrage :

Si les quatre points sont distincts, alors le triangle est déterminé. Si deux points sont confondus, alors les quatre sont confondus et le triangle est équilatéral, mais il peut avoir n'importe quelle taille.

Pour préparer son analyse, Euler donne quelques notations. Il appelle son triangle ABC, il note a, b, c les longueurs des côtés opposés respectivement aux sommets A, B et C. De plus, il note A l'aire du triangle et se fie au lecteur pour faire la distinction entre « le point A » et « l'aire A ».

Il connaît la formule de Héron, sans la nommer. Cela peut être dû à l'époque ou au fait que Euler ne connaissait tout simplement pas ce nom. Ici, tout comme dans un document qu'il a écrit en 1747-1748 intitulé *Variae demonstrationes geometriae*, c'est juste une formule qu'Euler suppose connue. Il la donne sous deux formes :

$$AA = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$
$$AA = \frac{1}{16}(2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4),$$

où AA désigne le carré de l'aire du triangle ABC, conformément aux habitudes de l'époque où l'on notait en général AA à la place de A^2.

Avec les notations établies, Euler souhaite donner les positions de chacun des centres E, F, G et H en fonction des longueurs a, b et c relativement au point A en tant qu'origine et le côté AB en tant qu'axe (des abscisses).

Il commence avec l'orthocentre E.

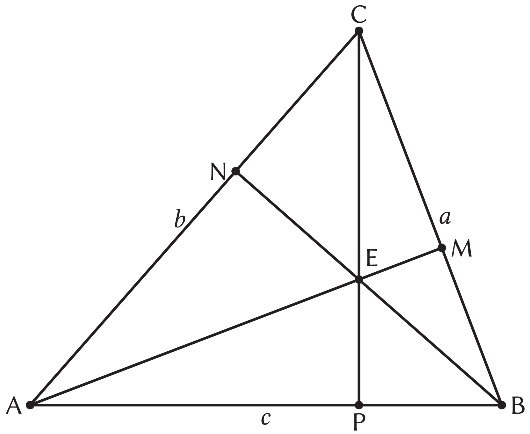


Figure 3.1 – *Orthocentre.*

Soit P le point d'intersection de la droite issue de C perpendiculaire à AB intersectant AB (cf. figure 3.1). Alors AP sert d'abscisse et EP d'ordonnée du point E.

De même, Euler prend MA perpendiculaire à BC et NB perpendiculaire à AC.

Aussi, il nous dit que : $\mathrm{AP} = \dfrac{cc + bb - aa}{2c}\cdot$

Il ne nous donne pas de raison, mais cela se justifie simplement à l'aide de la formule d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$, et de l'égalité : $\cos(A) = \dfrac{\mathrm{AP}}{b}\cdot$

Ainsi, on a l'abscisse du point E.

De même : $\mathrm{BM} = \dfrac{aa + cc - bb}{2a}\cdot$

La formule d'aire du triangle nous donne : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BC}$.

Ainsi : $\mathrm{AM} = \dfrac{2\mathcal{A}}{a}\cdot$

Les triangles ABM et AEP sont semblables (car ils sont rectangles tous les deux et ils ont un angle $\widehat{\mathrm{A}}$ commun). D'où : $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{EP}}\cdot$

Cela nous amène aisément à l'ordonnée du point E :

$$\mathrm{EP} = \frac{(cc + bb - aa)(aa + cc - bb)}{8c\mathcal{A}}\cdot$$

Euler répète une étude similaire pour chacun des autres centres.

Il introduit les points Q, R et S, points de AB associés aux abscisses des centres F, G et H respectivement (autrement dit, ce sont les projections orthogonales de F, G et H sur la droite AB).

Pour les coordonnées du centre de gravité F, il trouve :

$$\mathrm{AQ} = \frac{3cc + bb - aa}{6c} \text{ et } \mathrm{QF} = \frac{2A}{3c}\cdot$$

Pour les coordonnées de G, le centre du cercle inscrit, il obtient :

$$\mathrm{AR} = \frac{c + b - a}{2} \text{ et } \mathrm{RG} = \frac{2A}{a + b + c}\cdot$$

Finalement, pour H, le centre du cercle circonscrit, il trouve :

$$\mathrm{AS} = \frac{1}{2}c \text{ et } \mathrm{SH} = \frac{c(aa + bb - cc)}{8A}\cdot$$

Cela conclut la première partie du document d'Euler.

Il a ainsi repéré « ses » quatre centres en fonction des longueurs des trois côtés du triangle. La partie que nous venons d'étudier représente environ cinq pages sur un total de vingt-et-une pages.

Euler s'est ensuite intéressé aux distances entre les centres. Il a donné les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{EF}^2 &= (\mathrm{AP} - \mathrm{AQ})^2 + (\mathrm{PE} + \mathrm{QF})^2,\\
\mathrm{EG}^2 &= (\mathrm{AP} - \mathrm{AR})^2 + (\mathrm{PE} - \mathrm{RG})^2,\\
\mathrm{EH}^2 &= (\mathrm{AP} - \mathrm{AS})^2 + (\mathrm{PE} - \mathrm{SH})^2,\\
\mathrm{FG}^2 &= (\mathrm{AQ} - \mathrm{AR})^2 + (\mathrm{QF} - \mathrm{RG})^2,\\
\mathrm{FH}^2 &= (\mathrm{AQ} - \mathrm{AS})^2 + (\mathrm{QF} - \mathrm{SH})^2,\\
\mathrm{GH}^2 &= (\mathrm{AR} - \mathrm{AS})^2 + (\mathrm{RG} - \mathrm{SH})^2,
\end{aligned}$$

où EF^2 désigne le carré de la longueur du segment EF, etc.

Pour étudier ces distances, il a posé :

$$a + b + c = p, \quad ab + ac + bc = q \text{ et } abc = r.$$

Cette définition de p, q et r nous donne les longueurs a, b et c égales aux solutions de l'équation : $z^3 - pzz + qz - r = 0$.

Par la suite, Euler donne les égalités utiles :

$$\begin{aligned}
aa + bb + cc &= pp - 2q,\\
aabb + aacc + bbcc &= qq - 2pr,\\
a^4 + b^4 + c^4 &= p^4 - 4ppq + 2qq + 4pr.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour l'aire A, il obtient l'expression :

$$AA = \frac{1}{16}p(-p^3 + 4pq - 8r) = \frac{-p^4 + 4ppq - 8pr}{16}\cdot$$

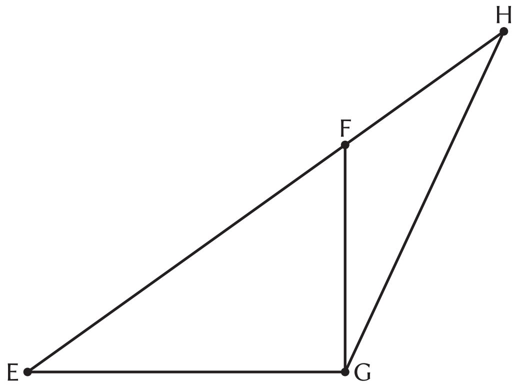


Figure 3.2 – *Démonstration d'Euler (1).*

Six pages de calculs plutôt pénibles amènent Euler aux six égalités numérotées qui suivent.

En se référant à la figure 3.2, il finit par obtenir :

(I) $$EF^2 = \frac{rr}{4AA} - \frac{4}{9}(pp - 2q),$$

(II) $$EG^2 = \frac{rr}{4AA} - pp + 3q - \frac{4r}{p},$$

(III) $$EH^2 = \frac{9rr}{16AA} - pp + 2q,$$

(IV) $$FG^2 = -\frac{1}{9}pp + \frac{5}{9}q - \frac{2r}{p},$$

(V) $$FH^2 = \frac{rr}{16AA} - \frac{1}{9}(pp - 2q),$$

(VI) $$GH^2 = \frac{rr}{16AA} - \frac{r}{p}.$$

Bien que cela ne semble être qu'une nouvelle liste de formules, il y a un joyau caché ici. En effet, Euler voit que $\mathsf{EH} = \frac{3}{2}\mathsf{EF}$ et $\mathsf{FH} = \frac{1}{2}\mathsf{EF}$ (douzième page de son document) et il remarque que cela implique que, si les points E et F sont connus, alors le point H peut être trouvé sur la droite passant par E et F. Il ne mentionne pas spécifiquement que l'égalité EF + FH = EH entraîne l'alignement des trois points.

Rien dans la présentation d'Euler ne suggère qu'il pensait que c'était très important ou même très intéressant. Il précise simplement qu'il peut trouver H à partir de E et F, mais pas que E et F peuvent être déterminés en connaissant les deux autres points.

De façon plus moderne, nous donnons ce résultat en disant que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont alignés. De plus, EH est égale à $\frac{3}{2}$EF. La droite associée est appelée droite d'Euler.

Par la suite, dans son document, Euler semble s'intéresser à une conséquence des égalités données plus difficile à montrer et certainement moins importante que le résultat énoncé ci-dessus, qui est l'égalité suivante :

$$4\mathrm{GH}^2 + 2\mathrm{EG}^2 = 3\mathrm{EF}^2 + 6\mathrm{FG}^2.$$

Mais Euler n'en reste pas là ! Son problème n'est pas de découvrir les propriétés des « centres » du triangle, mais d'essayer de reconstruire le triangle à partir des centres. Dans ce but, il introduit trois nouvelles valeurs P, Q et R définies à l'aide de p, q et r par :

$$\frac{rr}{ps} = R, \quad \frac{r}{p} = Q \text{ et } pp = P \text{ (où : } 4s = 4pq - p^3 - 8r, \text{ donc : } 4AA = ps).$$

Puis il réécrit les relations données dans les formules I à VI en fonction de P, Q et R. Par la suite, il utilise seulement les trois formules :

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{GH}^2 = \frac{1}{4}R - Q,$$

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{FH}^2 = \frac{1}{4}R - \frac{1}{18}P + \frac{4}{9}Q + \frac{2QQ}{9R},$$

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{FG}^2 = \frac{1}{36}P - \frac{8}{9}Q + \frac{5QQ}{9R}.$$

Finalement, Euler est prêt à établir et résoudre le problème suivant qui est la raison de l'écriture de son document :

PROBLÈME : étant donné quatre points relatifs au triangle, construire le triangle.

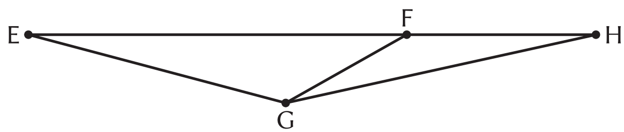


Figure 3.3 – *Démonstration d'Euler (2).*

Euler ne résout pas le problème très clairement.

Il sépare le problème en deux cas.

Le premier cas est celui où le point G n'appartient pas à la droite d'Euler ou, comme Euler le dit, le cas où les points F, G et H forment un triangle.

Dans le second cas, les quatre droites sont confondues (voir la figure 3.3 pour deviner de quelles droites il s'agit).

Euler commence son raisonnement en posant :

$$\mathrm{GH} = f, \quad \mathrm{FH} = g \text{ et } \mathrm{FG} = h.$$

Alors, à l'aide du théorème établi de la droite d'Euler et de ce qui suit ce théorème, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathsf{EF} &= 2g \text{ car } \mathsf{FH} = \frac{1}{2}\mathsf{EF},\\ \mathsf{EH} &= 3g \text{ car } \mathsf{EH} = \frac{3}{2}\mathsf{EF},\\ \text{et } \mathsf{EG} &= \sqrt{6gg + 3hh - 2ff}.\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue à partir de l'égalité

$$4\mathsf{GH}^2 + 2\mathsf{EG}^2 = 3\mathsf{EF}^2 + 6\mathsf{FG}^2.$$

Alors les formules I, II et III se réécrivent ainsi :

$$ff = \frac{1}{4}R - Q, \tag{I}$$

$$gg = \frac{1}{4}R - \frac{1}{18}P + \frac{4}{9}Q + \frac{2QQ}{9R}, \tag{II}$$

$$hh = \frac{1}{36}P - \frac{8}{9}Q + \frac{5QQ}{9R}\cdot \tag{III}$$

Euler trouve ensuite :

$$\begin{aligned}R &= \frac{4f^4}{3gg + 6hh - 2ff},\\ Q &= \frac{3ff(ff - gg - 2hh)}{3gg + 6hh - 2ff},\\ P &= \frac{27f^4}{3gg + 6hh - 2ff} - 12ff - 15gg + 6hh.\end{aligned}$$

Ainsi : $\dfrac{QQ}{R} = \dfrac{9(ff - gg - 2hh)^2}{4(3gg + 6hh - 2ff)}\cdot$

Puis il écrit p, q, r en fonction de P, Q et R (ce qui sous-entend que les expressions de ces nombres en fonction de f, g et h sont connues) et il obtient :

$$p = \sqrt{P}, \quad q = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{QQ}{R} \text{ et } r = Q\sqrt{P}.$$

Finalement, il nous rappelle que les trois longueurs des côtés du triangle sont les trois solutions de l'équation : $z^3 - pzz + qz - r = 0$.

Dans le cas où nous n'avons pas l'assurance que la solution d'Euler résout le problème, il donne un exemple.

Il considère un triangle de côtés $a = 5$, $b = 6$ et $c = 7$. Il utilise la première version de ses formules I à VI pour trouver : $ff = \dfrac{35}{32}$, $gg = \dfrac{155}{288}$ et $hh = \dfrac{1}{9}\cdot$

Puis il prétend ne pas connaître a, b et c et qu'il a juste les valeurs de ff, gg et hh. Les formules données pour P, Q et R en fonction de f, g et h permettent d'obtenir :

$$R = \frac{1\,225}{24}, \quad Q = \frac{35}{3}, \quad P = 324 \quad \text{et} \quad \frac{QQ}{R} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

Cela donne ensuite : $p = \sqrt{P} = 18$, $q = 107$, et $r = \frac{35}{3} \times 18 = 5 \times 7 \times 6 = 210$.

L'équation devient alors : $z^3 - 18zz + 107z - 210 = 0$.

Comme prévu, les trois solutions de cette équation sont 5, 6 et 7.

Ensuite, Euler considère séparément le cas où les quatre centres appartiennent à une même droite. Il trouve que l'équation a une racine double et que cela donne un triangle isocèle. Il ne donne pas de détails concernant le fait que le triangle est équilatéral si les quatre centres sont confondus.

En fait, Euler a fait sa découverte en cherchant autre chose. Il a essayé de trouver une manière de reconstruire un triangle à partir des positions de ses « centres ». Il n'a pas nommé sa découverte et ne l'a jamais donc appelée « droite d'Euler ». Euler n'était même pas conscient de l'importance de celle-ci. Par la suite, avec sa formule des polyèdres et son problème des ponts de Königsberg, il passa à autre chose et n'étudia plus cette fameuse droite.

3.2 Le cercle des neuf points en 1821

En 1821, les mathématiciens français Charles Brianchon (1785-1864) et Jean-Victor Poncelet (1788-1867) ont donné une première démonstration pour justifier l'existence du cercle des « neuf points ».

Nous nous permettrons, dans un premier temps, de recopier cette démonstration puis, dans un deuxième temps, nous la traduirons sous une forme plus « moderne ».

3.2.1 Démonstration historique de Brianchon et Poncelet

Au début du XIXe siècle, de 1810 à 1832, le mathématicien nîmois Joseph-Diaz Gergonne (1771-1859) publie un journal intitulé *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, premier grand périodique consacré aux mathématiques tant de recherches qu'à visée didactique. Il fut aidé, dans les deux premières années, par un autre mathématicien de la même ville, Joseph Esprit Thomas-Lavernède.

Puis Gergonne gère seul l'édition de son périodique, y compris après sa nomination à la faculté de Montpellier en 1816.

Ce journal est plus connu sous le nom d'*Annales de Gergonne*[1].

1. Les *Annales de Gergonne* sont numérisées et visibles sur le site http://www.numdam.org.

C'est dans le volume XI de ce journal qu'on trouve la démonstration de nos deux mathématiciens (cf. [1]).

THÉORÈME IX. Le cercle qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle quelconque sur les côtés qui leur sont opposés, passe aussi par les milieux de ces trois côtés, ainsi que par les milieux des distances qui séparent les sommets du point de croisement des perpendiculaires.

Démonstration. Soient P, Q, R les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle ABC sur les côtés opposés ; et soient K, I, L les points milieux de ces côtés.

Les triangles rectangles CBQ et ABR étant semblables, on aura

$$BC : BQ :: AB : BR \;;$$

d'où, à cause que K et L sont les points milieux de BC et AB,

$$BK \,.\, BR = BL \,.\, BQ \;;$$

c'est-à-dire que les quatre points K, R, L, Q appartiennent à une même circonférence.

On prouverait semblablement que les quatre points K, R, I, P sont sur un cercle, aussi bien que les quatre points P, I, Q, L.

Cela posé, s'il était possible que les trois cercles en question ne fussent pas un seul et même cercle, il faudrait que les directions des cordes qui leur sont deux à deux communes concourussent en un point unique ; or, ces cordes sont précisément les côtés du triangle ABC, lesquels ne sauraient concourir en un même point ; donc il est également impossible de supposer que les trois cercles diffèrent entre eux ; donc ils se confondent en un seul et même cercle.

