

Mathématiques



vivantes

Bulletin de l'IREM de Besançon
n° 74 – 2025
Presses universitaires de Franche-Comté

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Université Marie et Louis Pasteur

Directrice : Marine Rougnant

Département de Mathématiques – UFR Sciences et Techniques
16 route de Gray – 25030 BESANCON CEDEX – France

Tél. : 03 81 66 62 25 – Courriel : iremfc@univ-fcomte.fr

Site : <http://www-irem.univ-fcomte.fr>

Comité de rédaction

Francine Athias

Nathalie Koehl

Stefan Neuwirth

François Pétiard

Courriel : mathematiquesvivantes@univ-fcomte.fr

ISSN papier : 1141-913X

Ce bulletin est publié sous licence  4.0

Mathématiques vivantes

Bulletin de l'IREM de Besançon
n° 74 – 2025

Presses universitaires de Franche-Comté
n° 1686

Comité de rédaction

Francine Athias
Nathalie Koehl
Stefan Neuwirth
François Pétiard

Courriel : mathematiquesvivantes@univ-fcomte.fr

Presses universitaires de Franche-Comté, 2025
Ce bulletin est publié sous licence CC-BY 4.0

ISSN papier : 1141-913X

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
de l'Université Marie et Louis Pasteur

Mathématiques vivantes

Bulletin de l'IREM de Besançon

n° 74 – 2025

Sommaire

Sommaire	ici même
Qui est qui ?	ii
Éditorial	1
L'émergence du concept d'idéal chez Richard Dedekind	
<i>Gwennaëlle Vidal</i>	4

Qui est qui ?

Gwennaëlle Vidal a obtenu en 2015 le master 2 de mathématiques approfondies de l'université de Franche-Comté par l'intermédiaire du centre de télé-enseignement universitaire, puis a complété son cursus avec le master 1 d'informatique avancée en 2019. Elle s'est finalement reconvertie dans la création de contenus digitaux et exerce actuellement comme rédactrice et journaliste web indépendante, spécialisée dans la gastronomie et la santé.

Éditorial

Ce numéro de *Mathématiques vivantes* est une monographie dédiée à une histoire de l'apport de Richard Dedekind à la théorie des idéaux et à la signification de sa définition ensembliste de l'idéal d'un anneau. Elle propose une synthèse originale des travaux d'Hourya Benis Sinaceur, Philip Kitcher, David Charles McCarty et Emmylou Haffner au sujet de cet acte inaugural des mathématiques du xx^e siècle, qui repèrent dans les notions d'ensemble et d'application le fondement de la pensée mathématique. La modernité de la présentation de Dedekind continue à nous interpeller, et Gwennaëlle Vidal montre qu'elle se base sur une philosophie originale des mathématiques qui échappe aux étiquettes traditionnelles (la philosophie critique de Kant, le logicisme de Frege et Russell, le formalisme d'un Nicolas Bourbaki). On n'a pas fini de réfléchir à cette philosophie pour mieux comprendre les fondements de la démarche des mathématiques contemporaines, largement empruntée à Dedekind.

Expliciter les choix de Dedekind permet aussi d'envisager des démarches alternatives :

- alors que Dedekind et Cantor se situent dans la continuité du concept de variété emprunté au mémoire « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie » de Bernhard RIEMANN (1869) pour concevoir celui d'ensemble, mais n'en gardent que la relation d'appartenance (voir p. 36), il semble qu'aujourd'hui des structures plus riches comme les préfaisceaux et les topos capturent mieux la matière mouvante des mathématiques ;
- alors que la notion de nombre idéal de Kummer (par opposition à nombre réellement existant) devient concrète pour Dedekind sous la forme d'un sous-ensemble de l'anneau considéré, on peut estimer qu'il est plus concret d'enrichir l'anneau de plus grands communs diviseurs formels selon des règles pour les introduire et pour les éliminer d'une manière qui conserve les relations de divisibilité de l'anneau, parce qu'elle ne nécessite pas de théorie des ensembles : cette histoire-là, qui prend aussi pour point de départ le théorème de décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers, est présentée dans NEUWIRTH 2021.

Stefan Neuwirth.

L'émergence du concept d'idéal chez Richard Dedekind

Gwennaëlle VIDAL

Révision : Stefan NEUWIRTH

Table des matières

Table des matières	4
Remerciements	6
Introduction	7
1 La naissance de l'idéal en théorie des nombres	9
1.1 Une perte « d'unicité »	9
a. Le cas des entiers relatifs	9
b. Le cas des entiers de Gauss	10
c. Le cas de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$	11
1.2 Les « nombres idéaux » de Kummer	12
a. « L'accident » des entiers cyclotomiques	12
b. Les nombres idéaux : le principe	13
c. Le cas général des entiers algébriques	15
d. Les insuffisances du nombre idéal selon Dedekind	16
1.3 La substitution du nombre idéal	19
a. Un exemple concret : le rôle de 2 dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$	19
b. Une première solution « constructive »	20
c. Une seconde solution « ensembliste »	21
1.4 La création de l'idéal	22
a. L'idéal et ses propriétés	22
b. Lien avec le « principe de permanence »	23
c. L'arithmétique de l'idéal : une réponse au problème d'unicité	29
2 Le rôle fondamental de l'arithmétique	32
2.1 La place de l'arithmétique dans les mathématiques	32
a. L'antériorité épistémologique de l'arithmétique	32
b. Un penchant global pour l'arithmétisation	34
c. Tout réduire à l'arithmétique ?	37
2.2 Aux origines de l'arithmétique	38
a. Une définition des entiers naturels	38

b.	Les opérations de la pensée	39
2.3	L'arithmétique au service des concepts	40
a.	Un second concept dedekiniien : la coupure	40
b.	Les points communs entre coupure et idéal	42
3	La création de concepts	44
3.1	Le rôle de l'induction : du particulier au général	44
a.	L'élaboration des concepts en science	44
b.	Le cas particulier des concepts en mathématiques	46
c.	Les limites de l'induction	48
3.2	Le lien entre rigueur et généralité	49
a.	L'idéal de rigueur : le « principe de Dedekind »	49
b.	Une quête de généralité	52
c.	Généralité et rigueur, deux principes interdépendants	53
3.3	La position novatrice de Dedekind	54
a.	Dedekind : un constructiviste caché ?	55
b.	Dedekind : kantisme ou logicisme ?	58
	Conclusion	66
	Annexe. Un parti pris contre l'idéal	68
A.1	L'idéal en 1871 : quelques remarques	68
A.2	L'idéal : un concept indispensable ?	70
A.3	La réception de la théorie des idéaux	72
	Glossaire des différents courants mathématiques	74
	Bibliographie	78
	Liste des illustrations	80

Remerciements

Il m'aurait été impossible de rédiger ce mémoire¹ sans adresser quelques mots aux personnes qui m'ont soutenue, de près ou de loin, dans mon parcours mathématique et qui m'ont donné la force de me dépasser chaque jour un peu plus.

Tout d'abord, je voudrais remercier chaleureusement Stefan Neuwirth, qui s'est gentiment proposé pour encadrer ce mémoire, et qui, j'en ai bien conscience, s'y est considérablement investi en m'offrant un cadre « idéal » de travail, sans jeu de mots. Sa patience, sa minutie, et son perfectionnisme m'ont permis d'aller au bout de moi-même et de me remettre sans cesse en question. Mais plus encore, il a su parfaitement comprendre les contraintes du télé-enseignement, en me facilitant grandement l'accès aux ressources documentaires. Je lui en suis donc profondément reconnaissante, et garderai un excellent souvenir de cette collaboration.

Par ailleurs, je souhaitais adresser mes sincères remerciements à Henri Lombardi, qui a pris soin d'apporter ses suggestions et ses corrections afin d'améliorer cet écrit.

Bien entendu, je n'ai pas de mots pour exprimer ma gratitude à l'égard de mes parents. J'ai notamment une dette immense envers ma mère, qui a toujours su trouver les mots justes pour me redonner le sourire dans les moments les plus « critiques », et qui m'a encouragée sans relâche lors de l'élaboration de ce travail – et même plus généralement tout au long de ces cinq ans.

Enfin, j'aimerais terminer par un petit clin d'œil à une personne que j'ai toujours gardée en estime et à qui je dois beaucoup : mon professeur de mathématiques de Seconde, Jean-Luc Bauby. Son humour sans faille et son humanité ont fait de lui une rencontre pour le moins marquante, qui a probablement changé le cours de ma vie en me conduisant sur le chemin escarpé mais passionnant des mathématiques.

1. Ce mémoire a été préparé dans le cadre du master 2 mathématiques approfondies de l'université de Franche-Comté par l'intermédiaire du centre de télé-enseignement universitaire et soutenu le 28 aout 2015.

Introduction

Dans ce mémoire, nous nous attacherons à relater de la manière la plus fidèle et objective possible l'émergence d'une structure incontournable de l'algèbre moderne : l'idéal d'un anneau.

Nous devons préciser avant toute chose que cette invention remarquable ne peut, comme toute découverte scientifique, être réduite à l'œuvre, fortuite ou immédiate, d'un seul individu. Elle est le fruit d'influences scientifiques et philosophiques complexes, s'inscrivant dans un contexte historique bien défini, où plusieurs acteurs ont, directement ou indirectement, apporté leur pierre à l'édifice.

Cependant, nous pouvons nous accorder sur le fait que ce concept est défini pour la première fois par un mathématicien pour le moins singulier, Richard Dedekind (1831-1916), dans le X^e supplément de la 2^e édition de la *Zahlentheorie* de Dirichlet. Il fait ensuite l'objet d'un examen plus détaillé dans son traité « Sur la théorie des nombres entiers algébriques », publié en français en quatre parties en 1876 et 1877 dans le *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*. Il prend ainsi naissance au cœur d'un problème de théorie des nombres, visant à unifier les lois de la divisibilité des nombres rationnels avec celles, dirions-nous en termes modernes, de tout anneau d'entiers d'un corps de nombres.

Bien entendu, l'étude de la problématique mathématique sous-jacente est une étape indispensable pour une bonne compréhension du contexte général, mais également pour retracer le cheminement suivi par Dedekind. Nous pourrions ainsi voir se dessiner en filigrane une certaine vision des mathématiques dedekiniennes, qui ne sera pas sans soulever de véritables questions, tant du point de vue scientifique que philosophique.

Il semble donc pertinent de s'intéresser aux fondements mêmes de son raisonnement, en allant puiser dans ses autres écrits ce qui le rapproche et ce qui le démarque profondément de ses contemporains. Nous pourrions alors mettre en lumière la place prépondérante qu'occupe selon lui l'arithmétique dans les mathématiques, son attrait pour la vision ensembliste, mais aussi et surtout son désir de généralité, dans un souci constant de rigueur. On comprendra ainsi pourquoi l'idéal est apparu sous cette forme plutôt qu'une autre, comment il le peut être rapproché d'autres concepts

tel celui de coupure en analyse réelle, et ce que notre mathématicien recherchait véritablement en le « créant ».