Soient maintenant C′, A′, B′ les points milieux des distances DC, DA, DB qui séparent le point de croisement D des hauteurs du triangle ABC de chacun de ses sommets respectifs. Les triangles rectangles CDR et CQB étant semblables, on aura

$$CD : CR :: CB : CQ \;;$$

d'où, à cause que les points C′ et K sont les milieux des distances CD et CB,

$$CC'.CQ = CR.CK\ ;$$

c'est-à dire que le cercle qui passe par K, R, Q passe aussi par C′.

On prouverait de la même manière que ce cercle passe par les deux autres points A′, B′ ; donc il passe à la fois par les neuf points P, Q, R, I, K, L, A′, B′, C′ ; *ce qu'il fallait démontrer.*

Voici une figure qui aurait pu accompagner cette démonstration parue dans les *Annales de Gergonne* en 1821 :

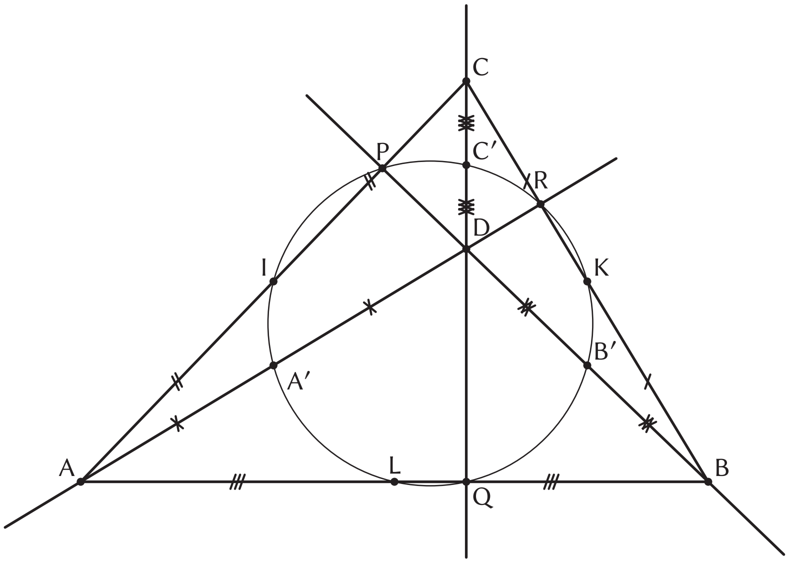


FIGURE 3.4 – *Démonstration de Brianchon et Poncelet.*

3.2.2 Démonstration de Brianchon et Poncelet « actualisée »

Nous nous permettons maintenant de reprendre la démonstration évoquée précédemment en la rédigeant en termes modernes. Nous utiliserons ici les notions de vecteur, de produit scalaire, de mesure algébrique, ainsi qu'une propriété relative à la puissance d'un point par rapport à un cercle et à la cocyclicité de quatre points (voir le chapitre 1). Ce choix de démonstration actualisée est dû au fait que l'on parle davantage de produit scalaire que de triangle semblable aujourd'hui et aussi au fait que l'expression « puissance d'un point par rapport à un cercle », qui ne pouvait pas apparaître en 1821 car la notion de mesure algébrique n'existait alors pas, doit être citée pour bien comprendre comment est justifiée la cocyclicité des points.

Théorème 3.1. *Dans un triangle quelconque, les pieds des hauteurs, les milieux des côtés et les milieux des segments d'extrémités un sommet et l'orthocentre du triangle sont cocycliques.*

Pour la démonstration, on se réfère à la figure 3.4.

Démonstration

Soit ABC un triangle quelconque. On nomme P, Q et R les pieds des hauteurs respectivement issues des sommets B, C et A. Alors :

$$\overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}, \tag{3.1}$$

$$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}. \tag{3.2}$$

Soit K, L et I les milieux respectifs des côtés [BC], [AB] et [CA].

On a : $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BA} = \overline{BQ} \cdot \overline{BA} = 2\overline{BQ} \cdot \overline{BL}$;

et : $\overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{BC} = \overline{BR} \cdot \overline{BC} = 2\overline{BR} \cdot \overline{BK}$.

Ainsi, on déduit de (3.1) et (3.2) : $\overline{BK} \cdot \overline{BR} = \overline{BL} \cdot \overline{BQ}$.

Puis on peut conclure, d'après la propriété 1.4, que K, R, L et Q sont cocycliques.

De même, on a : K, R, I et P sont cocycliques ; et P, I, Q et L sont cocycliques.

Raisonnons alors par l'absurde en supposant que les trois cercles en question ne sont pas confondus.

Dans ce cas, les cordes qui leur sont deux à deux communes, étant les médiatrices des segments dont les extrémités sont les centres des cercles, sont :

- soit parallèles, si les centres sont alignés, d'après la propriété 1.6 ;
- soit concourantes en le centre radical des trois cercles (voir le corollaire 1.8 et la définition 1.9).

Or, ces cordes sont les côtés du triangle ABC, ce qui contredit les deux possibilités données.

On en conclut alors que les trois cercles sont confondus.

Soit R l'orthocentre du triangle ABC. On nomme C′, A′ et B′ les milieux respectifs des segments [DC], [DA] et [DB].

Puisque les triangles CDR et CQB sont rectangles respectivement en R et en Q, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CQ} &= \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= 2\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CK} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CR} \cdot \overrightarrow{CK} &= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CK} \\ &= 2\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CK} \end{aligned} \tag{3.4}$$

L'égalité (3.3) est due au fait que K est le milieu de [BC] et l'égalité (3.4) est due au fait que C′ est le milieu de [CD].

Ainsi, on peut conclure (puissance d'un point par rapport à un cercle) que K, R, Q et C′ sont cocycliques.

De même, on a : K, R, Q et A′ sont cocycliques ; et K, R, Q et B′ sont cocycliques.

Donc P, Q, R, I, K, L, A′, B′, C′ sont cocycliques.

3.3 Karl Feuerbach et ses quatre nouveaux points (1822)

Le mathématicien allemand Karl Feuerbach (1800-1834), d'abord étudiant brillant puis diplômé précoce, est considéré comme étant le géomètre découvreur du cercle des neuf points. Les coïncidences de recherches n'étant pas rares, il publia son résultat en 1822, un an après celui de Brianchon et Poncelet sur le même thème. Une de ses contributions particulières, celle qui lui valut la notoriété et qui nous intéresse ici, fut cependant d'adjoindre quatre points aux neuf que le cercle comptait déjà : le contact de ce cercle avec le cercle inscrit (point de Feuerbach) et avec les trois cercles exinscrits.

Alors qu'il était professeur au collège d'Erlangen, ses résultats sont publiés dans un ouvrage intitulé *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* (cf. [7]).

La figure qui accompagnait le texte étudié ici et qu'on trouvait à la fin de l'ouvrage, où apparaissent les points utiles pour la démonstration, est reproduite dans la page qui suit (remarque : les points de la figure ne font pas tous partie des égalités de longueurs que nous avons souhaité garder dans ce document).

Pour les égalités qui suivront, nous aurons besoin de connaître quelques notations utilisées par Feuerbach. Les voici :

r : rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC donné.

R : rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Remarque : Feuerbach a signalé dans son ouvrage que le rayon du cercle d'Euler, qui ne portait pas encore cette dénomination, était $\frac{R}{2}$.

ρ : rayon du cercle d'Euler.

O : orthocentre ; K : centre du cercle circonscrit ; L : centre du cercle d'Euler ; S : centre du cercle inscrit ; S′, S″ et S‴ : centres des cercles exinscrits.

r', r'' et r''' : rayons des cercles exinscrits.

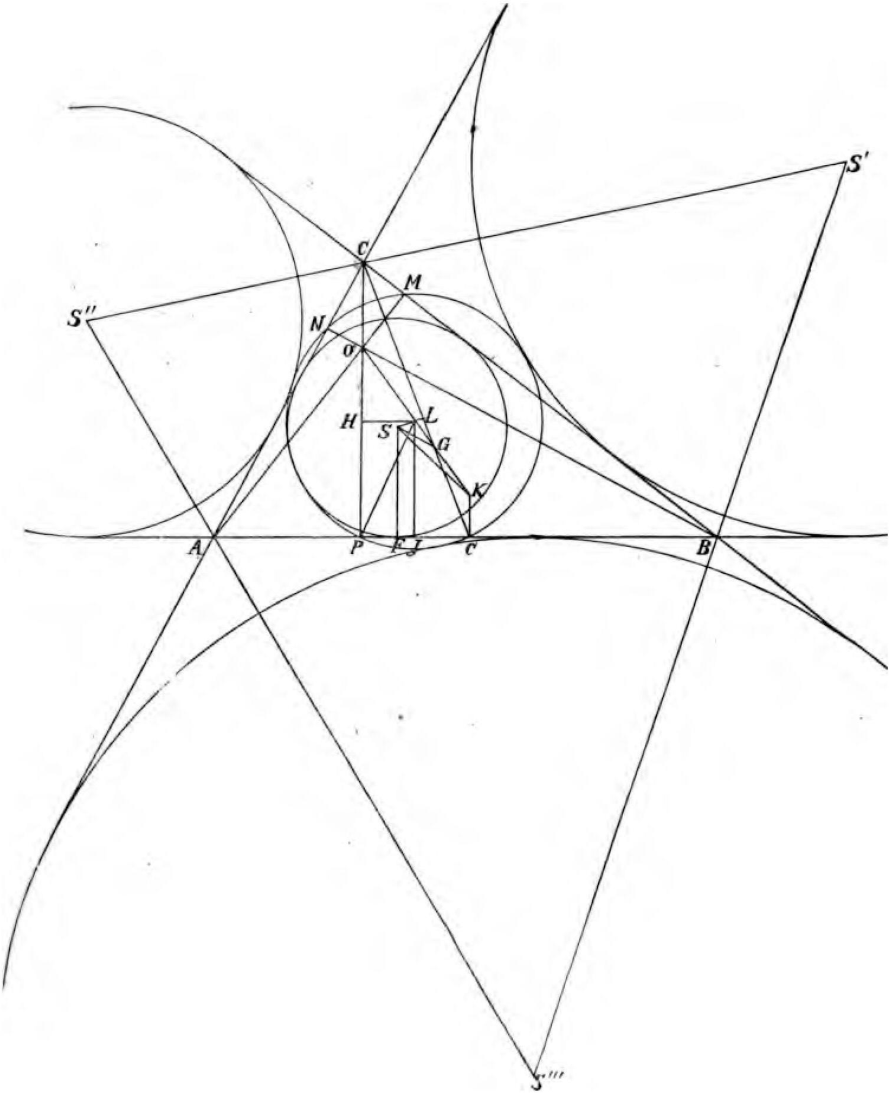


FIGURE 3.5 – *Points de Feuerbach (extrait de [7]).*

Pour faciliter la lecture des lignes suivantes, le lecteur pourra se référer à la figure ci-dessous, inspirée de la figure extraite de [7], mais un peu plus lisible.

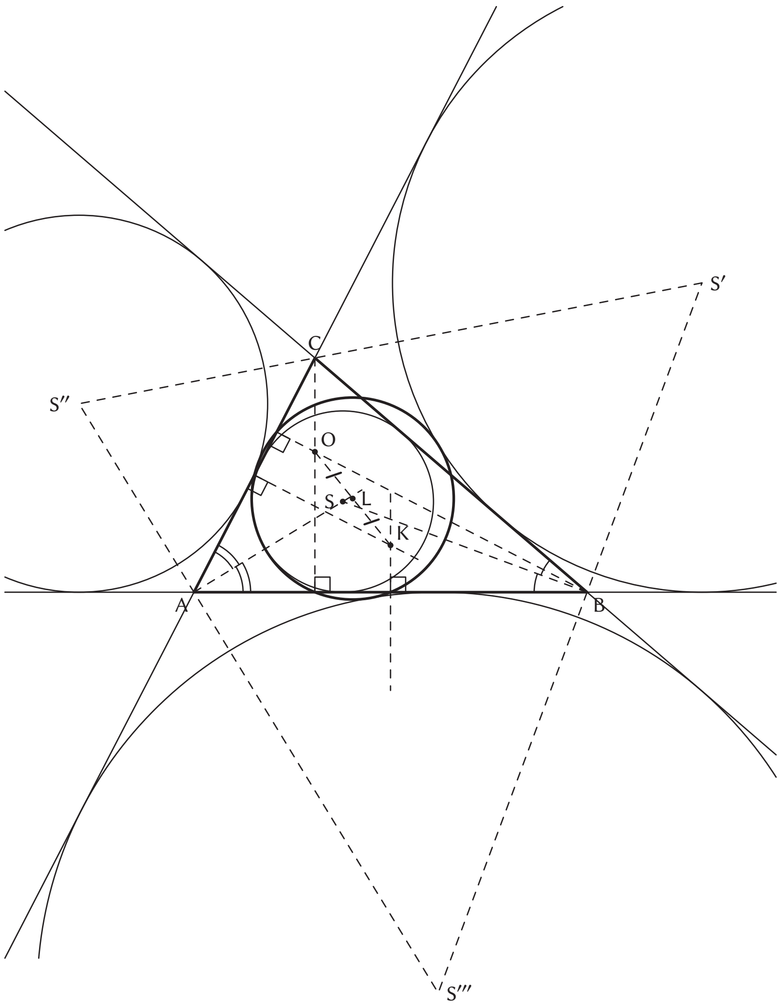


Figure 3.6 – *Points de Feuerbach.*

Feuerbach, pour prouver que le cercle d'Euler est tangent aux cercles inscrit et exinscrits, a dû justifier de nombreuses égalités de longueurs. Dans ce qui suit, nous présentons les résultats extraits de ses travaux qui permettent d'aboutir aux égalités associées à sa conclusion sur le fait qu'on ait des cercles tangents.

Auparavant, nous citons toutefois deux égalités rencontrées par la plupart des étudiants et qui ont été utilisées par Feuerbach dans sa démonstration :

$$r = \frac{2\Delta}{a+b+c} \text{ et } R = \frac{abc}{2\Delta}$$

où a, b et c sont les longueurs respectives des côtés [BC], [AC] et [AB] et Δ est l'aire du triangle ABC.

Dans sa démonstration, on peut relever sept étapes :

1. Tout d'abord, Feuerbach prouve les égalités suivantes [2] :

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{KS}}^2 &= R^2 - 2rR,\\ \overline{\mathrm{KS}'}^2 &= R^2 + 2r'R,\\ \overline{\mathrm{KS}''}^2 &= R^2 + 2r''R,\\ \overline{\mathrm{KS}'''}^2 &= R^2 + 2r'''R.\end{aligned}$$

2. À l'aide de l'égalité : $r' + r'' + r''' = r + 4R$ établie plus tôt dans son ouvrage, il déduit du point précédent :

$$\overline{\mathrm{KS}}^2 + \overline{\mathrm{KS}'}^2 + \overline{\mathrm{KS}''}^2 + \overline{\mathrm{KS}'''}^2 = 12R^2.$$

3. Ensuite, il prouve les égalités :

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OS}}^2 &= 2r^2 - 2\rho R,\\ \overline{\mathrm{OS}'}^2 &= 2r'^2 + 2\rho R,\\ \overline{\mathrm{OS}''}^2 &= 2r''^2 + 2\rho R,\\ \overline{\mathrm{OS}'''}^2 &= 2r'''^2 + 2\rho R.\end{aligned}$$

4. Puis, grâce à l'égalité : $r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 = 4R(2R - \rho)$ établie, elle aussi, plus tôt dans le même ouvrage, il obtient :

$$\overline{\mathrm{OS}}^2 + \overline{\mathrm{OS}'}^2 + \overline{\mathrm{OS}''}^2 + \overline{\mathrm{OS}'''}^2 = 4R(4R - \rho).$$

5. Il prouve également que : $\overline{\mathrm{KO}}^2 = R^2 - 4\rho R$.

6. Et, avec l'égalité $\overline{\mathrm{OL}}^2 = \frac{1}{4}R^2 - \rho R$, justifiée plus tôt dans son ouvrage, il en déduit : $\overline{\mathrm{KO}}^2 = 4\overline{\mathrm{OL}}^2$, ou : KO = 2OL.

2. La notation $\overline{\mathrm{KS}}$ utilisée par Feuerbach signifie « longueur du segment [KS] ». Ce n'est pas une mesure algébrique !

7. Enfin, à l'aide des égalités précédentes et de l'égalité

$$2\overline{\mathrm{LS}}^2 + 2\overline{\mathrm{OL}}^2 = \overline{\mathrm{KS}}^2 + 2\overline{\mathrm{OS}}^2,$$

il établit que :

$$\overline{\mathrm{LS}}^2 = \frac{1}{4}R^2 - rR + r^2 = \left(\frac{1}{2}R - r\right)^2 \text{ ou } \mathrm{LS} = \frac{1}{2}R - r.$$

Il obtient de même : $\mathrm{LS}' = \frac{1}{2}R + r'$, $\mathrm{LS}'' = \frac{1}{2}R + r''$ et $\mathrm{LS}''' = \frac{1}{2}R + r'''$.
Or dire que deux cercles sont tangents équivaut à dire que la somme ou la différence de leurs rayons est égale à la distance entre les centres de ces cercles.
Cela lui permet donc de conclure.

Nous vous donnons également la traduction de la phrase de conclusion de Feuerbach :

« *Le cercle qui passe par les pieds des hauteurs d'un triangle touche "tous" les quatre cercles qui sont tangents aux trois côtés du triangle ; il est tangent "intérieurement" au cercle inscrit et tangent "extérieurement" à chacun des cercles qui touchent les côtés du triangle "extérieurement".* »

3.4 Le cercle des neuf points en 1842

Olry Terquem (1782-1862), ancien élève de l'école Polytechnique, crée en 1842, avec Camille-Christophe Gerono, les *Nouvelles annales de mathématiques*. Connu pour ses travaux de géométrie, c'est à lui que revient, en cette même année 1842, la dénomination « cercle des neuf points ».

Dans les lignes qui suivent, nous nous permettons de recopier la démonstration de ce mathématicien apparue dans les *Nouvelles annales de mathématiques* [11] dans laquelle apparaît à deux reprises la nouvelle dénomination pour la première fois.

Pour suivre la démonstration de Terquem, il faut savoir qu'il reprend des notations utilisées auparavant dans le même tome des *Nouvelles annales de mathématiques* [12].

Les voici :

ABC est un triangle donné.

a, b, c sont les longueurs des côtés du triangle opposés respectivement aux sommets A, B, C.

E est le point d'intersection des trois hauteurs.

G est le centre du cercle inscrit. H est le centre du cercle circonscrit.

On pose : $\mathrm{EG} = e$; $\mathrm{GH} = f$; $\mathrm{EH} = k$; $a + b + c = p$.

R est le rayon du cercle circonscrit ; ρ est le rayon du cercle inscrit.

Il est également bon de savoir que Terquem reprend dans sa démonstration des résultats établis plus tôt dans les annales.

Théorème

> Dans un triangle, les trois hauteurs se coupant en six segments ; les milieux des segments qui partent des angles ; les pieds des hauteurs ; les milieux des côtés du triangle, donnent neuf points situés sur la même circonférence ; le centre de cette circonférence est sur le milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de rencontre des trois hauteurs ; le rayon de la circonférence est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit ; et cette circonférence touche intérieurement le cercle inscrit et extérieurement les trois cercles exinscrits.

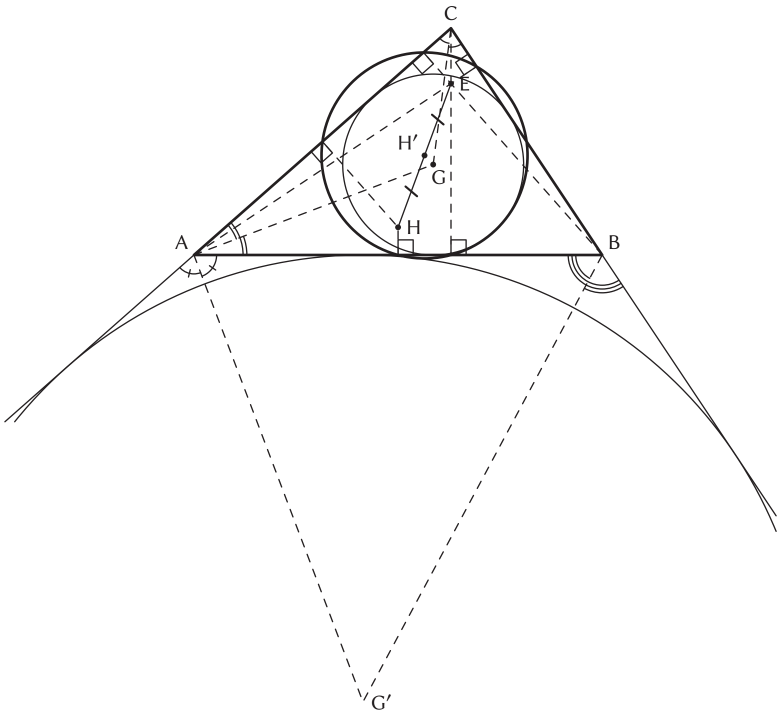


Figure 3.7 – *Démonstration de Terquem.*

Démonstration

Soit ABC le triangle : nous conservons les mêmes lettres et les mêmes notations qu'on trouve dans [12, p. 80] ;
H′, centre du cercle passant par les neuf points ;
G′, centre du cercle exinscrit touchant le côté AB et les deux côtés AC, BC prolongés ;
ρ' rayon de ce cercle exinscrit ;
$\mathrm{G'E} = e'$;
$\mathrm{G'H} = f'$.
Les trois points milieux des côtés, le pied d'une hauteur, sont évidemment les quatre sommets d'un trapèze ayant deux diagonales égales. Ce trapèze est donc inscriptible. Donc, les trois pieds des hauteurs et les trois points milieux sont sur une même circonférence : ces derniers trois points et un point milieu d'un segment des hauteurs adjacent à un angle forment un quadrilatère ayant deux angles opposés droits ; il est donc inscriptible : d'où l'on conclut que les neuf points mentionnés sont sur une même circonférence, ayant pour rayon $\frac{R}{2}$ et on voit facilement que son centre H′ est situé au milieu de EH.
Menons les trois droites GE, GH′, GH ; on a

$$2\mathrm{GH}'^2 = \mathrm{GE}^2 + \mathrm{GH}^2 - \frac{\mathrm{HE}^2}{2} \text{ (Legendre, livre III, prop. XIV [9])}$$

ou $2\mathrm{GH}'^2 = e^2 + f^2 - \frac{k^2}{2}$;
remplaçant e, f, k par leurs valeurs ([12, p. 81, 82]), on trouve

$$2\mathrm{GH}'^2 = \frac{R^2}{2} - 2R\rho + 2\rho^2, \text{ d'où } \mathrm{GH}' = \frac{R}{2} - \rho;$$

ainsi, la distance GH′ des deux centres est égale à la différence des rayons ; donc **le cercle des neuf points** touche intérieurement le cercle inscrit au triangle ABC.
Menons les droites G′H, G′H′, G′E, on a, par la proposition citée,

$$2\mathrm{G'H'}^2 = \mathrm{G'E}^2 + \mathrm{G'H}^2 - \frac{\mathrm{HG}^2}{2} \text{ ou } 2\mathrm{G'H'}^2 = e'^2 + f'^2 - \frac{k^2}{2}.$$

On peut calculer e', f' directement, mais on peut déduire ces valeurs de celles de e et f en changeant ρ en $-\rho'$, et remplaçant p par $a + b - c$; car

$$\rho' = \frac{2\rho}{a+b-c};$$

ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} e'^2 &= 4R^2 - 4R\rho' + 3\rho'^2 - \frac{(a+b-c)^2}{4}, \\ f'^2 &= R^2 + 2R\rho', \\ k^2 &= 9R^2 - 8R\rho' + 2\rho'^2 - \frac{(a+b-c)^2}{2}; \end{aligned}$$

d'où :

$$2\mathrm{G'H'}^2 = \frac{R^2}{2} + 2R\rho' + 2\rho'^2, \text{ et } \mathrm{G'H'} = \frac{R}{2} + \rho';$$

ainsi, la distance G′H′ des deux centres est égale à la somme des rayons ; donc **le cercle des neuf points** touche extérieurement le centre du cercle exinscrit, tangent au côté AB ; il en est de même pour les deux autres cercles exinscrits, etc.

C.Q.F.D.

Notons que Terquem redémontre le théorème de Feuerbach concernant le fait que le cercle d'Euler est tangent au cercle inscrit et aux cercles exinscrits. Cette démonstration est la deuxième démonstration « historique » de ce beau théorème.

3.5 Autres contributions

Nous avons précédemment cité Euler, Brianchon, Poncelet, Feuerbach et Terquem pour leurs contributions au cercle des neuf points. On peut nommer également cinq autres érudits, férus de géométrie, qui se sont distingués dans l'histoire de ce cercle. Pour les trois premiers cités, il semblerait qu'ils avaient déjà conjecturé l'existence du cercle d'Euler avant même les travaux de Brianchon et Poncelet ou de Feuerbach. Concernant les deux derniers, c'est leur contribution à l'intitulé du cercle qui nous a interpellé.

Nous reprenons ici essentiellement les commentaires donnés dans [3].

Benjamin Bevan, ingénieur civil anglais, spécialiste de la construction de canaux, posa en 1804 la question : « Montrer que le centre O du cercle circonscrit à un triangle ABC est le milieu du segment joignant le centre I du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit du triangle excentral et que le rayon de ce cercle est le double du cercle circonscrivant ABC ». Il laissa son nom au « point de Bevan » d'un triangle, centre du triangle des centres des cercles exinscrits (triangle excentral). On pense qu'il connaissait déjà la cocyclicité des neuf points.

John Butterworth posa en 1807 une question relative au cercle des neuf points dans la revue *Gentleman's Mathematical Companion.* Il donna en 1808, dans cette même revue, une réponse à sa question. Une autre réponse fut donnée par John Whitley.

John Whitley fut l'un des pionniers de la publication d'un résultat sur les propriétés caractéristiques du cercle des neuf points dans la revue *Gentleman's Mathematical Companion* de 1808.

John Casey (1820-1891), mathématicien et professeur irlandais, fut le premier à donner un nom à ce cercle dont tout le monde parlait sans le nommer. Il l'appela tout simplement… « cercle des six points ».

Henri Brocard (1845-1922). Ce géomètre français, qui eut une vision moderne de la géométrie du triangle, donna sans doute le nom de « cercle d'Euler » au « cercle des six points » initial. Il écrivait en 1898 : *« Le cercle des neuf points pourrait s'appeler cercle des trente-et-un points, peut-être même des quarante-trois points ».*

Revenons aux trois premiers mathématiciens nommés.

Nous nommerons ABC le triangle donné au départ ; I le centre du cercle inscrit dans ce triangle ; I_1, I_2, I_3 les centres des cercles exinscrits et O le centre du cercle circonscrit au triangle.

Dans un périodique intitulé *Leybourn's Mathematical Repository*, en 1804, Benjamin Bevan proposa, sous forme d'une question (voir les lignes écrites sur ce mathématicien auparavant), la propriété suivante, pour laquelle on précise que le triangle orthique d'un triangle de référence est le triangle ayant pour sommets les pieds des hauteurs :

« Dans le triangle ABC*, si on appelle* O_0 *le centre du cercle circonscrit à* $I_1I_2I_3$*, alors on a :* $OO_0 = OI$ *; et :* O, O_0 *et* I *sont alignés. De plus :* $O_0I_1 = O_0I_2 = O_0I_3 = 2R$*, où R est le rayon du cercle circonscrit à* ABC *».*

En se rappelant que le triangle $I_1I_2I_3$ a pour orthocentre I et ABC comme triangle orthique, et que le cercle circonscrit à ABC est le cercle des neuf points de $I_1I_2I_3$, on peut déduire de cette propriété (théorème de Bevan) que :

1. le centre du cercle des neuf points est le milieu du segment joignant l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit ;
2. le rayon du cercle des neuf points est la moitié du rayon du cercle circonscrit.

La preuve du théorème de Bevan a été donnée dans [4] par John Butterworth (voir page suivante). Ce dernier posa, dans la revue *Gentleman's Mathematical Companion* de l'année 1807 (publiée en 1806), une question relative au positionnement du centre du cercle circonscrit au triangle excentral. Deux réponses furent apportées en 1808 dans cette même revue : l'une par John Butterworth lui-même et l'autre par John Whitley. La solution de ce dernier montrait que le cercle circonscrit à ABC passe par les pieds des hauteurs de $I_1I_2I_3$, les milieux de deux côtés de $I_1I_2I_3$ et les milieux de deux des segments joignant un sommet à l'orthocentre du triangle $I_1I_2I_3$. Il semble évident, au vu de sa preuve, que Whitley était conscient que le cercle circonscrit à ABC passe par les deux autres points qui lui octroient le nom de cercle des neuf points.

Puisque rien ne prouve qu'Euler soit associé au cercle qui porte aujourd'hui son nom, les trois mathématiciens dont nous venons de parler sont vraisemblablement des pionniers dans l'étude de ce fameux cercle.

(143)

VII. QUESTION 67, *by Mr.* BENJAMIN BEVAN.

In a plane triangle, let w be the centre of a circle paſſing through x, y, and z; then will $Cw = Cc$, and be in the ſame right line; and $wx = wy = wz = 2R$, or the diameter of the circumſcribing circle; where x, y, z, &c. repreſent the ſame points and lines as they denote in the Synopſis of Data, for the Conſtruction of Triangles?

SOLUTION, *by Mr.* JOHN BUTTERWORTH, *Haggate.*

Let S, H and G (fig. 114, pl. 6.) be the points where the lines xc, yc, and zc meet the circumſcribing circle, and draw the radii CS, CH, and CG; also draw xw parallel to CS meeting cC produced in w, and join yw, zw; then w is the centre of a circle paſſing through x, y and z. For it is now well known that $Sc = Sx$, therefore $Cc = Cw$ and $CH = Hy$, conſequently yw is parallel to CH. But CH is $=$ CS, therefore yw is $= wx = 2CS$. In like manner it is proved that $zw = xw = 2CS$; therefore w is the centre of a circle paſſing through the points x, y and z, and conſequently the points c, C, w, are in a ſtraight line, and $Cc = Cw$; and $yw = xw = zw = 2CS = 2R$. *Q. E. D.*

Thus nearly was the propoſition demonſtrated by Meſſrs. Boole, Dawes, *and* Johnſon.

FIGURE 3.8 – *Preuve du théorème de Bevan, par John Butterworth (extrait de [4]).*

Bibliographie

[1] C. Brianchon et J.-V. Poncelet. « Géométrie des courbes. Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données ». In : *Annales de mathématiques pures et appliquées* n° 11 (1820-1821), p. 215-216 (cf. p. 47).

[2] É. Busser. « Le fameux cercle des neuf points ». In : *Bibliothèque Tangente* n° 24 (2005), p. 58-60 (cf. p. 25).

[3] É. Busser. « Quand on ne peut plus dire *"9 points, c'est tout"* ». In : *Bibliothèque Tangente* n° 36 (2009), p. 32-34 (cf. p. 27, 57).

[4] J. Butterworth. In : *New series of the mathematical repository* volume I, partie I (1806), p. 143 (cf. p. 58, 59).

[5] H. S. M. Coxeter et S. L. Greitzer. « Geometry revisited ». In : *MAA (Mathematical Association of America)* (1967), p. 117-119 (cf. p. 30).

[6] L. Euler. « Solutio facilis problematum quorumdam geometricorum difficilimorum ». In : *Novi commentarii Academiae scientiarum imperialis petropolitanae* n° 11 (1767), p. 103-123.

[7] K. Feuerbach. *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren.* Nürnberg : Riegel und Wießner, 1822, p. 33-38 (cf. p. 50-52).

[8] C. Lebossé et C. Hémery. *Géométrie : classe de Mathématiques.* Paris : Fernand Nathan, 1955, p. 37-39, 165-167, 256-257 (cf. p. 30).

[9] A.-M. Legendre. *Éléments de géométrie.* 12e édition. T. III. Paris : Firmin Didot, 1823, p. 73-75 (cf. p. 56).

[10] E. Sandifer. *How Euler did it – The Euler line.* MAA (Mathematical Association of America), 2009 (cf. p. 39).

[11] O. Terquem. « Considérations sur le triangle rectiligne ». In : *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles Polytechnique et Normale* 1re série, tome 1 (1842), p. 196-200 (cf. p. 54).

[12] O. Terquem. « Considérations sur le triangle rectiligne, d'après Euler ». In : *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles Polytechnique et Normale* 1re série, tome 1 (1842), p. 79-87 (cf. p. 54, 56).

Liste des illustrations

Les mathématiques pour quoi faire ?

Mustapha Mokhtar-Kharroubi

Ce texte est une version légèrement remaniée d'une conférence donnée à des élèves de Terminale à l'occasion des journées *« découverte de la recherche en mathématiques »* organisées en novembre 2014 et novembre 2015 par le Laboratoire de mathématiques de Besançon. L'objet de cette conférence était d'illustrer la recherche mathématique par un rapide survol philosophique de l'histoire des mathématiques à travers leurs relations avec la physique moderne. Un des objectifs visés était aussi de sensibiliser les jeunes lycéens à la dimension culturelle des mathématiques, bien loin de la vision utilitaire largement dominante dans le grand public même cultivé. La forme du texte reflète bien entendu le caractère oral de l'exercice.

L'auteur remercie Naoum Daher pour ses commentaires sur une première version du texte. Il remercie particulièrement Stéphane Verjux d'une part pour ses nombreux commentaires et suggestions sur la dernière version du texte et d'autre part pour avoir sollicité les réactions de quelques lycéens ; cela a permis de mieux adapter le contenu. Ce texte a aussi profité des remarques de Martin Meyer et de Claude et Jean Merker que je remercie également.

Sommaire

1. À quoi servent les sciences ?