Car c'est bien de « libre création » dont il s'agit chez Dedekind ; plus encore, c'est selon lui ce qui rend les mathématiques fécondes. Mais en quoi consiste alors cette opération de l'esprit ? Comment agit-elle ? S'entend-elle comme une « suite de constructions mentales », ce qui ferait de notre mathématicien un intuitionniste caché ? N'est-elle pas de ce fait soumise à certaines restrictions ? Quelle place doit-on alors accorder au « désir logique » de Dedekind, dans cette tension entre liberté et nécessité de la création ? Nous tenterons d'apporter une réponse à ces questions, certes d'une indéniable difficulté mais qui permettront de cerner d'autant mieux l'apport de Dedekind et la genèse de ses concepts.

Cette étude espère ainsi montrer à quel point Dedekind occupe une place particulière dans les mathématiques du XIX^e siècle, au carrefour entre innovation et rigueur, et comment en particulier l'idéal répond à ses exigences, ouvrant par la même occasion la voie à l'algèbre classique et à la théorie des structures.

1. La naissance de l'idéal en théorie des nombres

Nous allons dans cette première partie nous intéresser de manière purement mathématique au problème qui a conduit Dedekind à créer le concept d'idéal. Pour ce faire, nous nous appuierons directement sur son texte fondateur « Sur la théorie des nombres entiers algébriques » (DEDEKIND 1876-1877), mais aussi sur l'article de H. M. EDWARDS (1980) et sur les commentaires de M. A. SINACEUR (1978), qui nous seront utiles pour simplifier ou éclairer certains points délicats de la théorie. Nous introduirons également quelques notations actuelles et détaillerons davantage certains calculs pour rendre le développement plus intelligible.

1.1 Une perte « d'unicité »

a. Le cas des entiers relatifs

La problématique que présente Dedekind dans son texte relève de la théorie des nombres, et se trouve plus précisément liée aux lois de la divisibilité régissant les « nombres rationnels entiers », ou en d'autres termes les éléments de $\mathbb{Z}$.

Dedekind effectue tout d'abord quelques rappels concernant ces lois. Nous savons que $\mathbb{Z}$ est stable par addition, soustraction et multiplication (ce qui lui confère d'ailleurs aujourd'hui une structure d'anneau, mais Dedekind parle expressément de « domaine »). On peut également y définir une division euclidienne, qui dépend entièrement de la multiplication : b divise a si et seulement si il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bc$. Les seules unités de $\mathbb{Z}$, ou autrement dit les éléments inversibles pour la multiplication, sont bien entendu ± 1 .

Avant de poursuivre, nous devons introduire la notion d'élément « indécomposable » (ou en termes modernes, irréductible) d'un anneau : en effet, cette dernière joue un rôle crucial en arithmétique, comme nous pourrons le constater ci-après. Il s'agit des éléments différents des unités, ne pouvant s'écrire comme produit de deux éléments

distincts des unités. Dans le cas contraire, nous parlerons d'élément « décomposable » (ou réductible).

On peut sans perte de généralité se placer désormais sur $\mathbb{N}$, et énoncer ce qui est aujourd'hui connu sous le nom de « théorème fondamental de l'arithmétique », où notre problème prend sa source.

Théorème 1.1 (théorème fondamental de l'arithmétique).

Tout entier naturel > 1 est ou indécomposable, ou peut se décomposer de manière unique en un produit d'entiers naturels indécomposables.

Pourquoi trouve-t-on un tel résultat, en particulier l'unicité sur $\mathbb{N}$?

Ceci provient en grande partie du lemme d'Euclide, énonçant qu'un nombre indécomposable divisant un produit divise nécessairement l'un des deux facteurs ; autrement dit, tout élément indécomposable de $\mathbb{Z}$ est *premier*, au sens qu'il satisfait la conclusion du lemme d'Euclide. La réciproque étant vraie sur n'importe quel anneau, on a donc que ces deux notions coïncident sur les entiers relatifs. Il est alors facile de constater que les éléments indécomposables de $\mathbb{Z}$ sont exactement nos « nombres premiers », c'est-à-dire les éléments $p \in \mathbb{Z}$ divisibles uniquement par ± 1 et $\pm p$.

Précisons enfin pour être complet que le lemme d'Euclide peut être vu comme une conséquence de l'existence de l'algorithme d'Euclide sur $\mathbb{Z}$, qui permet de trouver un plus grand diviseur commun à deux entiers donnés. Signalons que les relations complexes qu'entretiennent l'algorithme d'Euclide et le lemme d'Euclide font l'objet d'une étude approfondie dans PENGELLEY et RICHMAN 2015.

b. Le cas des entiers de Gauss

Dedekind nous expose ensuite un cas plus général de « nombres entiers » découverts par Gauss, et portant d'ailleurs aujourd'hui son nom. Il s'agit des nombres complexes de la forme $x + yi$ où $x, y \in \mathbb{Z}$. Remarquons par ailleurs que cet ensemble, que nous noterons $\mathbb{Z}[i]$, contient en particulier $\mathbb{Z}$.

Comme pour $\mathbb{Z}$, on trouve que $\mathbb{Z}[i]$ est stable par addition, soustraction et multiplication. Il existe de nouveau une relation de divisibilité ainsi qu'un algorithme, somme toute très proche de celui d'Euclide, mais faisant intervenir une application norme

$$N: z = a + bi \in \mathbb{Z}[i] \longmapsto N(z) = (a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2$$

qui est *multiplicative*, c'est-à-dire que l'image d'un produit est le produit des images. On peut alors écrire pour tous $z, m \in \mathbb{Z}[i]$, avec m non nul, que $z = qm + r$, avec $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ et $N(r) < N(m)$. Cet algorithme permet ainsi, comme pour $\mathbb{Z}$, de définir un plus grand commun diviseur à deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$ en un nombre fini d'étapes.

Les unités de $\mathbb{Z}[i]$ sont alors les éléments de norme 1, soit ± 1 et $\pm i$. Les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont donc les éléments z distincts des unités, divisibles uniquement par $\pm 1, \pm i, \pm z$ et $\pm zi$.

Or il s'avère que, de la même manière que sur $\mathbb{Z}$, il y a équivalence entre primalité et irréductibilité sur $\mathbb{Z}[i]$: pour faire simple, l'arithmétique des entiers relatifs s'applique quasiment mot pour mot à celle des entiers de Gauss (comme en témoigne l'algorithme précédent), et le lemme d'Euclide s'en trouve ainsi préservé.

Ainsi, à unité près, on retrouve donc la décomposition unique en produit d'éléments premiers (ou indécomposables). Nous dirions aujourd'hui que les deux domaines ici exhibés sont des anneaux principaux (et même euclidiens), ce qui assure l'existence et l'unicité de la décomposition.

c. Le cas de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Dedekind considère à présent l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{x + \sqrt{-5}y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

On peut une nouvelle fois vérifier sa stabilité par addition, soustraction et multiplication, ce qui lui confère une structure d'anneau. Introduisons une relation de divisibilité dépendant de la norme suivante, encore multiplicative :

$$N : z = a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \mapsto N(z) = (a - b\sqrt{-5})(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2.$$

Les unités sont les éléments de norme 1 : on trouve ± 1 .

On obtient aisément par récurrence sur la norme, en utilisant sa multiplicativité et le fait qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$, que tout élément décomposable de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ peut s'écrire comme produit d'un nombre fini de facteurs indécomposables.

L'existence d'une factorisation en éléments indécomposables étant établie comme précédemment, on s'attend donc logiquement à son unicité. Mais Dedekind mentionne entre autres exemples que

$$6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}).$$

On peut encore croire que les facteurs ci-dessus ne sont pas indécomposables : pourtant les normes de 2, 3, et $1 \pm \sqrt{-5}$ valent respectivement 4, 9 et 6. Dans le cas de 2, s'il existait des éléments $z, z' \neq \pm 1$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ tels que $2 = zz'$, alors nécessairement $N(z) = N(z') = 2$: il existerait alors un couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a^2 + 5b^2 = 2$, ce qui est faux. Un même raisonnement pour les autres facteurs conduit à montrer l'indécomposabilité recherchée. De plus, même à unité près, les quatre facteurs considérés sont distincts : autrement dit, ils ne sont pas « associés ».

Nous venons donc d'obtenir deux représentations différentes pour un même nombre ! Regardons d'un peu plus près cette égalité : nous constatons par exemple que 2 divise le produit $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$, sans diviser aucun des deux facteurs. Ainsi

un nombre indécomposable n'a plus « tout le caractère d'un nombre premier proprement dit » : si dans les cas de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}[i]$, il y a équivalence entre primalité et indécomposabilité, il n'en va pas de même dans ce domaine-ci.

Nous avons donc perdu l'unicité de la décomposition en entiers indécomposables ; c'est, selon les mots de Dedekind, « ici que le point où l'analogie, observée jusqu'ici, avec l'ancienne théorie menace de se rompre pour toujours ».

Mais cela est sans compter sur le génie des mathématiciens de l'époque.

1.2 Les « nombres idéaux » de Kummer

a. « L'accident » des entiers cyclotomiques

C'est en réalité au mathématicien Ernst Kummer (1810-1893) que l'on doit le premier exemple concret de ce phénomène de « perte d'unicité » dans des domaines de nombres plus généraux. Kummer travaille en effet sur les lois de réciprocité, et effectue ainsi de nombreux calculs dans les anneaux d'entiers de corps cyclotomiques. Pour rappel, dans le cas d'un nombre premier p , un tel anneau correspond à l'ensemble des polynômes en ζ_p à coefficients dans $\mathbb{Z}$, où ζ_p désigne une racine primitive p -ième de l'unité (ou autrement dit une racine du polynôme $X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1$). Nous le noterons $\mathbb{Z}[\zeta_p]$.

Il considère plus particulièrement le cas où $p = 23$; on posera pour simplifier $\zeta = \zeta_{23}$. On définit la norme d'un élément $f(\zeta) \in \mathbb{Z}[\zeta]$ comme l'élément de $\mathbb{Z}$ qui est le produit de ses conjugués :

$$N(f(\zeta)) = f(\zeta)f(\zeta^2) \cdots f(\zeta^{22}).$$

Elle est encore multiplicative. L'intérêt profond d'utiliser une nouvelle fois la notion de norme est de se ramener à des entiers relatifs, « délivrés de toute irrationalité », et d'ainsi voir les entiers cyclotomiques conjugués comme facteurs de nombres entiers.

De plus, Kummer parvient à prouver, soit selon EDWARDS (1975) grâce aux travaux de Jacobi sur les entiers cyclotomiques consignés dans son article « Über die complexen Primzahlen, welche in der Theorie der Reste der 5^{ten}, 8^{ten} and 12^{ten} Potenzen zu betrachten sind » (1839), soit selon HAFFNER (2014b) par l'intermédiaire de résultats précédemment établis par Gauss, que la norme de tout élément de cet anneau est de la forme $\frac{x^2 + 23y^2}{4}$, où $x, y \in \mathbb{Z}$.

On peut alors constater qu'aucun élément de $\mathbb{Z}[\zeta]$ n'est de norme 47, car $47 \times 4 = 188$ ne peut s'écrire sous la forme $x^2 + 23y^2$, avec $x, y \in \mathbb{Z}$. Or, après un long calcul, Kummer aboutit à l'égalité

$$N(1 - \zeta + \zeta^{21}) = 47 \times 139.$$

On en conclut alors que l'élément $1 - \zeta + \zeta^{21}$ est irréductible, sinon il existerait un élément de $\mathbb{Z}[\zeta]$ de norme 47. Il n'est pourtant pas premier car il divise 47×139 sans diviser ni 47 ni 139 : en effet, $N(1 - \zeta + \zeta^{21})$ diviserait $N(47) = 47^{22}$ ou $N(139) = 139^{22}$, ce qui n'est pas le cas. Comme dans l'exemple de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, il n'y a plus équivalence entre primalité et irréductibilité, ce qui conduit inéluctablement à la perte d'unicité de la factorisation.

C'est évidemment à son grand regret que Kummer effectue ce constat, car les propriétés d'unicité des décompositions offrent de nombreuses facilités en arithmétique : devoir y renoncer constitue donc un véritable inconvénient pour les calculs, mais fait surtout perdre l'espoir d'obtenir un jour une théorie harmonieuse et unifiée de la divisibilité de toutes les formes « d'entiers ». Kummer n'entend donc pas rester sur cette note discordante, et cherche à tout prix un moyen de pallier cette difficulté pour rétablir une certaine forme d'unicité, même dans un sens plus faible. En effet, il est important de préciser que pour Kummer, les seuls *vrais* nombres sont les entiers relatifs, et de ce fait, préserver l'analogie entre ces nombres et les entiers cyclotomiques est un souci majeur. Plus encore, les nombres seraient soumis selon lui à des propriétés « permanentes » et « accidentelles » : si l'arithmétique du nombre relatif est vue comme faisant partie des premières, la non-adéquation entre les entiers cyclotomiques et les nombres relatifs relève davantage d'un accroc dans la théorie, qui doit donc être complètement éliminé afin de dévoiler les véritables propriétés qui font l'essence du nombre.

Heureusement, grâce à une persévérance sans faille, Kummer parvient à « sauver » l'unicité en créant de nouveaux objets : les « nombres idéaux ».

b. Les nombres idéaux : le principe

Son idée majeure consiste à décomposer tout entier cyclotomique de $\mathbb{Z}[\zeta]$ en produit de facteurs premiers de l'anneau, et à introduire, quand ces derniers viennent à manquer, des facteurs premiers dits « idéaux » : ils n'existent pas dans l'anneau considéré, mais remplissent la même fonction qu'un premier usuel.

Pour illustrer ce fait, reprenons l'exemple des deux décompositions de $N(1 - \zeta + \zeta^{21})$:

$$(1 - \zeta + \zeta^{21})(1 - \zeta^2 + \zeta^{19}) \cdots (1 - \zeta^{22} + \zeta^2) = 47 \times 139,$$

en se souvenant du fait que $\zeta^{23} = 1$.

Supposons que $f(\zeta) \in \mathbb{Z}[\zeta]$ soit un facteur premier de 47. Alors $N(f(\zeta))$ divise 47^{22} , donc est une puissance de 47. De plus, $f(\zeta)$ divise $N(1 - \zeta + \zeta^{21})$, donc par définition d'un élément premier, divise l'un des 22 facteurs de $N(1 - \zeta + \zeta^{21})$ qui est aussi de norme 47×139 . On en conclut que $N(f(\zeta)) = 47$, ce qui est absurde par ce qui précède.

Ainsi 47 n'admet aucun facteur premier réellement existant : Kummer pose donc qu'il s'écrit comme un produit de facteurs premiers idéaux. Puisque $N(47) = 47^{22}$, par multiplicativité de la norme, on s'attend à pouvoir identifier 47 à un produit de nombres premiers idéaux de la forme $p_1 p_2 \cdots p_{22}$, où $N(p_i) = 47$ pour tout $i = 1, \dots, 22$. Dans le même esprit, on identifie 139 à un produit $q_1 \cdots q_{22}$, où $N(q_i) = 139$ pour tout $i = 1, \dots, 22$.

Ainsi, on a symboliquement

$$47 \times 139 = (p_1 \cdots p_{22})(q_1 \cdots q_{22}).$$

Par ailleurs, les 22 facteurs $1 - \zeta + \zeta^{21}, 1 - \zeta^2 + \zeta^{19}, \dots, 1 - \zeta^{22} + \zeta^2$ étant de norme 47×139 , cela suggère de faire correspondre chacun d'eux à un produit de la forme $p_i q_j$. Après une éventuelle réindexation, on obtient

$$(1 - \zeta + \zeta^{21})(1 - \zeta^2 + \zeta^{19}) \cdots (1 - \zeta^{22} + \zeta^2) = (p_1 q_1) \cdots (p_{22} q_{22}).$$

On retrouve ainsi l'unicité de la décomposition de $N(1 - \zeta + \zeta^{21})$ en termes de nombres idéaux, à l'ordre des facteurs près. Il est important de saisir ici que les nombres idéaux se retrouvent totalement assimilés aux deux entiers cyclotomiques qu'ils composent : p_1 est par exemple entièrement défini comme facteur idéal commun de 47 et $1 - \zeta + \zeta^{21}$. Ainsi, Kummer ne cherche jamais à déterminer explicitement ses nombres idéaux, mais à les caractériser *via* leur divisibilité. Considérons par exemple p_1 , le facteur premier idéal associé à 47 et $1 - \zeta + \zeta^{21}$, et posons $\psi(\zeta) = (1 - \zeta^2 + \zeta^{19}) \cdots (1 - \zeta^{22} + \zeta^2)$. On a donc

$$(1 - \zeta + \zeta^{21})\psi(\zeta) = 47 \times 139.$$

Par l'identification précédente, Kummer *pense* en fait $\psi(\zeta)$ comme le produit « idéal » $(p_2 q_2) \cdots (p_{22} q_{22})$. Ainsi $\psi(\zeta)$ est vu comme divisible par $p_2 \cdots p_{22}$, ou autrement dit par tout facteur idéal de 47 sauf p_1 . Donc pour qu'un élément $f(\zeta) \in \mathbb{Z}[\zeta]$ soit divisible par p_1 , il faut et il suffit que $f(\zeta)\psi(\zeta)$ soit divisible par 47, ou encore que la relation

$$f(\zeta)\psi(\zeta) \equiv 0 \pmod{47}$$

soit satisfaite. Constatons que cette condition nécessaire et suffisante ne fait ainsi intervenir aucun nombre idéal *explicitement*, bien que la façon dont ils sont « répartis » dans les entiers cyclotomiques détermine *implicitement* le choix de la congruence.

On ramène donc finalement le problème des facteurs premiers idéaux à des congruences portant sur des nombres bien réels.

Notons au passage que le terme *congru* (dans le cadre des entiers relatifs) est introduit pour la première fois par Gauss vers 1801.

En résumé, en autorisant l'adjonction d'êtres « inexistants » aux domaines tels que les anneaux d'entiers cyclotomiques, Kummer vient rétablir l'unicité de la décomposition. Les nombres idéaux jouissent du même caractère que les nombres

premiers réellement existants en termes de divisibilité, et tout nombre se voit alors représenté d'une seule manière comme produit de facteurs premiers existants ou idéaux. Ils servent finalement, de manière imagée, à combler le manque de facteurs premiers du domaine.

La prochaine étape qu'évoque Kummer est donc d'étendre ces résultats à des domaines plus généraux, comme les ensembles du type

$$\{x + \sqrt{d}y \mid x, y \in \mathbb{Z}, \sqrt{d} \text{ irrationnel}\}.$$

Il va même jusqu'à faire allusion à la factorisation des *nombre algébriques*, sans pour autant en expliciter davantage la caractérisation. Cependant, même s'il souligne que ce problème est « d'un grand intérêt, à la fois pour lui-même et pour les nombreuses applications [...] relatives à l'arithmétique et à l'algèbre supérieure », il n'est jamais revenu sur ces questions, préférant se consacrer aux entiers cyclotomiques et aux problèmes relatifs au dernier théorème de Fermat.

c. Le cas général des entiers algébriques

Ce sera donc à des mathématiciens tels que Dedekind ou Kronecker qu'il reviendra d'aborder ces différents aspects. En particulier, ils dégageront indépendamment l'un de l'autre la définition la plus générale d'un entier algébrique. On ignore cependant de quelle manière ils sont parvenus à en isoler la « bonne propriété ».

Pour pouvoir saisir l'enjeu du problème général, nous devons expliciter son cadre, et de quelle façon il doit être posé pour trouver une réelle pertinence. Un nombre *algébrique* α est tout d'abord défini comme racine d'un polynôme unitaire à coefficients rationnels (i. e. dans $\mathbb{Q}$) :

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Lorsque le polynôme est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, nous parlerons d'*entier algébrique*. On vérifie aisément que cette définition couvre en particulier le cas des entiers relatifs.

Dans la vision de Dedekind, les problèmes de théorie des nombres acquièrent davantage de force en les considérant à travers un nouveau concept, qui est celui de « corps » : il s'agit d'un ensemble de *nombre*s clos pour les quatre opérations usuelles. De cette manière, on vient englober à la fois les relations arithmétiques mais aussi algébriques des nombre. Notons que Dedekind n'emploie pas ce terme dans son sens très général de structure abstraite : il s'agit seulement de bénéficier d'un espace de travail adapté pour résoudre la problématique de théorie des nombre en question.

Ainsi, on bénéficie immédiatement de deux corps : « le plus simple », celui des nombre rationnels, et « le plus grand » au sens de l'inclusion, « celui de tous les nombre ». En particulier, l'ensemble de tous les nombre algébriques forme lui-même un corps, que nous noterons K_0 , constitué d'une infinité d'éléments. Or si l'on cherche à

déterminer la factorisation d'un entier algébrique non nul α distinct des unités en entiers de K_0 , il est bien clair qu'elle ne sera jamais unique : on peut toujours donner au moins deux décompositions en produits d'entiers algébriques, eux aussi distincts des unités :

$$\alpha = \sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha} = \beta_1\beta_2,$$

où β_1 et β_2 sont les racines du polynôme $\beta^2 - \beta + \alpha = 0$.