Si vous êtes présents à cette journée *« découverte de la recherche en mathématiques »* organisée par l'université, c'est que vous n'êtes pas indifférents aux sciences en général et aux mathématiques en particulier. Je prendrai cela comme point de départ de notre rencontre. Je dois vous avouer qu'il n'est pas aisé de vous parler de manière profitable de la recherche qui se fait dans notre Laboratoire et cela pour deux raisons. D'une part, il existe plusieurs domaines des mathématiques sur lesquels travaillent nos différentes équipes de recherche et il est difficile pour un chercheur de vraiment comprendre les travaux d'une autre équipe que la sienne. D'autre part, chaque domaine mathématique est subdivisé en un nombre sans cesse croissant de sous-spécialités très pointues de sorte qu'à l'intérieur d'une même équipe de recherche il arrive très souvent que l'on ait une vue très superficielle de ce que fait un collègue de l'équipe. Cela est dû à l'hyper-spécialisation de la recherche scientifique en général qui la rend difficilement compréhensible même par les chercheurs. Vous parler de ma propre recherche ne serait pas plus utile car j'aurais du mal à vous l'expliquer de manière simple et profitable. De toute façon, cela ne vous donnera aucune idée des différentes recherches au sein de l'équipe *« Équations aux dérivées partielles »* dont je fais partie. Aussi ai-je opté pour un autre exercice plus général et probablement beaucoup plus utile. Je voudrais, si vous le voulez bien, vous parler un peu, de manière informelle et philosophique bien sûr [1], de l'histoire des mathématiques que l'on enseigne à l'université et de leurs liens avec la physique. Cela me sera d'autant plus agréable à faire que le domaine des « Équations aux dérivées partielles » est précisément né des besoins mathématiques fondamentaux de la science moderne. J'espère que cela vous apportera quelques idées générales, vous donnera envie d'en savoir davantage et motivera mieux vos futurs choix d'études.

Vous savez certainement que les mathématiques sont « utilisées » dans de nombreuses autres sciences : la physique bien sûr de manière directe, depuis l'émergence de la science moderne au XVIIe siècle mais aussi, de manière différente, dans les sciences de l'ingénieur, l'informatique, l'économie, la biologie… On peut aussi dire

1. J'évoquerai de très nombreux points historiques mais de manière extrêmement allusive. Il s'agit donc d'un très rapide survol qui n'a pas du tout l'ambition d'entrer dans des détails (qui peuvent être trop longs ou trop compliqués) mais simplement de susciter, je l'espère, la curiosité de lycéens pour certains des points évoqués ici.

sans exagération qu'elles sont omniprésentes, d'une manière ou d'une autre, dans de nombreux objets techniques de la vie courante. D'autre part, un nombre croissant de métiers, scientifiques ou pas, requièrent, à des degrés divers, des connaissances mathématiques et il convient bien sûr que les étudiants soient au courant des débouchés potentiels des formations mathématiques de l'Université même si ce n'est pas mon propos ici. Mais paradoxalement, cette omniprésence des mathématiques dans les sciences comme dans la technologie en occulte la nature et n'aide pas à s'en faire *une idée intéressante*. Il faut dire que la technologie et ses innovations, ces maîtres-mots du discours économique contemporain, occupent l'espace médiatique et offrent des sciences en général, et c'est encore plus vrai des mathématiques, une fausse image essentiellement utilitaire et d'une pauvreté inouïe. Il n'est donc pas inutile de dissiper quelques idées reçues sur *« l'utilité »* de la science. Tout d'abord, la technique est aussi vieille que l'humanité et l'a accompagnée depuis toujours. La domestication du feu, par exemple, remonte à plus de 350 000 ans voire beaucoup plus, et la domestication des animaux ainsi que la naissance de l'agriculture remontent à plus de 10 000 ans, alors que les balbutiements de l'aventure scientifique sont très probablement postérieurs à l'invention de l'écriture soit à peine 4 000 ans avant notre ère. Le lien entre la science et la technique est en fait extrêmement récent et remonte à peine à la fin du XIXe siècle ou début du XXe siècle. Par exemple, le savoir-faire technique des Grecs était le fait d'artisans esclaves et ne devait rien au savoir mathématique extrêmement sophistiqué de l'époque qui n'avait aucune utilité pratique sinon comme activité philosophique réservée à une petite aristocratie de philosophes qui d'ailleurs, comme Platon, méprisaient les « logisticiens », ceux qui ne savent manipuler que les nombres concrets et étaient incapables de s'élever au niveau des abstractions arithmétiques ! De même, à Babylone, l'astronomie était très développée mais n'avait d'autre fonction que religieuse et divinatoire : lire le destin des hommes dans les configurations astrales, c'est-à-dire les positions des astres, planètes, étoiles et constellations dans le ciel. Ce n'est qu'à la Renaissance, en Europe, que naquit le projet moderne de se rendre « maîtres et possesseurs de la nature » où la vision contemplative de la science s'efface progressivement au profit d'une science perçue surtout comme un *pouvoir* d'action sur la nature [2]. Ce projet scientifique est d'ailleurs resté très théorique en dépit du développement de la science moderne. En effet, des découvertes techniques majeures sont restées largement indépendantes de la science. Ainsi, la machine à vapeur, à l'origine de la révolution industrielle anglaise puis européenne, est née bien avant la connaissance des lois de la science thermodynamique [3] qu'elle a d'ailleurs suscitée après coup ! La deuxième moitié du XIXe siècle en revanche a été une transition majeure dans les rapports entre science et technique (ou technologie comme on dit maintenant), notamment dans l'industrie chimique ou électrique. Cette tendance s'est renforcée depuis ce moment-là et la technologie de pointe, comme par exemple l'industrie nucléaire civile ou militaire,

2. C'est aussi l'époque des grandes explorations du monde et… de sa conquête !
3. La science de la chaleur et des machines thermiques.

l'industrie aéronautique, l'électronique…, ne pouvait plus se développer sans lien étroit avec la recherche fondamentale. Pour plus d'information, je vous renvoie à une conférence très intéressante de Jean-Marc Lévy-Leblond (*À quoi sert la science ?*, Bayard, 2008).

Pour en revenir aux mathématiques, il est important d'avoir un peu de recul par rapport à leurs *« applications »* auxquelles on les réduit d'ordinaire et d'essayer d'avoir de cette science une vue plus *interne* beaucoup plus profonde et riche. Cela ne signifie pas bien sûr qu'il faille ignorer les interactions fécondes avec les autres sciences ou le monde industriel. Il faut juste *ne pas confondre le savoir et le savoir-faire*[4] que l'on a tendance à identifier comme si, par exemple, on devait apprécier la théorie de la relativité d'Einstein à son rôle dans la mise au point du GPS[5], ou apprécier la biologie à l'aune des médicaments que l'on peut en attendre[6]. Cette tendance pernicieuse, et probablement irréversible, à mettre en avant les applications vient parfois des scientifiques eux-mêmes pour justifier, aux yeux des pouvoirs publics, les crédits de recherche dont ils ont besoin. Elle tient aussi au fait que la recherche scientifique est devenue tellement spécialisée que les scientifiques eux-mêmes peinent à en saisir les grandes lignes ; il est donc plus aisé d'en donner une vue caricaturale à travers des « applications » accessibles au grand public.

4. Même s'il peut exister parfois des interactions entre elles, on ne doit pas confondre la science et la technologie ; il s'agit de *deux mondes* différents.

5. Le fonctionnement du GPS repose sur la géolocalisation très précise par satellites qui nécessite une compréhension extrêmement fine du temps fournie par la théorie de la relativité.

6. C'est là toute la question de la place sans cesse plus large de la technoscience (c'est-à-dire la science au service d'impératifs technologiques dont on attend des retombées économiques) qui risque, à terme, de marginaliser la science comme production de savoirs, mue par des intérêts intellectuels non marchands. Bien au delà de ce petit texte, je conseille de consulter autant que possible le très beau *Dictionnaire culturel des sciences*, Éditions du Seuil, Regard, 2001 (sous la direction de N. Witkowski).

2. Mathématiques pures ou appliquées ?

Il est courant de séparer les mathématiques en mathématiques pures, c'est-à-dire la production de connaissances théoriques, et mathématiques appliquées, soit l'application de ces connaissances aux autres sciences par exemple. Cette séparation est largement artificielle car les mathématiques appliquées ne sont pas une simple application de résultats théoriques connus à des questions issues des autres sciences (physique, informatique, …). Très souvent, on doit construire des outils mathématiques adaptés à ces questions pour pouvoir les résoudre. Et c'est là de la recherche mathématique à part entière. En ce sens, les autres sciences contribuent souvent au développement des mathématiques en leur posant des questions théoriques (et parfois pratiques) inédites. En fait, la distinction, si l'on y tient vraiment, relève plutôt d'un état d'esprit : le mathématicien pur développe les mathématiques pour elles-mêmes en résolvant des questions « internes » qui viennent de la théorie existante tandis que le mathématicien appliqué développe aussi les mathématiques mais à travers des problèmes provenant d'autres sciences. Une fois le problème issu d'une autre science formulé en langage mathématique, sa résolution n'est pas pour autant facile et enrichit tout aussi bien les mathématiques. Les problèmes faciles, on dit *triviaux* dans notre jargon, sont généralement évités par les chercheurs. Les deux états d'esprit sont complémentaires et se retrouvent parfois chez la même personne : il faut répondre aux problèmes « internes » posés par la théorie mathématique existante mais aussi renouveler les mathématiques par des problèmes nouveaux venant par exemple des autres sciences sous peine de sclérose de la théorie qui se met à « tourner à vide [1] ». L'histoire des sciences contient des exemples de domaines mathématiques qui se sont « éteints » faute de problèmes significatifs à étudier.

1. Les progrès mathématiques, qu'ils soient modestes ou importants, consistent souvent en des *« inflexions »* de la recherche liées aux interactions d'un domaine mathématique avec un domaine voisin ou à l'étude de nouveaux problèmes issus des autres sciences.

C'est pourquoi le bon mathématicien est toujours à la recherche de problèmes *« intéressants*[2] ». En 1900, dans une très célèbre conférence à Paris, Hilbert, l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, disait : *« Un nouveau problème, lorsqu'il tire son origine du monde extérieur, est comme un sauvageon qui ne se développe et ne porte des fruits que lorsqu'il a été greffé avec tous les soins de l'art du jardinier sur la souche mère, c'est-à-dire sur les connaissances mathématiques que nous possédons complètement. »*

2. Un problème est considéré comme intéressant quand sa résolution n'est pas élémentaire et fait progresser les mathématiques par exemple en introduisant de nouvelles notions et une nouvelle méthode permettant de résoudre d'autres problèmes ou permettant une *« compréhension plus profonde »* de problèmes déjà résolus par d'autres méthodes.

3. Un peu d'histoire

Je voudrais maintenant rappeler, de manière très succincte bien sûr, quelques grandes étapes de l'évolution des mathématiques et leurs remarquables interactions avec la physique. Si toutes les civilisations antiques (Égypte, Mésopotamie, Chine, ...) ont dû, pour leurs besoins pratiques (architecture, arpentage, etc.) développer des procédés de calcul arithmétique et de mesure des grandeurs, seuls les Grecs [1], à partir du VI^e siècle avant notre ère, ont su créer un mode de pensée *systématique et non utilitaire* inédit basé sur l'idée de *démonstration*. Bien entendu, les Grecs n'ont pas inventé les mathématiques ; mais partant des savoirs antérieurs, notamment ceux des Égyptiens et des Babyloniens, ils ont porté les mathématiques à une perfection unique dans l'Antiquité qui a perduré quasiment jusqu'au XIX^e siècle [2]. Les *Éléments* d'Euclide [3] résument le savoir mathématique (géométrie et arithmétique) accumulé durant plusieurs siècles et présenté de manière déductive et axiomatique [4]. Les Grecs ne manipulaient pas des nombres à proprement parler comme nous le faisons aujourd'hui mais plutôt des *rapports de grandeurs homogènes*, longueurs, aires planes, volumes, poids, etc. et étaient convaincus que deux grandeurs homogènes étaient *commensurables*, c'est-à-dire qu'il existait une grandeur de même type dont elles étaient des multiples entiers, ce qui signifie que leur rapport est rationnel $\frac{p}{q}\cdot$ La découverte des irrationnels, par exemple le rapport de la diagonale du carré à son côté, ne les a pas perturbés pour autant et ils ont continué à manipuler rigoureuse-

1. Ce terme ne renvoie pas à la seule Grèce classique mais au *monde hellénistique*, du pourtour méditerranéen notamment, où les élites étaient de culture grecque ; Alexandrie, en Égypte, était alors le grand centre intellectuel du monde méditerranéen.

2. Voir l'article de Jean-François Dortier : *Y a-t-il eu un miracle grec ?* paru dans le Hors-série de la revue « Sciences humaines » intitulé *Histoire et philosophie des sciences*, n° 31, janvier-février 2001.

3. Euclide vivait à Alexandrie au début du III^e siècle avant notre ère. Ses *Éléments* consistent en treize livres sur la géométrie, l'arithmétique et l'algèbre géométrique (la résolution des problèmes algébriques par des constructions géométriques).

4. Cela veut dire que, mis à part quelques *notions primitives* (c'est-à-dire non définies) comme par exemple le point, la droite, le plan, *« appartenir à »*, *« être entre deux points »*, ... et des *axiomes* (ce qui est considéré comme évident) comme par exemple le fait qu'il existe une droite (et une seule) passant par deux points donnés, tous les énoncés mathématiques des Éléments d'Euclide (les théorèmes) sont déduits de manière logique les uns des autres.

ment ces rapports « comme si » c'étaient des nombres (rationnels). Ils savaient, par des constructions géométriques, faire des calculs sur ces grandeurs : additionner, multiplier, diviser, etc. Grâce à des génies comme Eudoxe ou Archimède, ils savaient aussi calculer des aires, des volumes par une technique ingénieuse, la méthode d'exhaustion, qui préfigure notre calcul intégral moderne. Ils savaient résoudre des équations (elles n'étaient pas formulées comme nous le faisons actuellement) par des procédés géométriques… En dépit de ce savoir prodigieux, la notion de *fonction*, qui est incontournable aujourd'hui, était étrangère aux Grecs comme d'ailleurs notre numération de position actuelle et son zéro ! À la suite de la chute de l'empire romain d'Occident, on a assisté à une éclipse du savoir mathématique grec qui a alors péniblement perduré dans l'empire byzantin [5]. C'est à partir du VIIIe siècle, avec l'éclosion de la civilisation arabo-musulmane, au contact notamment des civilisations byzantine, perse et indienne, que le savoir mathématique a repris son essor pendant plusieurs siècles avant d'être transmis à son tour aux Latins à partir du XIIe siècle [6]. L'essor tardif de l'algèbre est dû notamment à l'absence de notations (abréviations) commodes. L'usage de lettres, à partir de la Renaissance, pour désigner des inconnues a été une véritable *libération* et a permis un progrès inouï : la notion de fonction (polynomiale) émerge lentement ; on apprend accidentellement à manipuler les nombres dits *imaginaires* « comme s'ils existaient » pour résoudre des équations polynomiales du troisième et quatrième degrés. Les mathématiciens de cette époque ne se doutaient pas que de tels nombres existent bel et bien, au même titre que les nombres entiers, et allaient jouer un rôle considérable en mathématiques et en physique. Ces nombres, appelés nombres complexes depuis, forment un ensemble noté $\mathbb{C}$, plus grand que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, où des équations qui n'ont pas de solutions réelles (dans $\mathbb{R}$) peuvent avoir des solutions complexes (dans $\mathbb{C}$). Ainsi l'équation $x^2 + 1 = 0$ sans solution dans $\mathbb{R}$ (il n'existe pas de nombre réel dont le carré est égal à -1) en a deux dans $\mathbb{C}$ notées i et $-\mathrm{i}$.

La méthode des coordonnées qui apparaît au XVIIe siècle avec Descartes (mais aussi Fermat) consiste à représenter un point du plan par un couple de nombres, ses coordonnées. Elle a permis de transformer les problèmes de géométrie en « problèmes d'algèbre » en travaillant avec « les équations des figures » ; par exemple une droite du plan a pour équation (avec a ou b non nul)

$$ax + by + c = 0$$

un cercle a pour équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

etc. L'idée d'une grandeur dépendant d'une autre et que l'on représente par un

5. Curieusement, la grande civilisation romaine n'a pas participé au développement des sciences en général et des mathématiques en particulier.

6. Voir le chapitre 5 du livre de l'historien A. Djebbar *Une histoire de la science arabe* (Éditions du Seuil, 2001) sur l'apport arabe aux mathématiques. Rappelons que dans l'empire arabo-musulman, la langue arabe (« l'anglais » de l'époque !) était la langue savante des musulmans, juifs ou chrétiens de l'empire.

graphique apparaît déjà au XIV^e siècle chez Oresme et sa conjonction avec la méthode des coordonnées a fini par familiariser avec l'idée de fonction

$$x \longmapsto y = f(x)$$

que l'on peut représenter par une courbe ou graphique.

Le concept de fonction est à la base de la plus grande invention mathématique : *le calcul infinitésimal.* Ce calcul provient de deux préoccupations apparemment assez différentes :

1. Déjà Euclide, en enserrant un cercle entre deux suites de polygones réguliers *inscrits* et *circonscrits*[7] d'aires respectives p_n et q_n, a pu montrer que

   $$(q_{n+1} - p_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2}(q_n - p_n)$$

   en exhibant ainsi une suite d'intervalles emboîtés ($[p_{n+1}, q_{n+1}]$ inclus dans $[p_n, q_n]$) dont la longueur se rapproche de zéro à mesure que n augmente, ce qui lui a permis de calculer l'aire du disque comme étant l'unique valeur comprise dans tous ces intervalles. Il s'agit de la méthode dite d'exhaustion, due probablement à Eudoxe, qui a permis à ce dernier de montrer par exemple que le volume d'un cône de révolution est égal au tiers de celui du cylindre de mêmes base et hauteur. Cette méthode est reprise au XVII^e siècle, notamment par Fermat, pour calculer l'aire comprise sous le graphe des fonctions puissances $x \longmapsto y = x^n$.