Le problème posé à cette échelle n'a donc aucun sens. En revanche, il peut trouver un nouveau souffle à condition de placer les nombres entiers dans des corps plus restreints : les « corps finis » (aujourd'hui renommés corps de nombres). Ce sont des corps *engendrés* par un nombre fini d'éléments, ou en termes modernes, des extensions finies de $\mathbb{Q}$. De tels corps ont la propriété intéressante de n'être formés que de nombres algébriques.

En effet, soit K un corps de nombres. K est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Ainsi, si $x \in K$, la famille $(1, x, \dots, x^n)$ est liée puisqu'elle contient exactement $n + 1$ éléments. Il existe donc une combinaison linéaire nulle de cette famille dont les coefficients (dans $\mathbb{Q}$) ne sont pas tous nuls. On peut ainsi définir un polynôme non nul à coefficients rationnels, que l'on peut prendre unitaire quitte à le diviser par son coefficient dominant, et possédant x pour racine. Ceci prouve par conséquent que x est un nombre algébrique.

Il suffit donc de regarder l'entier algébrique α dans un certain corps de nombres K auquel il appartient, puis de chercher sa décomposition *en entiers algébriques* de K . Le fait de restreindre ici le corps considéré permet donc une approche correcte de la question.

De plus, l'ensemble des entiers algébriques d'un corps de nombres K forme un anneau, souvent noté O_K , et appelé anneau des entiers de K . Dans les exemples précédents, $\mathbb{Z}$ forme l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}[i]$ celui de l'extension quadratique $\mathbb{Q}(i)$, etc. C'est donc dans ces anneaux que la généralisation des résultats de Kummer doit s'effectuer, et la problématique se pose donc en ces termes : étant donné un corps de nombres K , tout élément $\alpha \in O_K$ peut-il se décomposer *de manière unique* en un produit d'éléments de O_K ?

d. Les insuffisances du nombre idéal selon Dedekind

Pour ce qui est de la théorie des nombres idéaux, Dedekind semble saluer de manière enthousiaste l'initiative de Kummer.

Ce géomètre est parvenu à ramener toutes les irrégularités apparentes à des lois rigoureuses, et en considérant les nombres indécomposables, mais dépourvus du caractère de véritables nombres premiers, comme des produits de facteurs premiers *idéaux*, qui n'apparaissent et ne manifestent leur effet que combinés ensemble, et non pas isolés, il a obtenu ce résultat surprenant, que les lois de la divisibilité dans les domaines

de nombres étudiés par lui coïncident maintenant complètement avec celles qui régissent le domaine des nombres entiers rationnels. Tout nombre qui n'est pas une unité se comporte, dans toutes les questions de divisibilité, tant dans un rôle actif que dans un rôle passif, ou comme un nombre premier, ou comme un nombre formé par la multiplication de facteurs premiers, existants ou idéaux, complètement déterminés. (« Sur la théorie des nombres entiers algébriques », 1876, p. 282.)

Il s'attache d'ailleurs, dans le X^e supplément de 1871 à la 2^e édition de la *Zahlentheorie* de Dirichlet, à conserver le formalisme de Kummer et l'usage des congruences, pour étendre avec succès ces différents résultats aux anneaux d'entiers des corps de nombres. Même s'il y introduit le concept d'*idéal*, que nous détaillerons longuement ci-après, on peut noter qu'il n'y apparaît que de façon assez secondaire, et non comme réelle base de la théorie.

Ces problèmes finalement résolus, le chapitre relatif aux questions de divisibilité aurait pu être considéré comme clos, mais la réalité sera tout autre. Bien au contraire, ces résultats nouveaux ne feront qu'alimenter les discussions des mathématiciens, qui partiront alors en quête du moyen le plus efficace et pertinent pour exposer cette théorie nouvelle des entiers algébriques. C'est ainsi que Dedekind reconsidérera son jugement sur les travaux de Kummer, et modifiera considérablement son approche, en publiant « Sur la théorie des nombres entiers algébriques » cinq ans plus tard.

En effet, la théorie initiale des nombres idéaux, bien que judicieuse, apparaît désormais comme incomplète à ses yeux, pour essentiellement deux raisons.

1. Le fait d'introduire des êtres inexistant dans les calculs soulève nécessairement la question même de leur nature, et de la façon dont on se doit de les utiliser : que signifie par exemple multiplier deux nombres idéaux, ou la divisibilité par un tel objet ? A-t-on le droit d'effectuer de telles opérations, propres aux nombres réellement existants, sur des nombres n'appartenant même pas au domaine initial ? Une identification totale avec les règles usuelles régissant les rationnels risque d'induire en erreur quiconque manipule ces fameux nombres idéaux : on peut finalement se retrouver inconsciemment « entraîné à des conclusions précipitées » et à des « démonstrations insuffisantes ».
2. Comme nous l'avons vu, Kummer introduit systématiquement les nombres idéaux via leur divisibilité, et non comme objets proprement définis, les assimilant à certaines « propriétés » consistant pour l'essentiel en des congruences. Ainsi, si par exemple un nombre existant α répond à une certaine congruence correspondant à une propriété A , alors α est dit divisible par un nombre idéal associé à A .

Or cette méthode ne permet pas de saisir véritablement l'essence du nombre idéal, puisque aucun caractère commun à ces êtres n'a été dégagé ; elle est finalement trop « particulière », trop attachée à une représentation explicite

des facteurs, et ne s'appuie pas sur leurs propriétés intrinsèques. Dedekind exprime alors sa volonté d'établir « une définition exacte et qui soit commune à tous les nombres idéaux [...] et en même temps une définition générale de leur multiplication ».

On peut émettre cependant quelques réserves en ce qui concerne ces différentes critiques. En un certain sens, la théorie de Kummer est tout à fait légitime : bien qu'elle fasse intervenir des facteurs « idéaux », ces derniers sont toujours traduits en termes de congruences sur des nombres réellement existants. D'ailleurs, Dedekind n'a jamais affirmé l'inverse : il précise lui-même que l'on peut par cette méthode « bien atteindre en toute rigueur le but proposé ». Ce qu'il lui reproche par contre, ce sont les calculs longs et fastidieux qui en résultent : non seulement cette approche accroît le risque d'erreurs dans les résultats finaux, mais plus problématique, elle ne simplifie pas la tâche du mathématicien. En effet, ce dernier sera contraint de réeffectuer toute une série de tests de divisibilité pour chaque nouvel anneau d'entiers considéré. Le nombre idéal n'englobe pas tous les cas de la théorie d'un seul mouvement, et ne permet donc pas d'en saisir le cœur. Pour ne rien arranger, ces procédures de divisibilité portent en elles une analogie frappante avec les règles arithmétiques des entiers relatifs, si bien que l'on peut être tenté de les assimiler complètement et de croire que ces mêmes lois sont encore valables sur les domaines d'entiers. Dedekind mentionne ainsi l'exemple du produit de deux facteurs, existants ou idéaux, qui n'est pas facilement défini et qui demande de faire preuve de « la plus grande circonspection ».

Ainsi, la vision de Dedekind entre sa première présentation de 1871 et celle de 1876-1877 semble avoir considérablement évolué : les résultats découlant de l'analogie entre entier algébrique et entier relatif n'ont plus rien de proprement évident, et il est nécessaire de les démontrer précisément. En particulier, le recours à des conditions de divisibilité, de par la confusion qu'elles génèrent et leur manque de généralité, doit être soigneusement évité dans toute autre tentative future.

Par ces différents arguments, Dedekind montre à quel point son souci de la rigueur et de la généralité le guide dans sa démarche mathématique. Mais on peut d'ores et déjà deviner ici l'impact de certaines considérations philosophiques et épistémologiques dans cette nouvelle vision, qu'il nous faudra préciser afin de comprendre ce revirement. Contentons-nous pour le moment de dire que le nombre idéal, tel que défini par Kummer, ne satisfait pas complètement à ses exigences : son « inexistence » laisse selon lui une véritable zone d'ombre sur les lois qui le caractérisent, et ne met pas suffisamment en avant l'uniformité tant convoitée de la théorie de la divisibilité. Dedekind souhaiterait par conséquent remplacer le nombre idéal par un « *substantif* réellement existant ».

1.3 La substitution du nombre idéal

a. Un exemple concret : le rôle de 2 dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Pour bien comprendre comment Dedekind compte modifier la forme du nombre idéal, nous nous proposons d'aborder l'un de ses exemples, conduisant à l'apparition dans le calcul d'un nombre idéal : la décomposition de 2 dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. On admet ici implicitement que les entiers du corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ sont tous éléments de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

On rappelle que pour $\omega = x + \sqrt{-5}y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, la norme de ω est définie par

$$N(\omega) = x^2 + 5y^2.$$

De plus, $\omega^2 = x^2 - 5y^2 + 2\sqrt{-5}xy$, d'où

$$N(\omega) - \omega^2 \equiv 0 \pmod{2\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]}.$$

Pour un autre élément $\omega' \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, on a de la même manière que

$$N(\omega') - \omega'^2 \equiv 0 \pmod{2\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]}.$$

Finalement

$$N(\omega)N(\omega') \equiv \omega^2\omega'^2 \pmod{2\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]}.$$

Ainsi, 2 divise $\omega^2\omega'^2$ si et seulement si 2 divise $N(\omega)N(\omega')$. Cela implique que 2 divise $N(\omega)$ ou que 2 divise $N(\omega')$ car $N(\omega), N(\omega') \in \mathbb{Z}$, ce qui équivaut enfin à dire que 2 divise ω^2 ou 2 divise ω'^2 .

En prenant par exemple $\omega_0 = x + \sqrt{-5}y$ avec x, y impairs, on obtient alors que 2 ne divise pas ω_0 mais divise ω_0^2 . En effet, si 2 divisait ω_0 , il existerait $x', y' \in \mathbb{Z}$ tels que

$$2(x' + y'\sqrt{-5}) = \omega_0.$$

Or puisque $(1, \sqrt{-5})$ forme une $\mathbb{Z}$ -base de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, on obtient que

$$2x' = x \text{ et } 2y' = y,$$

ce qui contredit x, y impairs.

Nous utilisons ensuite le fait suivant valable sur $\mathbb{Z}$. Soit n un nombre entier positif tel que

1. n ne divise un produit de deux carrés x^2y^2 que s'il divise l'un des deux facteurs x^2 ou y^2 ;

2. n ne divise pas un certain entier $a \in \mathbb{Z}$ mais divise a^2 .

Alors n est le carré d'un nombre premier.

Ceci, appliqué à notre domaine, nous montre que 2 se comporte exactement comme le carré d'un nombre premier α car

1. pour tous entiers ω, ω' , 2 divise $\omega^2 \omega'^2$ implique que 2 divise ω^2 ou ω'^2 ;
2. 2 divise ω_0^2 sans diviser ω_0 .

Or on peut constater que α n'appartient pas à $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. On aurait sinon

$$\alpha^2 = a^2 - 5b^2 + 2\sqrt{-5}ab = 2$$

avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Ceci entraîne que $ab = 0$, donc $a = 0$ ou $b = 0$; ainsi, $-5b^2 = 2$ ou $a^2 = 2$, ce qui est impossible dans $\mathbb{Z}$.

Par conséquent, l'élément α n'est autre que l'incarnation d'un nombre idéal. Que faire pour ramener α à une entité existante, et ainsi combler cette lacune opératoire ? Dedekind envisage deux solutions.

b. Une première solution « constructive »

La première consiste à remplacer ce nombre idéal par un nombre réellement existant, mais appartenant à un domaine plus large que celui de départ. C'est celle choisie par Kronecker, qui a prouvé plus généralement l'existence d'un domaine $\mathcal{O}'$, contenant le domaine d'entiers $\mathcal{O}$ initial, mais qui comprend de plus tous les nombres idéaux de $\mathcal{O}$. En d'autres termes, les nombres idéaux de $\mathcal{O}$ deviennent des nombres existants de $\mathcal{O}'$.

Dans notre exemple, il suffit de considérer $\beta_1 = \sqrt{-2 + \sqrt{-5}}$ et $\beta_2 = \sqrt{-2 - \sqrt{-5}}$. On constate que

$$\begin{aligned}\beta_1 \beta_2 &= 3, \\ \sqrt{-5} \beta_1 &= -2\beta_1 - 3\beta_2, \\ \sqrt{-5} \beta_2 &= 3\beta_1 + 2\beta_2, \\ \sqrt{-5} &= \beta_1^2 + 2 = -2 - \beta_2^2,\end{aligned}$$

si bien que le nouveau domaine $\mathcal{O}'$ sera formé des éléments de la forme

$$x + y\sqrt{-5} + z_1\beta_1 + z_2\beta_2, \quad x, y, z_1, z_2 \in \mathbb{Z}.$$

On remarque d'ailleurs que $\alpha \in \{\pm(\beta_1 + \beta_2)\}$ car

$$(\pm(\beta_1 + \beta_2))^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2 = -4 + 2\sqrt{2^2 + 5} = 2,$$

ce qui confirme que $\alpha \notin \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

L'avantage indéniable de cette méthode, comme le souligne M. A. Sinaceur, est qu'elle « reste dans le constructif et dans une mathématique sans infini actuel », et que l'on conserve « un certain langage » que les mathématiciens maîtrisent.

Néanmoins, Dedekind ne pense pas qu'il s'agisse là de la voie la plus pertinente. Tout d'abord, elle nécessite de « sortir » du domaine de départ pour en considérer un second, beaucoup plus complexe. Ensuite, l'introduction de ce domaine entretient une part d'arbitraire, de façon quelque peu similaire aux nombres idéaux de Kummer : de la même manière qu'il faut choisir les « bons » facteurs pour les congruences, il faut définir le « bon » domaine qui rend le problème facilement résoluble. Enfin, elle n'atteint pas le degré de généralité que Dedekind recherche, car il faudra redéfinir pour chaque nouveau domaine considéré O le domaine associé O' : on est encore loin de la définition censée englober « tous les nombres idéaux ».

Même si elle se dégage des conditions de divisibilité de Kummer, cette approche reste encore attachée à une procédure très calculatoire et traite chaque cas de manière particulière. La manière qu'a Kronecker de s'assurer qu'elle ne souffre « d'aucune exception » ne convient pas à Dedekind.

c. Une seconde solution « ensembliste »

La seconde attaque le problème sous un angle très différent : étant donné qu'un nombre idéal n'est considéré, comme nous l'avons expliqué, qu'à travers son statut de diviseur dans O , on peut choisir de ne s'intéresser qu'aux éléments de O divisibles par un nombre idéal donné. Or cela revient à le caractériser complètement : sa valeur algébrique importe peu, puisqu'elle n'intervient pas formellement dans les calculs, seule la façon dont ce nombre idéal se comporte dans la divisibilité est utilisée. Dans cette démarche, plus aucun recours à des êtres inexistantes n'est nécessaire : la question se trouve ramenée à l'étude d'ensembles constitués d'objets réellement existants, que l'on sait manipuler de manière effective.

C'est ici, comme on pouvait le deviner, la voie que Dedekind a préféré emprunter, donnant ainsi naissance à des collections d'entiers qu'il baptisera « idéaux », pour conserver la terminologie de Kummer.

Le plus remarquable est bien entendu le point de vue ensembliste qu'il adopte, en n'hésitant pas à former des systèmes infinis d'éléments. Signalons qu'il s'agit ici d'une véritable innovation pour l'époque, étant donné que la théorie des ensembles de Cantor n'a pas encore vu le jour. Une telle formulation apparaît par conséquent comme profondément déroutante, voire inacceptable, pour beaucoup de ses lecteurs et contemporains : ceci constitue d'ailleurs l'un des nombreux points de discordance avec Kronecker, qui peut être considéré rétrospectivement comme l'un des représentants du **constructivisme**. Nous développerons d'ailleurs plus en détail ce qui les oppose dans notre troisième partie.

Pourtant, le fait de concevoir une infinité d'objets comme une unité semble tout à fait naturel chez Dedekind ; à vrai dire, cela provient certainement du fait qu'il ne conçoit pas de tels ensembles comme des agrégats d'objets multiples, mais réellement comme un « tout », un nouvel objet en quelque sorte, que l'on peut manipuler de manière légitime (voir BENIS SINACEUR 2008, p. 110-111). Plus d'ailleurs qu'un simple élan proprement mathématique, nous constaterons lors de la seconde partie que la notion d'ensemble (ou de « système ») émerge comme une caractéristique de l'activité humaine. Enfin, cette conception permet, et nous le verrons par la suite, d'utiliser un langage profondément arithmétique : les idéaux deviennent des entités arithmétisables, faisant l'objet de règles opératoires tout comme les nombres entiers, et jouissant notamment d'une relation de divisibilité.

Concluons enfin cette première présentation de l'idéal en précisant que les versions de Dedekind de 1871 et de 1876-1877 donnent toutes deux une définition semblable de l'idéal. Cependant l'exposition y est sensiblement différente : dans la seconde, l'idéal est complètement détaché de la vision kummerienne, existe en tant qu'objet indépendant, et constitue le véritable fondement de la théorie des entiers algébriques. C'est donc sur cette version que notre développement s'appuie, car le concept d'idéal que nous connaissons dans sa forme actuelle y trouve davantage de résonance. On pourra tout de même consulter en Annexe page 68 des informations sur la première version, qui reste dans la veine de Kummer et relègue finalement l'idéal au second plan. Elle demeure néanmoins pour EDWARDS (1980) beaucoup plus adaptée à l'étude des problèmes d'unicité des décompositions.

1.4 La création de l'idéal

a. L'idéal et ses propriétés

Commençons par reprendre notre exemple concernant la décomposition de 2 dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Nous avons vu qu'il existe un nombre idéal α tel que $\alpha^2 = 2$. La première méthode nous a donné une valeur explicite de α . La seconde va nous permettre de déterminer l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ qui sont divisibles par α .

Pour ce faire, on remarque que

$$\begin{aligned} \omega = x + \sqrt{-5}y \text{ divisible par } \alpha &\iff \omega^2 \text{ divisible par } 2 \\ &\iff N(\omega) \text{ divisible par } 2 \\ &\iff x \equiv y \pmod{2}. \end{aligned}$$

Ainsi on peut écrire $x = y + 2z$ avec $z \in \mathbb{Z}$; l'ensemble des éléments du domaine divisibles par α est donc

$$\mathfrak{a} = \left\{ 2z + (1 + \sqrt{-5})y \mid y, z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nous voyons donc ici apparaître notre premier exemple d'idéal ; immédiatement, plusieurs remarques s'imposent. Nous constatons que cet ensemble est, en termes modernes, un sous- $\mathbb{Z}$ -groupe additif engendré par 2 et $1 + \sqrt{-5}$; Dedekind parlera quant à lui de « module fini », qu'il note également $\mathfrak{a} = [2, 1 + \sqrt{-5}]$. De plus, on a

$$2\sqrt{-5} = -1 \times 2 + 2 \left(1 + \sqrt{-5} \right)$$

et

$$\left(1 + \sqrt{-5} \right) \sqrt{-5} = -3 \times 2 + \left(1 + \sqrt{-5} \right).$$

Ces différentes remarques conduisent Dedekind à établir deux propriétés du « système » $\mathfrak{a}$:

1. les sommes et les différences des nombres de $\mathfrak{a}$ sont toujours des nombres de $\mathfrak{a}$;
2. tout produit d'un nombre de $\mathfrak{a}$ et d'un nombre de $\mathcal{O}$ est un nombre de $\mathfrak{a}$.

On constatera cependant que dans l'introduction, la propriété 2 est remplacée par la propriété plus faible suivante :

- 2'. tout produit d'un nombre de $\mathfrak{a}$ et d'un nombre de $\mathfrak{a}$ est un nombre de $\mathfrak{a}$.

Si l'on se fie à cette définition, on serait simplement en présence d'une multiplication interne définie sur $\mathfrak{a}$. Pourtant, en examinant ce qui précède l'énoncé des deux propriétés dans cette même introduction (où est décrit le cas particulier des systèmes engendrés par un unique élément), on constate que c'est bien le produit par un élément quelconque de l'anneau qui est considéré... Où se trouve donc l'erreur ? En fait, la propriété 2' a simplement fait l'objet d'une coquille malencontreuse : elle a d'ailleurs été rectifiée dans les errata du traité. C'est donc bien la propriété 2 que nous devons considérer.

On pourrait croire que ces propriétés sont le fruit d'un pur hasard. Mais dans la partie II intitulée « Le germe de la théorie des idéaux » de son traité de 1876-1877, Dedekind définit précisément un *idéal* comme un ensemble d'éléments de $\mathcal{O}$ jouissant de ces deux propriétés.

Ainsi, il laisse suggérer que ces conditions sont *nécessaires* et *suffisantes* pour définir un idéal au sens premier du terme, au sens d'ensemble d'éléments divisibles par un nombre idéal. Comment Dedekind en est-il alors venu à isoler ces deux propriétés en particulier ?

b. Lien avec le « principe de permanence »

La réponse se trouve en majeure partie dans son introduction. Observons tout d'abord que les nombres *existants* μ de $\mathcal{O}$ peuvent également être vus comme cas particuliers de nombres idéaux ; on définit ainsi un idéal, constitué de tous les éléments de $\mathcal{O}$ divisibles par un tel nombre μ , noté $\mu\mathcal{O}$. Plus formellement :

$$\mu\mathcal{O} = \{\mu\omega \mid \omega \in \mathcal{O}\}.$$

Or il est clair qu'un tel idéal vérifie les points 1 et 2 précédents car

- si $a = \mu\omega$ et $b = \mu\omega'$ sont deux éléments de μO , alors $a - b = \mu(\omega - \omega')$ et $a + b = \mu(\omega + \omega')$ sont encore dans μO , car O est stable par addition et soustraction ;
- si $a = \mu\omega \in \mu O$ et $\omega' \in O$, alors $a\omega' = \mu(\omega\omega') \in \mu O$, car O est stable par produit.