2. À cette même époque, on s'intéressait aussi, notamment avec Fermat, à la détermination des *tangentes* à une courbe représentant une fonction $f(x)$; ce type de calcul a partie liée avec ce que l'on appelle depuis la *dérivée*

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

   définie comme une *limite* de quotients où le numérateur *et* le dénominateur tendent simultanément vers zéro. C'est la maîtrise de calculs liés à ces *passages à la limite* qui a ouvert une nouvelle ère des mathématiques. Les notations habituelles de cette dérivée de f par rapport à x sont

   $$f'(x) \text{ ou } \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x).$$

Ce sont Newton et Leibniz, indépendamment l'un de l'autre, qui ont formalisé la notion de dérivée, inventant ainsi *le calcul infinitésimal.* Ce calcul permet alors de

7. Euclide inscrit dans un cercle un carré P_1 puis, en prenant successivement les milieux des arcs sous-tendus, des polygones $P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ à 8, 16, …, $2^{n+1}, \ldots$ côtés. Il considère aussi les polygones circonscrits $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ dont les côtés sont tangents au cercle aux sommets des polygones inscrits.

définir correctement la notion clé de vitesse *instantanée* $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)$ (la dérivée de la fonction position $t \longmapsto y(t)$ par rapport au temps t) et d'accélération *instantanée* $a(t) = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)$ (la dérivée de la fonction vitesse $t \longmapsto v(t)$ par rapport au temps t) à la base de la mécanique newtonienne qui prenait alors le relais des travaux de Kepler et Galilée. Ainsi l'accélération est la dérivée *seconde* de la fonction position $t \longmapsto y(t)$ par rapport au temps t (on dérive deux fois) que l'on note aussi $a(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)$. La loi fondamentale de Newton

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

qui relie la force $\overrightarrow{F}$ agissant sur un point matériel (de masse m) et son accélération $\overrightarrow{a}$ a permis alors de retrouver les lois de Kepler sur les trajectoires elliptiques des planètes du système solaire et de faire d'innombrables autres découvertes. C'est ce prodigieux outil qui a manqué aux Grecs pour édifier *une théorie du mouvement* alors qu'ils avaient une remarquable compréhension des *équilibres statiques*[8].

Le lien entre les calculs d'aire sous des courbes et celui de tangentes à des courbes devint clair quand on a réalisé que si l'on note $F(x)$ l'aire située sous la courbe représentative de f entre, disons, les abscisses 0 et x, alors la dérivée de cette nouvelle fonction $x \longmapsto F(x)$ n'est autre que la fonction $f(x)$. On dira alors que F est une primitive de la fonction f. Ainsi, l'aire située sous la courbe représentative de f entre les abscisses a et b sera donnée par $F(b) - F(a)$ et sera notée plus tard comme *intégrale*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cela a constitué une étape majeure dans l'évolution des mathématiques et de leurs applications. La notion de limite et avec elle la notion d'intégrale (*intégrale de Riemann*), sous-jacente à tout cela, ne seront quant à elles correctement comprises qu'au XIXᵉ siècle. La mécanique newtonienne, basée alors sur le calcul infinitésimal (on dit aussi le calcul différentiel), prit son essor tandis que sa *mathématisation* de plus en plus poussée fut poursuivie par des générations de grands mathématiciens pour faire face aux nombreux problèmes issus de la mécanique céleste.

En particulier, l'étude des *équations différentielles* (où figurent une fonction inconnue $t \longmapsto y(t)$ d'une variable t et ses dérivées) du *premier* ordre comme par exemple

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$$

(où apparaît juste la dérivée première $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$) ou du *second* ordre comme par exemple la

8. Voir par exemple l'hydrostatique et la théorie des leviers d'Archimède.

loi fondamentale de Newton

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F(y)$$

(où apparaît la dérivée seconde $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$) va alors se développer.

En physique apparaissent naturellement des fonctions de plusieurs variables. Par exemple, la température T à la surface de la Terre dépend du point x (l'endroit où on la mesure) mais aussi du temps t (le moment où on le mesure) ; c'est donc naturellement une fonction $(t,x) \longmapsto T(t,x)$ de plusieurs variables. De même, la vitesse V d'un fluide (un océan ou l'atmosphère) dépend des coordonnées (x,y,z) du point où on la mesure mais aussi du temps t ; c'est donc naturellement une fonction $(t,x,y,z) \longmapsto V(t,x,y,z)$ de plusieurs variables. Très vite, l'idée de dériver des fonctions de plusieurs variables, par exemple de deux variables

$$(x,y) \longmapsto f(x,y),$$

par rapport à *chacune* des variables (on fixe une variable et on dérive par rapport à l'autre) notées

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

(et appelées les *dérivées partielles* de f), fit son chemin, en particulier pour les besoins de la mécanique des « milieux continus », comme les fluides, introduisant ainsi des *équations aux dérivées partielles*, c'est-à-dire des équations où figurent une fonction inconnue de plusieurs variables et ses dérivées partielles. Parmi ces équations figurent notamment les équations de Navier-Stokes et les équations d'Euler qui jouent un rôle central dans la compréhension du mouvement des océans ou de l'atmosphère terrestre et donc finalement dans la compréhension de la météorologie et du climat. Le XIXe siècle a vu la compréhension des phénomènes électriques et magnétiques et leur synthèse, par Maxwell, sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles qui porte son nom [9]. Au même moment naquit la théorie cinétique des gaz [10], avec Maxwell et surtout Boltzmann, en vue de donner un nouveau fondement à la thermodynamique basé sur l'analyse statistique des particules, créant ainsi une *mécanique statistique*. Contrairement aux équations différentielles, les équations aux dérivées partielles sont beaucoup plus compliquées à résoudre et n'ont commencé à être comprises qu'au début du XXe siècle avec l'invention d'un nouveau domaine des mathématiques, *l'analyse fonctionnelle* [11]. Mais n'allons pas trop vite ! Les fonctions

9. Les phénomènes électromagnétiques à la base des télécommunications sont régis par les équations de Maxwell.

10. Cette théorie propose un modèle physique permettant de comprendre les propriétés *macroscopiques* d'un gaz (par exemple sa pression, sa température, etc.) à partir de l'analyse des mouvements *microscopiques* des molécules de ce gaz.

11. Les équations différentielles ou aux dérivées partielles issues de la physique se sont enrichies au cours du XXe siècle d'autres types d'équations issus notamment de la biologie mathématique qui, en plus des dérivées partielles, font intervenir des termes dits *intégraux* (rendant compte de phénomènes biologiques *non locaux*) ; on a là un exemple de *renouvellement* dans la recherche mathématique.

de la variable *complexe* $f(z)$ (où $z = x+\mathrm{i}y$ est complexe, i vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$) dérivables au sens complexe (on dit aussi holomorphes), c'est-à-dire telles que la limite

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe, étudiées au XIXᵉ siècle notamment par Cauchy, ont révélé des propriétés mathématiques inouïes qu'utilisent depuis tous les scientifiques. Après la naissance du calcul différentiel et l'usage généralisé des limites, on a commencé à manipuler des « sommes infinies » comme *limites* de sommes finies (on dit des séries) et des produits infinis (comme *limites* de produits finis) de nombres mais aussi de fonctions. Ainsi la merveilleuse formule d'Euler

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1^s}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^s}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)\cdots} = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots \frac{1}{n^s} + \cdots$$

(où $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ est la suite des nombres premiers, c'est-à-dire ceux qui n'ont pas de diviseurs hormis eux-mêmes et 1) qui exprime, sous la forme d'un produit infini, la fonction zêta (ζ) de Riemann (définie pour $s > 1$)

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots \frac{1}{n^s} + \cdots$$

La fonction zêta se prolonge à toutes les valeurs complexes $s \neq 1$ et joue un rôle important en *théorie des nombres* pour la compréhension de *la répartition* des nombres premiers. Une conjecture [12] (l'hypothèse de Riemann), concernant la localisation des racines complexes de cette fonction [13] et qui remonte à plus de 150 ans, vaudrait probablement la médaille Fields, la plus haute distinction en mathématiques, à celui ou celle qui la résoudrait !

Les sommes infinies de fonctions trigonométriques $x \longmapsto \cos(nx)$ et $x \longmapsto \sin(nx)$ appelées aussi *séries de Fourier*

$$\sum_n \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \tag{3.1}$$

jouèrent ainsi un rôle très important dans la résolution des équations aux dérivées partielles comme par exemple l'équation *des ondes*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 0$$

ou celle de *la chaleur*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 0 \tag{3.2}$$

12. Une conjecture est un énoncé dont on a de « bonnes raisons » de penser qu'il est juste mais dont on n'a pas encore la preuve mathématique.

13. Les racines de ζ sont les nombres complexes s tels que $\zeta(s) = 0$.

(écrites ici en une seule variable d'espace x). Le XIX^{e} siècle a aussi été une période d'introduction d'une *rigueur* accrue en mathématiques notamment en Analyse grâce à Cauchy et Weierstrass : clarification de la notion de limite, construction rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, clarification de la notion de fonction etc. [14]. Ainsi, à la fin du XIX^{e} siècle, Hilbert axiomatise la géométrie d'Euclide en la débarrassant définitivement du recours à l'intuition qui l'avait toujours accompagnée [15]. L'arithmétique de son côté est axiomatisée par Peano [16]. On assiste aussi à un renversement de perspective où c'est le concept de *nombre entier* qui va se retrouver au fondement des mathématiques et non plus la géométrie. L'étude des points x où une série de Fourier ne converge pas a conduit Cantor à la construction d'*une théorie des ensembles infinis* qui sera utilisée au XX^{e} siècle pour refonder la mathématique tout entière. Grâce à Cantor, *l'infini* (actuel) et ses paradoxes qui avaient tant tourmenté les philosophes (et les théologiens) depuis l'Antiquité est devenu objet de science ouvrant des perspectives inouïes en mathématiques, ce qui n'a pas échappé à Hilbert qui s'est alors exclamé : *« Nul ne doit nous exclure du Paradis que Cantor a créé »* ! Le XIX^{e} siècle a aussi connu l'émergence de géométries non-euclidiennes qui ne respectent pas le postulat (« évident ») d'Euclide qui veut qu'à partir d'un point extérieur à une droite donnée D il passe une droite et une seule parallèle à D. L'existence de telles géométries tout à fait cohérentes mais néanmoins très différentes de notre géométrie habituelle a fini par convaincre les mathématiciens que « la vérité » d'une théorie, une géométrie par exemple, ne réside pas dans le « monde physique », retirant ainsi à l'univers mathématique tout fondement physique ; l'axiomatisation de la géométrie d'Euclide par Hilbert va d'ailleurs pleinement dans ce sens (cela ne va pas sans poser de redoutables problèmes philosophiques sur *la signification d'une « vérité mathématique » et son rapport au réel* et a donné naissance à des courants philosophiques à l'intérieur même des mathématiques qu'il n'est pas possible d'évoquer ici). Au début du XX^{e} siècle, la relativité générale d'Einstein, basée sur des équations aux dérivées partielles, fournira une profonde explication de la gravitation par la géométrie (non euclidienne) de l'espace-temps [17] dont les fondements mathématiques avaient été posés par Riemann quelques décennies auparavant.

L'étude des séries de Fourier (3.1) a révélé que les fonctions trigonométriques $x \longmapsto \cos(nx)$ et $x \longmapsto \sin(nx)$ avaient des propriétés « d'orthogonalité » qui rappelaient tout à fait celles des vecteurs de notre espace usuel à trois dimensions.

14. Il faut dire que toutes ces notions, perçues très intuitivement, étaient entourées de beaucoup de vague conceptuel et par conséquent manipulées sans grande rigueur par les mathématiciens.

15. En géométrie classique, on raisonne sur des figures. De la sorte, on s'aide de ce que « l'on voit » sur la figure. Il arrivait parfois au Moyen Âge que, comme seule démonstration, on se contentait de dire « *on voit que…* ». Or une preuve rigoureuse se doit d'être menée *indépendamment des figures*. Hilbert a explicité toutes les *notions primitives* et tous les *axiomes* et a reconstruit toute la géométrie d'Euclide de manière rigoureuse et abstraite (sans figures !).

16. Peano a explicité des *objets primitifs* et des *axiomes* pour construire rigoureusement l'ensemble des entiers naturels à la base de l'arithmétique.

17. Ce n'est plus la mystérieuse force d'attraction newtonienne à distance !

L'analogie s'est révélée très féconde et a permis la construction d'espaces de *dimension infinie* (les fonctions deviennent alors des « vecteurs » ayant une infinité de coordonnées) munis d'un produit scalaire, *les espaces de Hilbert*. Grâce à von Neumann, la physique quantique [18], née au début du XXe siècle et pilier de la physique actuelle, a trouvé dans les espaces de Hilbert (et dans ce que l'on appelle les opérateurs auto-adjoints) son fondement mathématique.

Au delà de toute préoccupation utilitaire, les implications intellectuelles et philosophiques de telles avancées conceptuelles sont absolument considérables et ne sauraient être ignorées du grand public cultivé. On est là bien sûr très très loin de la vulgarisation des sciences et des mathématiques par les objets de la technologie qu'ils rendent possible !

Le XXe siècle a poursuivi cette refondation des mathématiques ainsi que leur ramification en diverses théories de plus en plus puissantes, mais aussi de plus en plus abstraites, qui ont permis de résoudre de nombreux problèmes qui étaient hors de portée des outils mathématiques d'avant ; il semblerait même qu'il s'est fait plus de mathématiques depuis les années 1930 que pendant toute la période précédente depuis les Grecs ! Pour plus d'information, je vous renvoie au livre de G. Barthélemy *2 500 ans de mathématiques : l'évolution des idées* (Ellipses 1999) pour une très belle introduction aux grandes étapes de l'évolution des mathématiques. Plus tard, vous pourrez lire avec profit le livre de J. Dieudonné *Pour l'honneur de l'esprit humain* (Hachette, 1987) pour un autre grand voyage fascinant à l'intérieur des mathématiques [19].

Je voudrais terminer ce petit historique par quelques informations complémentaires qui donnent une idée du vertigineux foisonnement intellectuel du début de XXe siècle. L'équation de la chaleur (3.2), qui avait été introduite par Fourier au XIXe siècle pour comprendre la propagation de la chaleur dans les corps matériels, a fait une apparition inattendue dans l'étude du mouvement brownien [20] par Einstein en 1905 (il ne faut pas réduire l'apport d'Einstein à la relativité !) créant ainsi un pont entre la théorie des probabilités [21] et les équations aux dérivées partielles. Notons aussi que Bachelier avait déjà introduit le mouvement brownien en mathématiques financières, dans sa thèse *Théorie de la spéculation* soutenue à Besançon en 1900. Ces

18. Les trois premières décennies du XXe siècle ont vu la mise en place d'une nouvelle physique (la physique quantique) qui allait bouleverser toutes nos connaissances sur la matière.

19. Le titre de ce livre est tiré d'une lettre (citée en partie dans le livre) du mathématicien Jacobi à Legendre : « […]*M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde* […] ».

20. Le comportement erratique des particules de pollen dans un liquide observé par le botaniste R. Brown en 1827.

21. La théorie des probabilités montre que le hasard n'est pas synonyme de chaos mais obéit à des lois. Sa version moderne a été formalisée par Kolmogorov dans les années 1930 grâce à l'invention par Lebesgue, au tout début du XXe siècle, d'une nouvelle théorie de l'intégrale qui généralise celle de Riemann.

études du mouvement brownien ont permis au physicien Perrin [22] de faire différentes expériences cruciales *validant l'hypothèse de l'existence des atomes* (très contestée durant le XIX^e siècle par les tenants de la thermodynamique, les « énergétistes »), en estimant le nombre d'Avogadro [23], et permettant ainsi l'essor de la physique statistique inaugurée notamment par Boltzmann. Comme on le voit, il y a là beaucoup plus que de simples « interactions » entre les mathématiques et la physique ! !

À vrai dire, les mathématiques sont très loin d'être un simple langage en physique théorique : elles se font *« outils de pensée »*. Einstein affirmait déjà : *« Ma conviction est que nous sommes en mesure, grâce à une construction purement mathématique, de trouver les concepts, ainsi que les lois qui les relient, propres à nous ouvrir les portes de la compréhension des phénomènes naturels »*. Ainsi, grâce à l'équation qui porte son nom, Dirac a prédit l'existence de l'antimatière ! On peut en dire autant du boson de Higgs, qui explique pourquoi les particules élémentaires ont une masse, découvert en 2012 au CERN [24] mais qui avait déjà été prédit par des physiciens théoriciens en 1964 ! En 1959, Wigner, l'un des plus grands physiciens du siècle dernier avait prononcé une célèbre conférence intitulée *« la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature »* ! Le physicien et philosophe Étienne Klein [25] parle des mathématiques comme d'un « treuil ontologique » permettant de prédire de nouvelles particules qui sont alors mises en évidence après coup de manière expérimentale.

On voit là l'importance considérable de pans entiers des mathématiques (pas toutes bien sûr) en physique. Bien entendu, le rôle des mathématiques dans les autres sciences est beaucoup moins spectaculaire mais néanmoins de plus en plus important, notamment en informatique, économie, biologie, écologie, etc. Enfin, l'émergence des premiers ordinateurs [26] dans le monde scientifique pour faire de gros calculs [27] depuis la seconde guerre mondiale, puis leur développement massif à la fin du siècle dernier ont propulsé un nouveau domaine des mathématiques, *le calcul scientifique*, à cheval entre les mathématiques et le calcul par ordinateur, qui intervient dans toutes les sciences.