Comme l'unique but de Dedekind est « de ramener les seules lois de la divisibilité [...] à une complète conformité avec celles qui règnent dans le domaine des nombres entiers rationnels », ce résultat *doit* subsister si μ est n'importe quel nombre idéal. Ce *doit* encore être le cas si l'on considère un idéal : tout idéal devra vérifier les deux propriétés ci-dessus.

Dedekind invoque ici ce qui semble être un mystérieux principe d'induction, où les mathématiques se développent à partir de l'élargissement d'un concept, valant au départ sur un domaine restreint. Cependant, cette induction n'est pour lui en rien soumise au hasard, mais strictement réglée selon des exigences internes et régie par une nécessité contraignante.

Même si nous aurons l'occasion de nous attarder sur ce point crucial dans la troisième partie, il nous semble d'ores et déjà intéressant de signaler que cette conception des mathématiques fait quelque peu écho à celle d'un algébriste anglais du début du XIX^e siècle, George Peacock, qui est connu principalement pour son ouvrage *A treatise on algebra* (1830). C'est dans cet écrit profondément réformateur, visant à placer l'algèbre sur des bases logiques, que se trouve énoncé le « principe de permanence des formes équivalentes » qui nous intéresse pour notre propos. Pour en saisir pleinement le sens et la portée, nous nous proposons de retracer les grandes lignes du développement de Peacock, et notamment sa version de la genèse de l'algèbre.

Selon lui, celle-ci s'effectue en considérant deux étapes distinctes, l'algèbre dite « arithmétique » et l'algèbre dite « symbolique ».

- L'algèbre *arithmétique* est considérée comme une stricte littéralisation de l'arithmétique des entiers naturels : les nombres sont simplement dénotés par des lettres, qui forment ainsi des symboles « absolument généraux dans leur forme mais pas dans leur valeur ». En d'autres termes, ces symboles restent soumis aux limitations de sens caractéristiques de l'arithmétique : par exemple, l'écriture $a-b$ n'aura de sens que si $a > b$, sous peine de conduire à des résultats dits « impossibles ». Dans la même idée, le signe $-$ ne peut s'entendre que comme opération binaire de soustraction, et non de manière foncièrement indépendante comme dans $-a$. Cette approche reste donc indissociable des entités réellement existantes, bien concrètes, que les nombres incarnent.
- L'algèbre *symbolique* est alors la partie de l'algèbre qui « fait sauter tous les verrous », qui dépasse toutes les restrictions de sens propres à l'algèbre

arithmétique. Dans ce cas, le sens même des symboles est totalement abandonné au profit de l'examen des opérations, qui deviennent de simples lois de combinaison indépendantes des résultats et des objets auxquels elles s'appliquent. Ainsi, $a - b$ devient une écriture correcte quelle que soit la nature des objets a et b : ce n'est ni plus ni moins qu'une manière symbolique de déterminer l'objet c vérifiant $c + b = a$. De façon similaire, les opérations $+$ et $-$ acquièrent une existence propre, légitimant les écritures telles que $-a$. En fait, on définit ces opérations en les soumettant à des règles formelles « sur le mode des quatre opérations de l'arithmétique », telles que la réciprocity des couples $(+, -)$ et $(\times, /)$ ou l'associativité-commutativité (en termes modernes), tout en prenant garde à ne pas les faire totalement dépendre de ces dernières, comme nous l'expliquerons par la suite. L'algèbre symbolique se définit donc comme un « système de combinaisons de symboles » qui sont généraux « à la fois dans leur forme et dans leur valeur », et dont les résultats ne sont plus nécessairement soumis à interprétation.

La première idée qui nous vient alors à l'esprit est de concevoir l'algèbre symbolique comme une forme d'extension généralisée de l'algèbre arithmétique, au sens où les opérations de l'algèbre arithmétique auraient simplement subi un déplacement, un glissement de sens en direction de l'algèbre symbolique. Or pour Peacock, cette vision est (au moins partiellement) erronée : ce sont selon lui des sciences totalement indépendantes, l'une ne trouvant aucune *justification* dans l'autre. Car si l'algèbre arithmétique est la « science des quantités », l'algèbre symbolique est celle « des opérations ». Pour autant, Peacock ne nie pas la valeur de l'algèbre arithmétique comme science de *suggestion* : les opérations qui y sont définies, et surtout leurs conséquences, servent clairement de guide à l'algèbre symbolique. Il est donc possible de définir des opérations « symboliques » d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, dont on conserve la terminologie par souvenir de leurs origines, mais qui sont malgré tout nouvelles : elles ne résultent pas d'une simple analogie, mais bien d'une redéfinition dans un cadre formel. Par contre, si les objets de l'algèbre symbolique prennent des valeurs numériques, les lois « symboliques » coïncideront parfaitement avec les lois de l'algèbre arithmétique, puisque les premières sont obtenues par une observation soigneuse des dernières.

On peut donc en conclure que l'algèbre arithmétique est bien quelque part subordonnée à l'algèbre symbolique, mais n'en constitue pas non plus le fondement au sens strict : elle en constitue davantage un modèle, une source d'inspiration. Ces deux parties sont donc en connexion, sans pour autant être intégralement dépendantes l'une de l'autre.

Une question demeure cependant : compte tenu de la relation particulière qu'entretiennent les algèbres arithmétique et symbolique, n'existe-t-il pas un moyen permettant de passer de l'une à l'autre ? C'est alors à ce stade qu'intervient le fameux « principe de permanence des formes équivalentes ». De manière pour le moins synthétique, ce dernier stipule qu'il serait possible non seulement de « transférer »

les résultats de l'algèbre symbolique à l'algèbre arithmétique, mais plus surprenant encore, d'effectuer ce transfert en sens inverse. Ainsi on parviendrait à obtenir des formes générales *via* des formes particulières !

Voici donc l'énoncé tel qu'il est présenté dans l'article de Peacock « Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis » (1834, p. 198-199, traduction de DURAND 1990).

Théorème 1.2 (principe de permanence des formes équivalentes, 1834).

- A) *Toute forme qui est algébriquement équivalente à une autre quand elle est exprimée en symboles généraux doit continuer à lui être équivalente, quel que soit ce que ces symboles représentent.*
- B) *Toute forme qui est découverte en algèbre arithmétique considérée comme science de suggestion, lorsque les symboles sont généraux dans leur forme, bien que spécifiques dans leur valeur, doit continuer à être une forme équivalente quand les symboles sont généraux dans leur nature aussi bien que dans leur forme.*

Il semble nécessaire d'effectuer quelques remarques.

1. Il convient ici de préciser ce que Peacock entend par forme *algébriquement* équivalente ; il s'agit d'une manière de distinguer les égalités algébriques des égalités arithmétiques. Une égalité *algébrique* est une égalité qui résulte d'un calcul purement formel, et qui ne considère aucunement les objets considérés. Une égalité *arithmétique* est quant à elle une égalité vérifiée pour tous les nombres. Si très souvent les deux types d'égalité coïncident, comme dans l'égalité

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

ce n'est pourtant pas toujours le cas, comme en témoigne l'égalité

$$(1.1) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

qui est une égalité algébrique (comme résultat de la division formelle de 1 par $1 - x$) mais non arithmétique (elle n'est pas vérifiée pour $x > 1$). Ce que stipule la proposition A, c'est donc que les égalités algébriques de l'algèbre symbolique restent valables en particulier en algèbre arithmétique, dans la mesure où elles sont définies. Par exemple, le quotient de l'égalité (1.1) n'a de sens en algèbre arithmétique que lorsque $1 - x > 0$, i. e. lorsque $x < 1$, donc le principe de permanence affirme que pour de tels x , l'égalité est vérifiée (ce qui est bien le cas).

2. Si la proposition A ne paraît pas vraiment étonnante, puisque l'algèbre arithmétique est, comme nous l'avons dit, subordonnée à l'algèbre symbolique,

il n'en va pas de même de la proposition B qui semble à première lecture difficilement acceptable. Elle pourrait se traduire grossièrement par « toute propriété vraie en algèbre arithmétique demeure vraie en algèbre symbolique ». Comment faut-il alors comprendre la pensée de Peacock ?

Une approche pouvant sembler pertinente consiste à mettre en parallèle ce principe avec une certaine conception de la connaissance, à la fois « génétique » et « strictement finalisée ». De la même manière que l'homme recourt à ses sens pour tenter de connaître le monde, et ainsi approcher une vérité qui est totalement indépendante de lui-même, l'algèbre arithmétique nous fournit l'expérience du calcul et nous permet d'appréhender l'algèbre symbolique, qui en fait *préexiste* à toute connaissance. De ce fait, le rôle du mathématicien n'est pas d'inventer ou d'établir l'algèbre symbolique, mais bien de la *découvrir*. Pour ce faire, il dispose justement du moyen heuristique qu'est l'arithmétique des entiers.

Dans cette interprétation, l'énoncé B exprime donc simplement que c'est la généralité de la forme qui rend la connaissance valide ; quant à l'énoncé A, il assure la préexistence de l'algèbre symbolique. Son existence ainsi admise, nous pouvons ainsi légitimement partir à la recherche des lois opératoires qui la régissent, et qui apparaissent comme nécessaires vis-à-vis de l'algèbre arithmétique. En effet, si l'on parvient à obtenir une égalité en algèbre arithmétique, qui est générale dans sa forme mais pas dans sa valeur, telle que

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

et que l'on admet qu'une telle égalité continue à être satisfaite en algèbre symbolique, alors elle doit *nécessairement* revêtir la même forme. En particulier, elle sera vérifiée pour m et n quelconques.

On notera également que Peacock fait paraître de nouveau en 1842 et 1845 son ouvrage, mais refondé en deux parties bien distinctes, séparant les algèbres arithmétique et symbolique pour plus de clarté. Dans le second volume, *A treatise on algebra, vol. II : on symbolical algebra and its applications to the geometry of position* (1845, p. 59), on retrouve le principe de permanence sous la forme plus succincte suivante (traduction de WIKIPÉDIA 2022) :

Théorème 1.3 (principe de permanence des formes équivalentes, 1845).

Lorsque des formes algébriques sont équivalentes quand les symboles sont généraux dans leur forme, mais spécifiques en valeur, elles seront également équivalentes quand les symboles sont généraux en valeur et dans leur forme.