22. Jean Perrin (1870-1942) est physicien et chimiste, prix Nobel de physique en 1926. Sous-secrétaire d'état à la Recherche dans les années 30, il a été à l'origine de la création en 1939 du Centre national de la recherche scientifique (le CNRS). Il est aussi un vulgarisateur de talent ; son livre *Les atomes*, paru en 1913, disponible actuellement chez Flammarion, est un classique qui évoque l'histoire puis le triomphe de la théorie atomique dans ses rapports avec la chimie.

23. Tout gaz (parfait), occupant environ 22 litres sous certaines pression et température, contient le même nombre (dit d'Avogadro) de molécules soit environ 6×10^{23}.

24. Le CERN est le laboratoire européen pour la physique des particules, situé près de Genève, qui abrite le plus grand accélérateur de particules au monde.

25. Voir son livre *Le monde selon Étienne Klein* (Équateurs Essais, 2014) qui reprend ses chroniques sur France Culture.

26. Le mathématicien von Neumann y a contribué.

27. Cela a commencé durant la seconde guerre mondiale à Los Alamos, aux États-Unis, avec le projet Manhattan pour fabriquer la première bombe atomique qui a fait d'innombrables victimes innocentes au Japon. C'est le premier grand projet technoscientifique de l'histoire qui montre que, pour le meilleur comme pour le pire, la science est désormais largement intégrée aux projets industriels et militaires de nos sociétés.

4. Pourquoi apprendre des mathématiques ?

Ces mathématiques « modernes [1] » que j'ai esquissées très rapidement ne se voient pas bien sûr dans les programmes de mathématiques des lycées. D'un point de vue pédagogique, cela se comprend assez bien car il faut avoir une familiarité suffisante avec les mathématiques « traditionnelles » avant de pouvoir entrer utilement dans des théories plus puissantes mais aussi beaucoup plus abstraites. Déjà dans les années 60 et 70, l'introduction d'un usage inutilement abstrait de la théorie des ensembles a créé un malaise puis une réaction salutaire des parents et du corps enseignant. À l'université en revanche, pour ceux qui se destinent à des études de mathématiques, en vue de l'enseignement ou la recherche par exemple, les diverses théories mathématiques sont introduites progressivement et leur enseignement ne pose pas de problème particulier. À vrai dire, une théorie abstraite n'est pas difficile ; c'est plutôt le contraire qui est vrai car une théorie abstraite repose uniquement sur ses quelques axiomes constitutifs et l'on n'est donc pas perturbé par les nombreux détails périphériques qui peuvent encombrer une théorie plus concrète mais aussi plus riche. Le caractère *a priori* abstrait s'estompe progressivement puisque ces différentes théories s'étayent les unes les autres et se donnent mutuellement du sens, ce qui permet leur assimilation. Il y a une profonde unité des mathématiques qui relie ses diverses composantes et qui en fait toute la beauté, et cela n'a pu se vérifier qu'après leur profonde refonte entre les XIX^e^ et XX^e^ siècles. Sachez que les idées sous-jacentes sont « simples » même si bien sûr, comme toujours, il faut un peu de temps pour s'exercer et se familiariser avec ces outils. Enfin, ces théories abstraites ne sont pas du tout gratuites ; elles ont été suscitées et motivées par des problèmes très concrets que l'on ne savait pas résoudre. Comme toujours, la résolution de problèmes en suscite souvent d'autres tout aussi excitants. L'état normal des mathématiques, comme des autres sciences d'ailleurs, est d'être perpétuellement en mouvement et réorganisation. Aussi les problèmes ouverts intéressants, qu'ils soient d'origine

1. En fait, elles ont presque un siècle mais n'ont été intégrées dans l'enseignement supérieur que beaucoup plus tard.

interne ou bien motivés par d'autres sciences ou par l'industrie, abondent dans tous les domaines des mathématiques ; il y a donc du pain sur la planche pour celles et ceux qui souhaitent se lancer dans l'excitante aventure de la recherche mathématique !

Je termine enfin en vous disant qu'au delà de la recherche, l'acquisition d'une vraie culture fondamentale, objectif de nos Licences et Masters, intégrant les composantes essentielles des mathématiques, vous évitera une spécialisation trop prématurée qui risque de vite devenir obsolète et vous aidera à mieux vous adapter à l'évolution de l'économie et des métiers. Que ce soit pour en faire votre métier comme chercheur, comme enseignant ou comme utilisateur dans d'autres sciences, ou même simplement comme utilisateur occasionnel dans d'autres métiers qui en font usage, vous ne pourrez pas ignorer la place des mathématiques comme un élément majeur de la culture de notre temps.

L’analyse *a priori* dans les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin

Florence Falguères

Au niveau international, plus de 6 500 classes (hors situation de crise sanitaire) participent chaque année au Rallye Mathématique Transalpin. Pour constituer les épreuves, les membres de l’association élaborent les problèmes, en rédigent les énoncés mais également une analyse appelée analyse *a priori*. Florence Falguères, en se basant sur son expérience d’enseignante et de membre de l’Association Rallye Mathématique Transalpin, présente cette analyse. Elle montre comment cette dernière pourrait être utile, voire indispensable, à l’enseignant au moment de l’élaboration des séances d’apprentissage.

Sommaire

Introduction

Depuis 2007, le Rallye Mathématique Transalpin (RMT) est proposé aux classes de Sixième, Cinquième et Quatrième de Franche-Comté. L'Association du Rallye Mathématique Transalpin (ARMT [1]) est l'association internationale qui l'organise. Ces joutes mathématiques consistent pour chaque classe inscrite à la compétition à résoudre collectivement sept problèmes en 50 minutes. Depuis que l'ARMT dispose d'une section en Franche-Comté, chaque année j'inscris des classes à ce rallye et je participe aux séances d'évaluation des copies à l'IREM de Franche-Comté. Au fil des années, je fus charmée par la volonté des membres de l'association de faire évoluer l'apprentissage des mathématiques, je me suis de plus en plus investie dans la section RMT de Franche-Comté, puis au sein de l'ARMT. Cette implication dans l'association a beaucoup enrichi mon enseignement.

Les programmes officiels placent la résolution de problèmes au cœur des apprentissages. Mais ce terme « problème » peut être sujet à de multiples représentations. Dans les programmes officiels successifs ou dans les écrits didactiques nous pouvons rencontrer les expressions : *problème ouvert, tâche complexe, problème simple, problème complexe, problème atypique, tâche riche.* Les problèmes de ce rallye sont des problèmes ouverts dont la résolution peut être obtenue selon plusieurs procédures. Les élèves sur leurs copies doivent obligatoirement donner une explication complète de leur raisonnement.

Comme pour toute compétition, il y a dans ce Rallye un classement et des critères d'attribution des points qui, avec une analyse de la tâche de l'élève, constituent l'analyse *a priori* du problème. Cette dernière est fournie aux binômes de professeurs chargés de l'évaluation des copies. Jusqu'à la création de la *Banque de problèmes* [2] du RMT, accessible sur internet, je gardais précieusement les problèmes accompagnés de leurs analyses et je prenais soin d'annoter les productions des élèves pendant ma lecture. Je disposais ainsi d'une petite ressource pour organiser dans mes classes des séances de résolution de problèmes à tout moment de l'année.

1. Il est possible de consulter le site de l'ARMT pour découvrir plus en détail l'association, ses membres et ses activités (entrer *ARMT Association Rallye Mathématique Transalpin* dans un moteur de recherche).

2. Plus de 1 200 fiches constituées chacune d'un problème et d'une analyse sont disponibles sur cette banque [1].

Dans cet article, à partir des regards de chercheurs ou formateurs sur ce que représente l'analyse *a priori*, nous verrons dans un premier temps comment cet outil peut intervenir en amont de la préparation d'une activité de résolution de problème de recherche mais aussi dans l'exploitation didactique de l'activité.

Dans un deuxième temps, après avoir fait un petit retour sur l'historique de l'analyse *a priori* dans le cadre de l'ARMT et en nous appuyant sur trois exemples de problèmes, nous verrons comment les problèmes sont analysés par les membres de l'association.

1. L'analyse *a priori* : approche théorique

L'analyse *a priori* est à l'origine un concept théorique issu de la recherche en didactique des mathématiques. Il est développé par Guy Brousseau (1998) dans la *Théorie des situations didactiques* [2].

Michel Henry [7] en 2002, lors d'une conférence tenue à l'occasion de la sixième rencontre internationale de l'ARMT, présente l'analyse *a priori* d'une situation didactique de la façon suivante :

> L'analyse *a priori* d'une situation didactique est l'ensemble des études qui concourent à :
>
> I – La connaissance du savoir en jeu (analyse épistémologique) ;
>
> II – La description de son fonctionnement dans l'évolution de la situation (analyse didactique) ;
>
> III – Les comportements possibles des élèves et leur gestion (analyse pédagogique).

Michel Henry précise que l'analyse *a priori* est une première analyse, **ensuite affinée à partir d'expériences menées auprès d'élèves qui révèlent souvent des insuffisances dans l'analyse première**.

Jean-Luc Dorier [5] s'intéresse à l'utilisation de l'analyse *a priori* pour la formation des enseignants, il défend l'idée que l'analyse *a priori* peut être un outil pour préparer les activités en classe : *« Avec tout ce que mes élèves savent et ce qu'ils ont à leur disposition* […] *comment la question que je leur pose ou le problème que je leur soumets peuvent-ils prendre du sens* […] *et que doivent-ils apprendre de nouveau pour arriver à le résoudre ? »*

La préparation d'une séance de résolution de problème amène les enseignants à faire des choix qui s'appuient sur leur formation, leur propre expérience, sur ce qu'ils savent des connaissances de leurs élèves, mais aussi sur ce qu'ils savent du problème lui-même. **Résoudre le problème soi-même est une étape indispensable** et permet d'avoir un premier éclairage : est-ce un problème *basique, complexe, atypique* ([9]) ? Quelles sont les compétences et les connaissances que nous avons mobilisées pour le résoudre ? Etc. Les réponses à ces questions ne nous suffiront pas pour autant pour répondre à la question ci-dessus posée par Dorier, pour anticiper et donner sens à tout ce qui émergera pendant le déroulement de la séance en classe. Il semble intéressant de nous pencher sur ce que l'analyse *a priori* peut nous apprendre aussi du « potentiel didactique » du problème, c'est-à-dire les connaissances et les compétences auxquelles les élèves vont faire appel et qu'ils vont être amenés à développer. Cela dit, nous disposons rarement des analyses *a priori* des problèmes que nous envisageons de proposer à nos élèves. Depuis de nombreuses années, si les éditeurs multiplient les ressources à disposition des enseignants (manuels scolaires, cahiers d'exercices, cahiers d'activités, cahiers de compétences, ...), les documents associés réservés aux enseignants ne présentent pas d'analyses *a priori* pour les problèmes proposés. Le terme *solution* s'impose, celle-ci montre une procédure de résolution (souvent experte) suivie de la réponse. L'essence même d'une « solution » semble alors bien loin de celle d'une analyse *a priori.* Quelques ressources pour disposer d'activités accompagnées d'analyses, pourtant existent : les sites des IREM, les revues Panoramath, la *Banque de problèmes* du RMT...

Pour Mercier et Salin, *« l'analyse* a priori *est un outil pour préparer l'observation »* [12, p. 1].

Ce qui est évoqué ci-dessus dans le cadre des recherches en didactique peut s'étendre d'une certaine façon à la gestion de la classe.

Pendant une séance de résolution de problèmes en classe, je pense que l'enseignant gagne à adopter une posture particulière : **ne pas intervenir**, observer l'activité des élèves au sein des groupes, tenter de mémoriser toute hésitation, tout « griffonnage » d'élèves, tout désaccord entre eux, accepter d'être surpris par leur ingéniosité, leur inventivité, mais aussi par leurs oublis (ce que l'enseignant pense qu'ils devraient connaître ou s'en souvenir...). Avant l'institutionnalisation, pendant le temps de mise en commun, mieux informé sur les procédures choisies ou écartées par les élèves, les difficultés rencontrées, l'enseignant pourra encourager ses élèves à s'exprimer dans un climat de confiance, à confronter leurs points de vue pour que les obstacles puissent être repérés et surmontés et qu'ainsi les élèves puissent avoir le sentiment d'avoir assumé jusqu'au bout la responsabilité de la résolution du problème. Cette étape de la séance est délicate, en particulier lorsque c'est la première fois que l'enseignant *met en scène le problème* ou même lorsqu'il décide d'organiser la séance à un moment inhabituel de la progression annuelle. Pour ces raisons, disposer d'une analyse du problème permet d'anticiper comment ce problème peut vivre dans la classe (accessibilité pour les élèves, intérêt en termes de réinvestissement de connaissances, procédures, ...) et éventuellement quelles erreurs et quels obstacles ce problème peut générer : l'idée est de réduire la part d'incertitude pour utiliser au mieux le problème.

2. L’analyse *a priori* dans le cadre de l’ARMT

2.1 Présentation de l’analyse *a priori* des problèmes du RMT

L’ARMT a depuis longtemps accordé une place importante à l’analyse des problèmes qu’elle propose.

Depuis le 6e RMT en 1998, les sections [1] du RMT proposent des problèmes et réfléchissent à une analyse préalable de chacun d’eux, cette analyse est appelée aussi analyse *a priori* par les membres de l’association. L’ensemble est ensuite travaillé au sein d’un groupe spécifique de l’ARMT puis diffusé à l’ensemble des sections pour une dernière relecture.

Pour François Jaquet, créateur du rallye, *« dans le cadre du RMT, cette analyse* a priori *a des buts et destinataires spécifiques, différents des autres analyses* a priori *que fait un enseignant pour la conduite de la classe, que fait un étudiant en formation pour préparer une leçon, que fait un chercheur au moment de la conception d’une expérimentation… Une fois que les hypothèses de ces analyses* a priori *sont confirmées ou réfutées par les analyses* a posteriori, *leurs données devraient constituées une base pour l’élaboration de nouveaux problèmes* [2] *».*

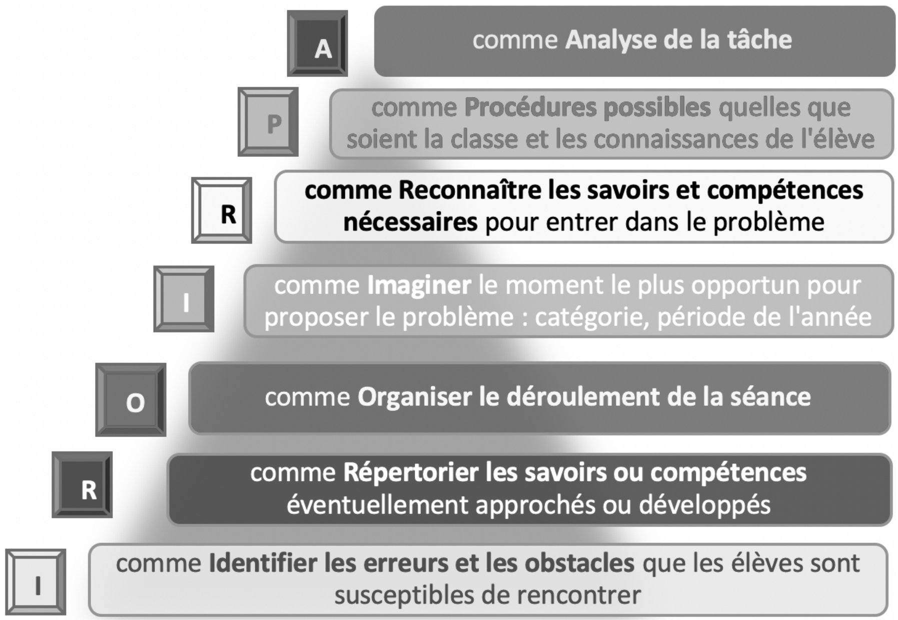
Les analyses *a priori*, comme les énoncés des problèmes, sont donc élaborés en concertation ; ce n’est pas une tâche facile et cela nécessite de nombreux allers-retours et discussions entre enseignants, chercheurs et formateurs.

Par deux fois, cette thématique de l’analyse *a priori* a été choisie pour être travaillée lors de rencontres internationales annuelles de l’association.
En 2013 à Luxembourg : *Analyse* a priori, *analyse* a posteriori, *un parcours circulaire.*

1. En 2019, l’association comptait 21 sections dans 5 pays (Italie, France, Luxembourg, Belgique et Suisse).
2. Extrait de la description du thème de la rencontre d’Alghero en 2019.

En 2019 à Alghero (Sardaigne) : *L'élève face à un problème, l'analyse* a priori *de sa tâche : réfléchir sur son point de vue.*

Le poster réalisé par le groupe IREM-RMT[3] de Franche-Comté et exposé lors de la rencontre internationale en 2019 a été l'occasion d'illustrer l'expression *a priori* par un acrostiche dont les composantes développent les analyses proposées par l'ARMT.



Extrait de l'affiche d'Alghero.

Mais cette analyse *a priori* est construite par des adultes « experts en mathématiques », qui tentent de prévoir le comportement des élèves face à un problème, elle demande à être approfondie.

C'est après la compétition que les productions des élèves sont collectées et l'analyse *a priori* est *enfin* confrontée à ce qui est observé dans les copies : *« c'est à ce moment-là qu'on passe des hypothèses à leur vérification, de l'espace virtuel imaginé par l'adulte au terrain que l'élève lui restitue »* (document de discussion du thème de la rencontre de Luxembourg).