Le principe de Peacock relève donc d'un problème épistémologique complexe, faisant émerger de multiples questions sur les procédés de généralisation en mathématiques, et bouleversant par la même occasion l'algèbre moderne.

Il nous reste donc, à la lumière de ces propos, à comprendre en quelle façon Dedekind s'inspire du principe de Peacock, et en quel sens il lui permet d'établir les propriétés arithmétiques de l'idéal. Tout d'abord – et nous reviendrons plus largement sur ce point ultérieurement – Dedekind s'accorde avec Peacock sur le statut des mathématiques et sur son rapport à la vérité : cette dernière se présente comme extérieure à nous, et toute science forme une démarche proprement humaine permettant d'y accéder. En ce sens, le procédé inductif semble être la méthode la plus pertinente pour traduire cet effort de recherche progressive du particulier vers le plus général.

Cependant, si Peacock semble s'inscrire comme un précurseur du **formalisme** mathématique, attachant une certaine importance au langage et à la forme, Dedekind n'en fait pas de même. Ce qui l'intéresse réellement, ce sont les concepts en eux-mêmes, qui ne doivent en aucun cas dépendre de notations particulières sous peine d'obtenir des propriétés trop hâtives, dépendantes justement des choix de langage. Néanmoins, ils ont en commun une certaine démarche pour établir leurs propriétés générales : il faut étendre leur domaine d'applicabilité et les redéfinir de manière appropriée, en prenant garde à ce qu'elles soient encore valables sur le domaine restreint. Ce n'est donc pas un hasard si Dedekind s'est attaché à présenter l'idéal en termes arithmétiques : cela lui permet de se baser au départ sur un domaine où l'arithmétique est bien maîtrisée, celui des « entiers rationnels », puis en appliquant un principe de permanence similaire à celui de Peacock, d'étendre ces résultats par nécessité à des domaines plus larges, ceux des anneaux d'entiers. Il n'y a donc plus de place accordée à l'arbitraire.

Voyons donc concrètement comment Dedekind peut utiliser ce principe de permanence pour obtenir les propriétés 1 et 2 de l'idéal, ou du moins leur caractère nécessaire.

Plaçons-nous dans le cas des « entiers rationnels » (*i. e.* $\mathbb{Z}$). Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ divisibles par un élément $\mu \in \mathbb{Z}$: il existe $\omega, \omega' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = \mu\omega$ et $b = \mu\omega'$. On constate que $a + b = \mu\omega + \mu\omega' = \mu(\omega + \omega')$ est divisible par μ car $\omega + \omega' \in \mathbb{Z}$, et que si $c \in \mathbb{Z}$, alors $ac = (\mu\omega)c = \mu(\omega c)$ est également divisible par μ . On dégage donc en substance deux égalités dans $\mathbb{Z}$:

$$\mu\omega + \mu\omega' = \mu(\omega + \omega')$$

et

$$(\mu\omega)c = \mu(\omega c)$$

qui sont spécifiques en valeur, mais générales dans leur forme. Quitte à employer un principe de permanence légèrement remanié, où l'algèbre arithmétique s'étend aux entiers relatifs, on peut s'assurer que ces deux égalités restent valables quelle que soit la nature des objets μ, c, ω, ω' . En particulier, elles *doivent* être vérifiées si ces éléments sont dans $\mathcal{O}$. Nous obtenons donc les propriétés voulues pour $\mu\mathcal{O}$, où μ est un élément quelconque de $\mathcal{O}$ *réellement existant*, premier ou non. Pour obtenir un résultat similaire lorsque μ est un nombre idéal, il suffit de voir les deux égalités

précédentes comme spécifiques *pour la valeur de μ* , mais toujours générales dans leur forme. Par une seconde application du principe de permanence relativement à l'arithmétique de $\mathcal{O}$, on obtient donc que les égalités *doivent* rester valables pour toute valeur de μ , d'où la conclusion souhaitée.

On trouve donc que les propriétés 1 et 2 définissent des conditions *nécessaires* pour l'idéal. Il reste donc à Dedekind à démontrer que de telles conditions sont également *suffisantes*, ce qu'il parvient à établir « à la suite de nombreux et vains efforts. »

Ainsi défini, l'idéal devient un puissant concept, capable de supporter toute la théorie des entiers algébriques dans les corps de nombres, principalement parce qu'il devient, comme nous l'avons déjà dit, une entité arithmétisable.

c. L'arithmétique de l'idéal : une réponse au problème d'unicité

En effet, le profond intérêt des idéaux est surtout que l'on peut opérer avec ces objets de la même manière qu'avec des nombres, en s'inspirant en grande partie des lois arithmétiques des entiers, comme le suggère le principe de permanence.

Examinons par exemple la relation de divisibilité entre deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ d'un domaine d'entiers $\mathcal{O}$, qui coïncide avec la relation d'inclusion :

$$\mathfrak{a} \text{ divise } \mathfrak{b} \iff \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}.$$

Comment a-t-elle été introduite ? Commençons par considérer deux éléments $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$. On remarque que α divise β si et seulement si $\beta \in \alpha\mathcal{O}$, où $\alpha\mathcal{O}$ est l'idéal principal engendré par α . Ainsi tout élément de $\beta\mathcal{O}$ est dans $\alpha\mathcal{O}$, car tout élément de $\beta\mathcal{O}$ est en particulier divisible par β , donc par α . Réciproquement, si $\beta\mathcal{O}$ est inclus dans $\alpha\mathcal{O}$, il est bien clair que $\beta \in \beta\mathcal{O} \subseteq \alpha\mathcal{O}$, donc $\beta = \alpha\omega$, $\omega \in \mathcal{O}$. En d'autres termes,

$$\alpha \mid \beta \iff \beta\mathcal{O} \subseteq \alpha\mathcal{O}.$$

Ceci donne donc une définition de la division entre deux idéaux principaux. En utilisant une fois encore le principe de permanence, on en conclut que le résultat doit subsister même lorsque α et β sont des nombres idéaux, ce qui fournit le résultat attendu.

Le produit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ est quant à lui défini par les sommes finies des produits ab où $a \in \mathfrak{a}$ et $b \in \mathfrak{b}$; sa particularité, qui comme l'explique Dedekind est loin d'être immédiate et nécessite de durs efforts pour être établie, est que ce produit se trouve lié à la division de la manière suivante :

$$\mathfrak{a} \text{ divise } \mathfrak{b} \iff \exists \mathfrak{c} \text{ idéal de } \mathcal{O} \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}.$$

Cette équivalence constitue un résultat fondamental ; on retrouve ici une propriété bien connue dans $\mathbb{Z}$, qui affirme la réciprocité des opérations de multiplication et de

division. L'analogie se poursuit d'ailleurs en considérant la notion d'idéal premier : il s'agit d'un idéal divisible uniquement par O et lui-même. Si l'on fait un parallèle avec le vocable propre aux entiers algébriques, on remarque ainsi que la définition donnée correspond en fait à une notion d'irréductibilité, et non plus seulement de primalité, exactement comme pour les « nombres premiers » de $\mathbb{Z}$. Enfin, on peut introduire également la norme d'un idéal, définie par

$$N(\mathfrak{a}) = \#(O/\mathfrak{a}).$$

Explicitons davantage cette notion. Étant donnés deux éléments $\omega, \omega' \in O$, nous dirons qu'ils sont dans la même classe d'équivalence modulo $\mathfrak{a}$ si $\omega - \omega' \in \mathfrak{a}$. On peut donc constituer une partition de O consistant en les classes d'équivalence modulo $\mathfrak{a}$: nous notons alors $O/\mathfrak{a}$ l'anneau ainsi obtenu, appelé anneau quotient : dans cette structure, on ne différencie plus deux éléments appartenant à la même classe. Or dans ce cas précis, l'anneau quotient est formé d'un nombre fini de classes d'équivalence, ce qui nous permet de définir la norme de $\mathfrak{a}$ comme le nombre de classes d'équivalence distinctes, *i. e.* comme le cardinal de $O/\mathfrak{a}$. Elle a l'avantage de bénéficier, comme pour $\mathbb{Z}$, de la propriété de multiplicativité :

$$N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b}).$$

On saisit donc l'avantage d'une telle présentation arithmétique : elle permet de saisir et de manipuler sans réelle difficulté la nouvelle structure d'idéal, de par les liens profonds tissés avec les lois opératoires sur $\mathbb{Z}$, et également par les terminologies usuelles qui sont conservées. L'arithmétique de $\mathbb{Z}$, qui a guidé la construction de l'idéal, se trouve ainsi totalement englobée dans l'arithmétique des idéaux, et n'en constitue qu'un cas particulier. C'est donc un formidable effort de pédagogie qui transparait dans la démarche dedekindienne, où l'idéal est introduit sous une forme qui le rend tout de suite très familier au lecteur, de par sa forte ressemblance avec l'entier relatif.

Grâce à ces différents outils, Dedekind aboutit finalement au résultat fondamental suivant, qui vient répondre de manière élégante à notre problématique initiale.

Théorème 1.4 (unicité de la décomposition en produit d'idéaux).

Tout idéal de O (différent de O) est ou un idéal premier, ou peut être représenté d'une seule manière sous la forme d'un produit d'idéaux tous premiers.

Ainsi, même si l'unicité n'est pas toujours assurée en termes d'éléments, elle l'est systématiquement en idéalité. L'idéal nous a donc permis de rétablir le lien avec les lois de la divisibilité des nombres rationnels, en utilisant uniquement les objets réellement existants du système. On pourrait même souligner pour clore cette exposition qu'il s'agit ici du véritable « théorème fondamental de l'arithmétique » :

celui que l'on connaît sur les entiers relatifs n'en est en fait qu'une version bien plus restreinte.

L'étude de l'émergence de l'idéal montre immédiatement différents aspects des mathématiques dedekiniennes.

Premièrement, on peut noter un élan d'arithmétisation dans la théorie des nombres entiers algébriques. Les lois opératoires régissant l'ensemble des nombres rationnels constituent un véritable « modèle de base » sur lequel on peut s'appuyer pour établir une théorie générale des idéaux. L'arithmétique de l'idéal se présente ainsi comme une généralisation à son plus haut degré de l'arithmétique sur $\mathbb{Z}$. Il semble donc intéressant de s'attarder sur le rôle crucial que joue l'arithmétique dans les mathématiques dedekiniennes. Deuxièmement, on voit poindre par la même occasion un point de vue ensembliste : Dedekind utilise sans crainte des collections infinies d'éléments et les manipule comme s'il s'agissait de nombres. Nous verrons l'importance de la notion de « système », qui plus qu'un simple concept, est comme nous l'avons évoqué une opération fondamentale de la pensée humaine. Ces deux points, qui sont en réalité intrinsèquement liés, seront étudiés dans la prochaine partie.