François Jaquet rappelle l'histoire de ce recueil de données : *« Depuis ses débuts, le RMT a construit ses problèmes pour mieux connaître l'état des connaissances de l'élève.*

3. Le groupe IREM de la section RMT de Franche-Comté est constitué de 13 membres enseignants, formateurs ou chercheurs ; il est responsable de l'élaboration d'une des trois épreuves annuelles de cette compétition mathématique internationale. Il est aussi toujours prompt à agir dans le cadre de la formation en organisant des stages ou ateliers destinés aux enseignants ou des interventions auprès des étudiants.

À cet effet, on élabore collectivement un énoncé avec une première analyse de la tâche de l'élève établie a priori *par l'adulte, puis on le propose à des centaines. voire des milliers de classe en demandant à chaque fois aux élèves de décrire leur démarche de résolution puis, après l'attribution de points pour les besoins du "concours" (classement), on analyse* a posteriori, *les copies rendues afin de déterminer les procédures mises en œuvre et obstacles rencontrés.* [...] *Ce n'est qu'à ce moment-là qu'on peut tirer profit des observations relevées sur la* valeur didactique du problème.
Toutes ces constructions, énoncés et données recueillies sur environ 1 300 problèmes proposés en une trentaine d'années, sont regroupées dans la Banque de problèmes *du RMT. Cette "banque de données" est un projet ambitieux, en voie d'élaboration depuis une dizaine d'années. On y trouve actuellement tous les énoncés, comme dans un simple répertoire. Les statistiques des points attribués sont disponibles pour la moitié des problèmes environ, avec les analyses* a priori *qui les accompagnent en attente de leur validation. Les analyses* a posteriori *qui permettront de juger de la valeur didactique d'un problème ne sont encore proposés que pour 10 % seulement des énoncés.*
Tout enseignant intéressé par les apprentissages au travers de la résolution de problèmes peut cependant déjà tirer profit des données recueillies mais surtout, contribuer à enrichir la Banque de problèmes *du RMT. Il lui suffira de choisir un problème qu'il juge bien adapté aux besoins de ses élèves et de communiquer quelques observations sur les procédures, erreurs et obstacles relevés. »*

Par les trois exemples ci-dessous, nous nous limitons à présenter ce qui constitue une analyse *a priori* dans le cadre du RMT.

2.2 Trois exemples

2.2.1 Présentation des problèmes

Premier problème : ***Arthur, son chien et son chat***

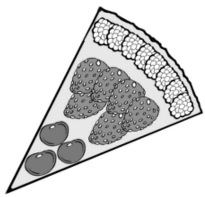
C'est un problème *atypique* de catégories 5, 6 et 7 de la nomenclature internationale (niveaux CM2, 6^{e} et 5^{e} en France) : les élèves de ces niveaux ne disposent pas de procédures expertes pour le résoudre. *« La notion de procédures expertes dépend de ce qui peut être visé à un niveau donné, compte tenu des connaissances travaillées au niveau considéré »* [4].

ARTHUR, SON CHAT ET SON CHIEN (Cat. 5, 6, 7) © ARMT 2017
Arthur se pèse avec son chien dans les bras. La balance affiche 43 kg.
Puis, il pose le chien à terre et il se pèse avec son chat dans les bras. La balance affiche 39 kg. Il met ensuite son chien et son chat ensemble sur la balance. Celle-ci affiche alors 10 kg.
Pour finir, Arthur se pèse tout seul.
Qu'affiche la balance quand Arthur se pèse tout seul ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Deuxième problème : ***La tarte aux fruits***

C'est un problème *atypique* pour les élèves qui n'ont pas encore travaillé sur la notion d'angle, mais un *problème complexe* pour ceux qui ont les connaissances. En effet l'élève devra convoquer [4] la connaissance *angle* qui n'est pas citée dans l'énoncé [3].

LA TARTE AUX FRUITS (Cat. 4, 5, 6, 7) © ARMT 2016
Pauline a invité ses amis pour fêter son anniversaire.
Son papa a confectionné une excellente tarte aux fruits et, pour contenter tout le monde, il l'a découpée en parts de mêmes dimensions et avec le même nombre de fruits sur chaque part de tarte.
La fête est finie, Pauline constate qu'il reste une seule part de tarte. Sur cette part elle compte 17 fruits et elle s'exclame : *« Tu as vraiment utilisé beaucoup de fruits pour faire la tarte, papa ! »*
Ce dessin représente la part de tarte posée sur la table, vue du dessus :



Combien de fruits le papa de Pauline a-t-il utilisés en tout pour décorer la tarte entière ?
Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

4. Dans ce problème c'est « le résolveur » qui doit « convoquer » la connaissance, ce n'est pas le problème ni le contexte (utilisation d'une connaissance qui vient d'être travaillée en classe) qui amène l'élève à faire appel à cette connaissance.

Troisième problème : ***Le collage***

Il a été donné à des étudiants dans le cadre de la formation initiale de professeurs de mathématiques.

LE COLLAGE (Cat. 7, 8, 9, 10) © ARMT 2019 André et Béatrice doivent réaliser ensemble un collage. Pour cela, les deux enfants achètent des feuilles de couleur. André en achète le double de Béatrice. Mais, avant que les deux enfants se mettent au travail, Béatrice s'aperçoit que pour terminer sa partie du collage elle n'aura pas assez de feuilles. André lui en donne alors 7 des siennes. Béatrice se met au travail, mais abîme une feuille qu'elle décide de jeter. À ce moment, les deux enfants ont le même nombre de feuilles. **Combien de feuilles ont acheté en tout André et Béatrice pour réaliser le collage ?** **Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

2.2.2 Description

Les énoncés des problèmes sont rédigés en même temps que leur analyse *a priori*. Cette dernière comporte les deux éléments suivants :

La tâche mathématique, dans le cadre des analyses *a priori* rédigées par les membres de l'ARMT, est souvent très concise. Elle se limite presque toujours à une phrase (annexes 2, 3 et 4) et décrit les procédures mathématiques attendues pour produire le résultat demandé.

L'analyse de la tâche de l'élève quant à elle est partagée en deux parties, une tâche d'appropriation et une tâche de résolution (annexe 2).

La tâche d'appropriation décrit de quelle façon l'élève peut aborder le problème. Sa rédaction invite le(s) rédacteur(s) de l'énoncé du problème à prendre du recul : imaginer comment l'élève peut comprendre le problème à partir de l'énoncé (l'histoire qui se joue), sa partie narrative et ce qui peut l'accompagner, dessin, schéma ou image, comment l'élève va s'engager dans le processus de modélisation, élaborer des inférences pour construire son raisonnement.

La tâche de résolution regroupe les procédures possibles pour résoudre le problème mais sa rédaction dans le cadre du RMT ne fait apparaître que des procédures susceptibles d'être appelées par les élèves engagés dans la compétition. Dans le cas du problème *Arthur, son chien et son chat* (annexe 1), aucune mise en équation n'est proposée, car cette procédure de résolution du problème n'est pas disponible pour des élèves de ces catégories 5, 6, 7. Toutefois il arrive que l'analyse des productions (analyse *a posteriori*) permette d'enrichir l'analyse *a priori* par de nouvelles procédures inattendues. Pour deux problèmes comportant des similitudes, on peut s'appuyer pour l'un sur l'analyse *a posteriori* de l'autre. Prudemment, l'analyse *a priori* de ce problème précise : *« il y a bien évidemment de nombreuses autres façons de trouver la réponse »*. Par exemple, une procédure parfois choisie par les élèves qui pourrait être ajoutée à cette analyse *a priori* est celle qui associe le fait que la somme des masses *Arthur-Chien* et *Arthur-Chat* est égale à la somme des masses 2*Arthur* et *Chat-Chien*.

Les tâches d'*appropriation*, de *résolution* et nous pourrions même ajouter de *rédaction*, n'incombent pas à un élève isolé puisque la résolution des problèmes du RMT nécessite une mise en commun du travail des élèves.

Jusqu'à maintenant les obstacles et les erreurs n'apparaissaient pas dans l'analyse *a priori* transmise au moment de la diffusion des épreuves, toutefois de nombreux problèmes font l'objet d'études complémentaires basées sur les productions des élèves (suite à l'épreuve officielle ou lors d'expériences complémentaires) et ces obstacles et erreurs sont alors explicités dans des articles ou des fiches disponibles dans la *Banque de problèmes*.

Grâce à la fiche RMT du problème *Arthur, son chien et son chat* (annexe 2), on peut remplir ce tableau qui reprend les éléments de l'acrostiche de l'analyse *a priori* présenté dans la première partie de cet article.

A	comme **Analyse de la tâche mathématique**	Elle est citée dans l'analyse *a priori* proposée en annexe.
P	comme **Procédures possibles** quelles que soient la classe et les connaissances des élèves	Si le niveau de la classe correspond à la catégorie dans laquelle le problème est proposé, les procédures sont *a priori* celles citées en annexe, une analyse *a posteriori* permettra de réajuster.
R	comme **Reconnaître les savoirs et compétences nécessaires** pour entrer dans le problème.	Les quatre opérations et la maîtrise de la lecture.
I	comme **Imaginer** le moment le plus opportun pour proposer le problème : catégorie, période de l'année	Éventuellement en début d'année pour des élèves de Sixième : ce serait l'occasion de ré-expliciter les six compétences mathématiques, réactiver le travail en commun et réinvestir les savoirs et les connaissances nécessaires.

O	comme **Organiser le déroulement de la séance**	Après un temps de recherche individuelle, prévoir des temps d'échanges entre élèves pour valoriser et encourager l'engagement de chacun. Une mise en commun gérée par l'enseignant conduit à l'institutionnalisation des savoirs.
R	comme **Répertorier les savoirs ou compétences** éventuellement approchés ou développés	Les six compétences : *Chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.*
I	comme **Identifier les erreurs et les obstacles** que les élèves sont susceptibles de rencontrer.	Les élèves pensent parfois à tort qu'une réponse s'obtient à partir d'une procédure apprise par cœur ; d'autres erreurs et obstacles peuvent être rencontrés par les élèves dans ce problème, l'analyse *a posteriori* des copies éclairera cet aspect.

Même si l'enseignant qui souhaite proposer ce problème ne pourra pas faire l'économie de le résoudre et de se questionner sur ce que ses élèves seront en mesure de proposer, les éléments cités ici permettent de mieux organiser, anticiper, observer, exploiter la séance.

Les autres problèmes dont les énoncés sont donnés, peuvent aussi permettre aux enseignants d'évaluer le niveau d'acquisition et de compréhension d'un concept.

Le problème *La tarte aux fruits* (RMT-24.II.06 Cat. 4, 5, 6, 7) [5] peut être proposé pour vérifier la solidité du concept d'angle ou le problème *Le collage* (RMT-27.I.14 cat 7, 8, 9, 10) [6] le degré d'approche pré-algébrique.

Christine Le Moal, co-responsable du groupe IREM-RMT de Franche-Comté s'est intéressée au problème *La tarte aux fruits*. En s'appuyant sur sa propre expérience et l'analyse *a priori* donnée au moment de l'épreuve, elle a su ensuite exploiter ce problème en dehors du cadre de la compétition. Elle partage son expérience dans un article publié dans la revue de l'APMEP *Au fil des maths* n° 535, dont le titre est : *Le Rallye Mathématique Transalpin* [11].

Si un enseignant s'attend à ce que ses élèves se dirigent naturellement vers la dernière procédure citée (360° ÷ 40° (annexe 3), l'observation des élèves nous montre que les

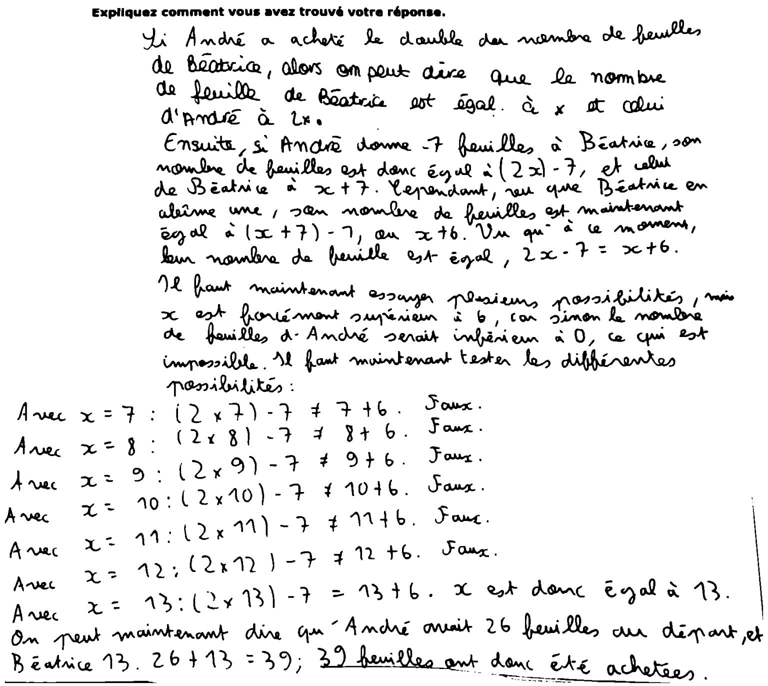
5. Ce qui signifie : problème du 24e RMT, portant le numéro 6 de la deuxième épreuve, pour les catégories 4 à 7.

6. Problème du 27e RMT, numéro 14 de la première épreuve, pour les catégories 7 à 10.

autres procédures (reports ou reproductions plus ou moins précises de l'angle) sont largement privilégiées même souvent encore en catégorie 7 (classe de Cinquième).

Ces observations questionnent sur la compréhension du concept d'angle, sur l'aisance à diviser une grandeur continue ou encore à modéliser une situation. C'est l'occasion pour l'enseignant de retravailler ces points sensibles des programmes.

Dans le cadre de la formation initiale des enseignants, le problème *Le collage* a été travaillé par un groupe d'étudiants de Master 1 qui se destinent au métier d'enseignant de mathématiques. Il leur a été demandé de préparer une analyse *a priori* de ce problème du rallye, sachant qu'en Franche-Comté il n'a été proposé qu'aux classes de Cinquième et Quatrième (catégories 7 et 8) dans le cadre de la compétition. Sans expérience, les étudiants ont présupposé que les élèves suivraient une procédure avec mise en équation puis résolution d'un système de deux équations à deux inconnues. Cette procédure n'est absolument pas accessible pour des élèves de ces niveaux. La lecture de l'analyse *a priori* rédigée par l'ARMT a amené les futurs enseignants à reconsidérer leur approche. L'étude de l'ensemble des productions des élèves de Franche-Comté qui ont participé au RMT a montré aux étudiants qu'en effet les élèves ne privilégient pas la procédure algébrique pour obtenir la solution même s'ils s'engagent parfois partiellement sur cette voie avec réussite (photo 1) ou sans réussite (photo 2).


Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Si André a acheté le double du nombre de feuilles de Béatrice, alors on peut dire que le nombre de feuille de Béatrice est égal à x et celui d'André à 2x.

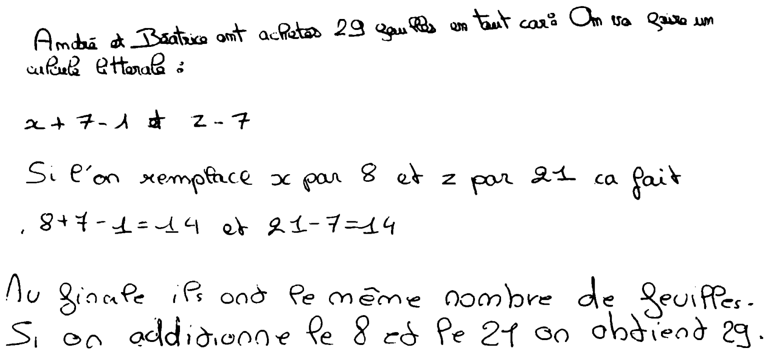
Ensuite, si André donne 7 feuilles à Béatrice, son nombre de feuilles est donc égal à $(2x) - 7$, et celui de Béatrice à $x + 7$. Cependant, vu que Béatrice en abîme une, son nombre de feuilles est maintenant égal à $(x + 7) - 7$, ou $x + 6$. Vu qu'à ce moment, leur nombre de feuille est égal, $2x - 7 = x + 6$.

Il faut maintenant essayer plusieurs possibilités, mais x est forcément supérieur à 6, car sinon le nombre de feuilles d'André serait inférieur à 0, ce qui est impossible. Il faut maintenant tester les différentes possibilités :

Avec $x = 7$: $(2 \times 7) - 7 \neq 7 + 6$. Faux.
Avec $x = 8$: $(2 \times 8) - 7 \neq 8 + 6$. Faux.
Avec $x = 9$: $(2 \times 9) - 7 \neq 9 + 6$. Faux.
Avec $x = 10$: $(2 \times 10) - 7 \neq 10 + 6$. Faux.
Avec $x = 11$: $(2 \times 11) - 7 \neq 11 + 6$. Faux.
Avec $x = 12$: $(2 \times 12) - 7 \neq 12 + 6$. Faux.
Avec $x = 13$: $(2 \times 13) - 7 = 13 + 6$. x est donc égal à 13.

On peut maintenant dire qu'André avait 26 feuilles au départ, et Béatrice 13. $26 + 13 = 39$; 39 feuilles ont donc été achetées.

Photo 1.



André et Béatrice ont achetés 29 feuilles en tout car : On va faire un calcule litterale :

x + 7 - 1 et z - 7

Si l'on remplace x par 8 et z par 21 ca fait

. 8+7-1=14 et 21-7=14

Au finale ils ont le même nombre de feuilles.
Si on additionne le 8 et le 21 on obtient 29.

Photo 2.

2.3 Conclusion

Faire entrer dans ma pratique la résolution de problèmes de recherche pour tenter d'améliorer les apprentissages des élèves qui m'étaient confiés a profondément fait évoluer mes conceptions de l'enseignement. J'accepte davantage que les tâtonnements de mes élèves et leurs ébauches de pistes de recherche soient les points de départ du chemin vers la construction de leurs savoirs. Ce changement de posture nécessite des préparations spécifiques.

Dans l'article ci-dessus, c'est l'analyse *a priori* qui a été présentée comme outil, car d'un point de vue historique c'est en s'appuyant sur les analyses réalisées *a priori* et en les confrontant aux productions des élèves que l'ARMT a voulu aller plus loin et mettre à disposition des enseignants des fiches pour chaque problème dans sa *Banque de problèmes.*

Cependant, beaucoup d'autres questions se posent : comment orchestrer une mise en commun des procédures suivies par les élèves après leur recherche d'un problème ? Comment institutionnaliser les savoirs construits pendant ces séances ? Comment organiser un parcours d'apprentissage à partir de problèmes ? Et bien d'autres encore… Même si l'ARMT travaille aussi sur ces questions — en témoignent les nombreux articles publiés dans sa revue *La gazette de Transalpie*[7] — il semblerait que ce soit par le biais de la formation initiale et continue que les enseignants seront plus largement sensibilisés à cette approche. L'IREM de Besançon propose chaque année de telles formations.

7. Les onze numéros de *La Gazette de Transalpie* sont consultables sur le site de l'ARMT [6].

Bibliographie

[1] *La* Banque de problèmes *de l'ARMT* (cf. p. 85).

[2] G. Brousseau. *Théorie des situations didactiques (1970-1990).* Grenoble : La pensée sauvage, 1998 (cf. p. 87).

[3] C. Castela. « Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement ». In : *Recherches en didactique des mathématiques* Vol. 28/2 (2008), p. 135-182 (cf. p. 92).

[4] R. Charnay. « L'analyse *a priori*, un outil pour l'enseignant ». In : *Math-École* n° 209 (2003), p. 19-25 (cf. p. 91).

[5] J.-L. Dorier. « L'analyse *a priori* : un outil pour la formation d'enseignants (exemple d'un jeu issu des manuels suisses romands de première année primaire) ». In : *L'enseignement des mathématiques à l'école : où est le problème – Actes du XXXVI*e *colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques (COPIRELEM)* (2010) (cf. p. 87).

[6] *La Gazette de Transalpie* (cf. p. 97).

[7] M. Henry. « Remarques sur l'analyse *a priori* ». In : *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin* Vol. 3 (2002) (cf. p. 87).

[8] C. Houdement. « Résolution de problèmes arithmétiques à l'école ». In : *Grand* $\mathbb{N}$ n° 100 (2017), p. 59-78.

[9] C. Houdement. « Le RMT, médiation entre enseignants et résolution de problèmes ». In : *Gazette de Transalpie* n° 4 (2015), p. 7-17 (cf. p. 87).

[10] F. Jaquet et L. Grugnetti. « Les problèmes du RMT : l'élargissement progressif de leurs finalités ». In : *Gazette de Transalpie* n° 4 (2015), p. 59-62.

[11] C. Le Moal. « Le Rallye Mathématique Transalpin ». In : *Au fil des maths* n° 535 (2020), p. 28-34 (cf. p. 95).

[12] A. Mercier et M.H. Salin. « L'analyse *a priori*, outil pour l'observation ». In : *Actes de l'Université d'été de didactique des mathématiques* (1988), p. 203-236 (cf. p. 88).

Liste des illustrations

Annexes

Annexe 1 : quelques précisions sur l'Association du Rallye Mathématique Transalpin

Extrait de la présentation du RMT sur le site de l'ARMT

Les buts

Le Rallye mathématique transalpin (RMT) est une confrontation entre classes, des degrés 3 à 10 de la scolarité obligatoire (élèves de 8 à 15 ans) dans le domaine de la résolution de problèmes de mathématiques. Il est organisé par « l'Association Rallye Mathématique Transalpin » (ARMT, constituée au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse) dont les statuts précisent :

« L'ARMT est une association culturelle dont le but est de promouvoir la résolution de problèmes pour améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques par une confrontation entre classes et de contribuer à la formation des enseignants et à la recherche en didactique des mathématiques, par ses analyses et ses données recueillies dans le domaine de la résolution de problèmes. »

L'association ne poursuit pas de but lucratif.

Les activités de l'association peuvent se déployer partout dans le monde.

Le RMT propose aux élèves :

- de faire des mathématiques en résolvant des problèmes ;
- d'apprendre les règles élémentaires du débat scientifique en discutant et défendant les diverses solutions proposées ;
- de développer leurs capacités, aujourd'hui essentielles, à travailler en équipe en prenant en charge l'entière responsabilité d'une épreuve ;
- de se confronter avec d'autres camarades, d'autres classes.

Pour les maîtres, associés à toutes les étapes dans la mesure de leurs disponibilités, le RMT permet :

- d'observer des élèves (les leurs lors de l'épreuve d'essai et ceux d'autres classes lors des épreuves suivantes) en activité de résolution de problèmes ;

- d'évaluer les productions de leurs propres élèves et leurs capacités d'organisation, de discuter des solutions et de les exploiter ultérieurement en classe ;
- d'introduire des éléments de renouvellement dans leur enseignement par des échanges avec d'autres collègues et par l'apport de problèmes stimulants ;
- de s'engager dans l'équipe des animateurs et de participer ainsi à la préparation, à la discussion et au choix des problèmes, à l'évaluation en commun des copies, à l'analyse des solutions.

Pour l'enseignement des mathématiques en général et la recherche en didactique, le RMT offre une source très riche de résultats, d'observations et d'analyses.

Ces finalités se sont définies au cours des années et font l'objet d'adaptations permanentes, lors des rencontres internationales ou régionales.

Les épreuves

Sans règles du jeu, il ne peut y avoir de comparaisons productives. Le rallye établit donc un contrat entre l'équipe d'animateurs, les maîtres et les classes participantes, dont voici les termes essentiels.

Le RMT propose des épreuves de résolution de problèmes par classes entières, réparties en huit catégories, des degrés 3 à 10 (8 à 15-16 ans). La décision de participer au concours est prise conjointement par la classe et le maître, après une épreuve d'essai au cours de laquelle les uns et les autres ont pu saisir les enjeux d'une résolution collective de problèmes, à la charge des élèves seulement.

Organisation pratique

Le *Rallye mathématique transalpin* s'organise selon quatre étapes :

- une **épreuve d'essai**, en novembre ou décembre. Cette étape est placée sous l'entière responsabilité des maîtres qui choisissent les problèmes, les proposent selon les principes du rallye, en discutent avec leurs élèves, s'occupent de l'inscription et de son financement.
- une **première épreuve**, en janvier ou février, selon le calendrier établi au niveau des sections et selon entente entre les maîtres concernés, titulaires et surveillants ;
- une **deuxième épreuve** en mars ou avril (avec les mêmes modalités que pour la première épreuve) ;
- une finale, en mai ou juin, regroupant les classes d'une même section (régionale ou nationale) ayant obtenu les meilleurs scores dans les deux épreuves (en général 3 par catégorie, mais ce nombre peut varier en fonction de l'effectif des classes participantes).

Annexe 2 : exemple n° 1

ARTHUR, SON CHAT ET SON CHIEN (Cat. 5, 6, 7) ©ARMT 2017
Arthur se pèse avec son chien dans les bras. La balance affiche 43 kg.
Puis, il pose le chien à terre et il se pèse avec son chat dans les bras. La balance affiche 39 kg. Il met ensuite son chien et son chat ensemble sur la balance. Celle-ci affiche alors 10 kg.
Pour finir, Arthur se pèse tout seul.
Qu'affiche la balance quand Arthur se pèse tout seul ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*
Tâche mathématique
Trouver un nombre parmi trois dont les sommes deux à deux sont 43, 39 et 10.
Analyse de la tâche

Tâche d'appropriation

— Faire le lien entre les trois masses des personnages et les trois nombres, « poids », que la balance afficherait pour chacun d'eux puis comprendre que les indications affichées sur la balance correspondent aux masses d'Arthur et son chien, 43 kg, d'Arthur et son chat 39 kg, de son chien et son chat 10 kg.
— De l'information apportée par les trois pesées connues, déduire qu'Arthur pèse moins de 39 kg et que chaque animal pèse moins de 10 kg et que le chien est plus lourd que le chat.
— Quitter le contexte des grandeurs physiques et passer aux relations entre les nombres.

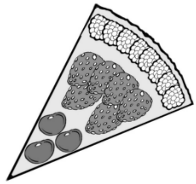
Tâche de résolution

— Procéder par essais : faire une hypothèse sur le poids de chacun des trois personnages, effectuer les sommes des poids (Arthur + le chien, Arthur + le chat, le chien + le chat) et examiner si elles vérifient les informations données. Si ce n'est pas le cas, faire d'autres hypothèses en prenant plus ou moins en compte les déductions possibles à partir des calculs précédemment effectués, jusqu'à trouver le poids d'Arthur qui est 36 kg.
— Ou, faire le choix d'une information et procéder par inventaire des possibles (en se limitant aux nombres entiers), par exemple pour les poids du chien et du chat : $(1;9)$, $(2;8)$, etc. Pour chaque possibilité trouvée, utiliser une seconde information pour déduire le poids du 3^{e} personnage, par exemple Arthur, et vérifier que les 3 poids ainsi déterminés vérifient la 3^{e} information ou, à partir de chacune des 2^{e} et 3^{e} informations, calculer le poids du 3^{e} personnage qui doit être le même.
— Ou, des deux premières pesées, déduire que le chien pèse 4 kg de plus que le chat. Sachant que le chien et le chat pèsent ensemble 10 kg et que la différence entre les deux masses est 4 kg, celles-ci ne peuvent pas être 5 et 5, 6 et 4… On trouve ainsi 7 et 3. En retirant la masse d'un animal de la pesée faite par Arthur avec cet animal dans les bras, on trouve qu'Arthur pèse $43 - 7$ ou $39 - 3$, soit 36 kg.

Il y a bien évidemment de nombreuses autres façons de trouver la réponse.

Annexe 3 : exemple n° 2

LA TARTE AUX FRUITS (Cat. 4, 5, 6, 7) ©ARMT 2016
Pauline a invité ses amis pour fêter son anniversaire.
Son papa a confectionné une excellente tarte aux fruits et, pour contenter tout le monde, il l'a découpée en parts de mêmes dimensions et avec le même nombre de fruits sur chaque part de tarte.
La fête est finie, Pauline constate qu'il reste une seule part de tarte. Sur cette part elle compte 17 fruits et elle s'exclame : *« Tu as vraiment utilisé beaucoup de fruits pour faire la tarte, papa ! »*
Ce dessin représente la part de tarte posée sur la table, vue du dessus :



Combien de fruits le papa de Pauline a-t-il utilisés en tout pour décorer la tarte entière ?
Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique
Déterminer le nombre de secteurs circulaires superposables en lesquels un disque a été partagé, à partir du dessin d'un des secteurs (dont l'angle mesure 40°), pour trouver le nombre total d'objets disposés sur le disque, sachant que sur chaque secteur il y en a 17.

Analyse de la tâche

- Se représenter la tarte et comprendre qu'elle a été partagée en parts égales, de la même forme, de mêmes dimensions, avec le même nombre de fruits. Comprendre que les parts étant l'une à côté de l'autre, deux parts voisines ont un « côté » en commun.
- Comprendre que pour trouver le nombre total de fruits utilisés, il faut reconstituer la tarte entière, de manière à connaître le nombre de parts en lesquelles la tarte a été découpée.
- Pour reconstruire la tarte, on peut procéder de différentes manières.
  - Découper une part égale à celle qui est dessinée (à partir d'une autre copie de l'énoncé ou en utilisant une feuille de papier calque), la poser à côté de la part donnée, en marquer le contour et continuer de même à reporter cette part sur le dessin de proche en proche, jusqu'à compléter toute la tarte. Compter le nombre des parts ainsi dessinées (9).
  - Ou bien, à partir du dessin d'une part, dessiner une autre part égale en pliant la feuille le long d'un côté de la première part et en traçant l'autre côté par transparence et continuer ainsi de suite.
  - Ou bien, tracer un cercle ayant pour centre la « pointe » de la part de tarte et pour rayon le « côté » de cette part, reporter l'arc ou la corde ou l'angle au centre, compter le nombre d'arcs, de cordes ou de secteurs angulaires.
  - Ou bien, mesurer au rapporteur l'angle de la part de tarte (40°) et déterminer le nombre de parts en calculant $360 \div 40 = 9$.
  - Il est aussi possible de dessiner les parts de tarte « à l'œil », mais cette procédure a peu de chances de donner le nombre exact de parts.
- Multiplier le nombre de fruits d'une part par le nombre de parts : $17 \times 9 = 153$.

Annexe 4 : exemple n° 3

LE COLLAGE (Cat. 7, 8, 9, 10) ©ARMT 2019

André et Béatrice doivent réaliser ensemble un collage. Pour cela, les deux enfants achètent des feuilles de couleur.

André en achète le double de Béatrice. Mais, avant que les deux enfants se mettent au travail, Béatrice s'aperçoit que pour terminer sa partie du collage elle n'aura pas assez de feuilles. André lui en donne alors 7 des siennes. Béatrice se met au travail, mais abîme une feuille qu'elle décide de jeter. À ce moment, les deux enfants ont le même nombre de feuilles.

Combien de feuilles ont acheté en tout André et Béatrice pour réaliser le collage ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Déterminer le triple d'un nombre qui, augmenté de 6, vaut 7 de moins que son double.

Analyse de la tâche

- Établir à partir de la lecture de l'énoncé les relations entre les nombres de feuilles d'André et de Béatrice avant et après l'échange : initialement André en a le double de Béatrice, puis le nombre de feuilles d'André diminué de 7 égale celui de Béatrice augmenté de 6 (une feuille a été détruite).
- Comprendre que le nombre de feuilles qu'a achetées André ne peut pas être inférieur à 8 (André en donne 7 à Béatrice) et que c'est un nombre pair (André a le double de feuilles de Béatrice).
- Se rendre compte que le nombre de feuilles achetées en tout est un de plus que le nombre de feuilles utilisées (Béatrice en a jeté une).
- Comprendre donc que les deux enfants ont le même nombre de feuilles depuis qu'André, qui initialement en avait le double de Béatrice, lui en a donnée 7 et qu'elle en a jeté une.
- Procéder par essais organisés, en faisant l'hypothèse qu'André a acheté 8 feuilles et donc Béatrice 4, augmenter de deux en deux (parce que le nombre de feuilles d'André est pair) et tester les nombres, pour finalement arriver à 26 pour André (en utilisant éventuellement un tableau ou un schéma ou un support graphique) et conclure que le nombre de feuilles achetées est 39 après être arrivé à l'égalité $26 - 7 = (13 + 7) - 1$.

Ou

- Procéder comme ci-dessus mais de façon inorganisée.

Ou

- Désigner par x le nombre de feuilles qu'a achetées Béatrice et écrire l'équation $2x - 7x + 6$ qui a pour solution 13. En déduire qu'André en a acheté 26 et donc qu'au total $13 + 26 = 39$ feuilles ont été achetées.

  Il est aussi possible de faire le choix de deux inconnues pour faciliter la mise en équation et éviter des essais non organisés.

Cette revue est à la fois le bulletin de liaison de l'IREM de Besançon et une revue scientifique à destination d'un public national et international intéressé par la recherche sur l'enseignement des mathématiques : elle assume à la fois un enracinement local autour de Besançon, de l'enseignement primaire à l'université, et un public francophone international.

Elle a vocation à publier

- les productions de l'IREM de Besançon et des autres IREM ;
- les actes de colloques des IREM ;
- les articles d'enseignants et chercheurs du Département de mathématiques de Besançon et d'autres lieux de recherche et d'enseignement des mathématiques.

Elle promeut l'interdisciplinarité et invite le regard des sciences de l'éducation, de l'histoire, de la sociologie, de l'anthropologie, de la philosophie, de la physique, de la biologie pour maintenir les mathématiques vivantes.

La variété du public visé engage la revue à être particulièrement ambitieuse quant à l'accessibilité des textes publiés tout en maintenant leur qualité scientifique.

Soumettez vos articles à mathematiquesvivantes@univ-fcomte.fr !

Presses universitaires de Franche-Comté
Université de Franche-Comté
47 rue Mégevand – 25030 BESANCON CEDEX – France

Impression : *Messages SAS* – 111 rue Vauquelin – 31100 TOULOUSE

Dépôt légal : septembre 2022

Institut de **R**echerche sur l'**E**nseignement des **M**athématiques
de l'Université de Franche-Comté

Département de Mathématiques - UFR Sciences et Techniques

16 route de Gray - 25030 BESANCON CEDEX - France

Tél. : 03 81 66 62 25 - Courriel : iremfc@univ-fcomte.fr

Site : http://www-irem.univ-fcomte.fr/

ISSN 1141-913x – 5 €

Presses universitaires de Franche-Comté
http://presses-ufc.univ-fcomte.fr