Troisièmement, on perçoit plus globalement chez Dedekind son souci constant de la rigueur, et la volonté d'asseoir les mathématiques sur des bases solides : les « êtres inexistantes » tels les nombres idéaux, entre autres, n'ont pas leur place dans son discours, de par le manque de clarté dans leur nature et leur utilisation. Mais plus encore, cette rigueur semble aller de pair avec deux idées fondamentales : celle de généralité, qui doit conduire à la fois à se détacher des représentations particulières et à étendre au maximum la portée des résultats, et celle de « création » de concepts, qui place le mathématicien comme pleinement acteur de sa science. Nous soulignons également qu'elles procèdent chacune par une forme d'induction, dont nous avons déjà en partie traité avec le principe de permanence. On cherche donc non seulement à étendre la portée d'une théorie à partir de principes déjà existants, mais on définit également de nouveaux objets d'une pertinence remarquable pour atteindre « le plus haut degré de perfection ». Nous devons ainsi comprendre comment opèrent ces différents processus et ce qui fait leur force.

On peut cependant en dernier lieu soulever un paradoxe apparent dans sa vision des mathématiques : même s'il semble s'opposer à un **constructivisme** pur, et qu'il semble plutôt suivre une méthode **axiomatique** (en dégageant des conditions nécessaires pour former une base minimale de la définition, puis en vérifiant la suffisance des conditions trouvées), il n'en reste pas moins que Dedekind « crée » des structures : dans quel courant mathématique se place-t-il alors ? La création doit-elle être entendue au sens intuitionniste ou constructiviste du terme ? Est-elle alors rigoureuse ?

Ces questions concernant la position particulière qu'occupe Dedekind parmi ses contemporains feront l'objet d'une étude approfondie dans la dernière partie.

2. Le rôle fondamental de l'arithmétique

Nous avons eu l'occasion de remarquer l'aspect indéniablement arithmétique que revêt l'idéal chez Dedekind; une lecture attentive de son traité « Sur la théorie des nombres entiers algébriques » nous montre également le recours fréquent à des outils ordinairement spécifiques à l'arithmétique dans le cadre des idéaux : lois opératoires de produit et de division, congruences modulo un idéal, etc., qui gagnent de ce fait en généralité. Par ailleurs, l'arithmétique semble intervenir de manière conséquente dans le processus inductif relatif à la « création », comme en témoigne le principe de permanence de Peacock.

L'étude des autres publications de Dedekind mettra ainsi en lumière la position phare qu'occupe l'arithmétique dans ses mathématiques. Mais plus encore, nous constaterons le souci d'une rigueur totale chez notre mathématicien, qui ira jusqu'à déterminer la véritable essence de l'arithmétique, en faisant ainsi un socle légitime et consistant permettant le développement des autres branches des mathématiques. Cette partie s'appuiera donc grandement sur les écrits originaux de Dedekind, en particulier *Continuité et nombres irrationnels* et *Que sont et à quoi servent les nombres ?*, ainsi que sur les remarques très pertinentes de BENIS SINACEUR (2007) et BENIS SINACEUR (2008).

2.1 La place de l'arithmétique dans les mathématiques

a. L'antériorité épistémologique de l'arithmétique

Pour confirmer cette prédominance de l'arithmétique et comprendre davantage le penchant de Dedekind pour cette discipline, analysons un autre écrit de notre mathématicien : *Continuité et nombres irrationnels* (1872). Dans ce projet, Dedekind fait part de sa volonté de fonder rigoureusement l'analyse réelle sur l'arithmétique, sans aucune référence à l'intuition géométrique.

Ce besoin se fait sentir quand il se met à enseigner le calcul différentiel à l'École polytechnique fédérale de Zurich en 1858. Entre autres, il se rend compte de la difficulté d'introduire la notion de limite vers une valeur fixe en toute rigueur, l'intuition géométrique étant avant tout sollicitée. En fait, Dedekind formule le reproche d'une absence de définition rigoureuse de la continuité.

L'on dit si souvent que le calcul différentiel traite des grandeurs continues, et pourtant nulle part n'est donnée une définition rigoureuse de cette continuité; et même les présentations les plus rigoureuses du calcul différentiel ne fondent pas leurs démonstrations sur la continuité. Soit elles font plus ou moins consciemment appel à la géométrie, ou à des représentations inspirées de la géométrie, soit elles s'appuient sur des théorèmes qui ne sont eux-mêmes jamais démontrés de manière purement arithmétique. (*Continuité et nombres irrationnels*, DEDEKIND [1872] 2008a, p. 60.)

Deux idées fondamentales semblent ainsi émerger : l'assimilation de l'arithmétique à la rigueur, et un certain détachement par rapport à la géométrie. En quoi alors cette dernière manque-t-elle de rigueur? Pourquoi une définition arithmétique de la continuité répond-elle mieux aux exigences de Dedekind?

Ceci demande d'étudier le lien existant entre nombre et grandeur. On sait qu'il est possible d'associer à tout nombre rationnel un unique point sur une ligne droite L à origine et abscisse unité fixées, telle une règle graduée : les rationnels positifs seront à droite de l'origine, les rationnels négatifs à gauche. Pour autant, il existe des points sur L ne correspondant à aucun rationnel.

Considérons le rapport entre le côté et la diagonale d'un carré. Fixons sur L deux points 0 et 1, définissant ainsi une origine et une unité, et construisons le carré comme dans la figure ci-dessous. Pour obtenir le point correspondant à ce rapport, il suffit de rabattre la diagonale sur la droite L comme dans la figure 2.1.

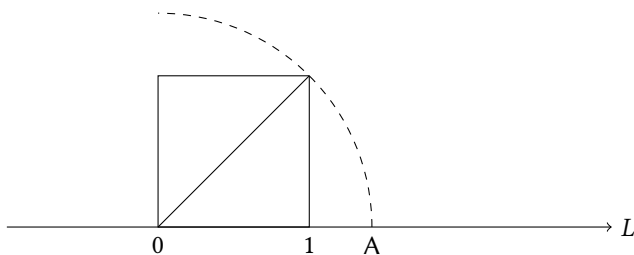


FIGURE 2.1 : Le rapport entre le côté et la diagonale d'un carré.

Le point A ainsi défini ne se trouve alors associé à aucun nombre rationnel (ce rapport vaut $\sqrt{2}$).

Ainsi il faut intuitivement compléter l'ensemble des nombres rationnels pour obtenir un ensemble ayant « la même continuité que la ligne droite ». Au premier abord,

on peut donc croire que la continuité géométrique vient précéder la continuité arithmétique. Mais alors, d'où provient la continuité de la ligne ?

Si pour beaucoup de mathématiciens, elle est intuitive et évidente, vue comme reflet de l'espace réel, ce n'est absolument pas le cas chez Dedekind. La droite n'est tout d'abord pas perçue comme continue, mais *pensée* comme telle : ce n'est ni plus ni moins qu'un axiome prédéfini. Ce n'est donc plus une affaire de perception, mais bien de définition. De plus, Dedekind est le premier à montrer que cette continuité ne va pas de soi et n'est pas intrinsèque à l'espace euclidien : comme l'écrit H. Benis Sinaceur, « rien dans les assomptions d'Euclide ne nous conduit logiquement à la continuité ». Dedekind montre ainsi que l'on peut parfaitement réaliser toute construction euclidienne en se donnant uniquement l'ensemble des nombres réels algébriques, ensemble dénombrable donc discontinu. Bien que surprenante, cette conclusion met à mal l'espoir de fonder la continuité sur la géométrie.

On comprend donc que la géométrie n'est qu'un moyen heuristique pour établir une continuité arithmétique, mais en aucun cas ne lui est antérieure. Seule la définition rigoureuse du nombre réel, de manière purement arithmétique, peut amener à « *penser* le continu de la ligne que la géométrie *ne permet pas* de percevoir ». Définir un nombre réel comme rapport de deux grandeurs présupposerait finalement l'existence de ce que l'on veut démontrer, et constituerait « une faute logique ».

La continuité arithmétique permet donc de fonder la continuité géométrique, car elle suffit à la déterminer et est définie indépendamment d'elle. L'antériorité de l'arithmétique par rapport à la géométrie est alors clairement établie, et d'autres domaines tels que l'algèbre et l'analyse seront à leur tour fondés sur cette discipline. Précisons cependant que cette priorité est d'un caractère épistémologique plutôt qu'ontologique : il s'agit d'une question relative au fondement de la science, ne cherchant pas à savoir lequel des concepts de nombre ou d'espace s'est mis à exister en premier chronologiquement parlant.

b. Un penchant global pour l'arithmétisation

Dedekind prend part plus généralement à un mouvement d'arithmétisation des mathématiques, profondément caractéristique du XIX^e siècle. Ainsi selon les dires d'Hilbert, les mathématiques de cette période se sont développées « sous le signe du nombre ».

Il est bien évident que l'héritage transmis à Dedekind n'est pas simplement le fruit d'une poignée de mathématiciens : ses travaux s'inscrivent avant tout dans un environnement mathématique et scientifique soumis à de multiples influences. Néanmoins, on peut citer trois grands noms des mathématiques, qui ont profondément marqué leur science de leur empreinte, et qui ont certainement incité plus ou moins directement Dedekind à suivre leurs traces.

- On peut tout d'abord citer Carl Friedrich Gauss (1777-1855), qui dirige la thèse de Dedekind à l'université de Göttingen. Il qualifie l'arithmétique de « reine des mathématiques », lui accordant ainsi une place suprême au cœur de sa discipline. Notons qu'il entend l'arithmétique au sens le plus large : il ne s'agit plus de s'intéresser uniquement à la suite des nombres entiers naturels, mais à ce qu'on considère aujourd'hui comme des problèmes de théorie des nombres. Il opère ainsi dans ses *Recherches arithmétiques* (1801) une distinction entre « arithmétique élémentaire » et « arithmétique transcendante ». Par ailleurs, cet ouvrage marque la préférence du concept à la notation, de l'interne à l'externe. En effet, le choix d'une notation particulière pose deux problèmes. Il peut premièrement induire de manière souvent inconsciente une analogie avec des objets déjà existants, et de ce fait conduire à accepter de façon illégitime et hâtive certaines propriétés ; et deuxièmement, il faut prendre garde à ce que les propriétés que l'on vient d'établir ne dépendent pas de telle ou telle représentation explicite, mais bien des objets eux-mêmes. Bien que ces représentations ne soient pas proscrites en tant que telles, elles nécessitent de prendre certaines précautions. Cette démarche se retrouve très nettement dans les mathématiques dedekiniennes, qui préfère se fonder sur les caractéristiques intrinsèques des objets.
- Nous pouvons ensuite mentionner Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), qui accepte la chaire de mathématiques de Göttingen peu après la mort de Gauss. Il aurait exercé une influence profonde sur Dedekind, qui est à cette époque *Privatdozent* dans cette même université : en effet, Dirichlet a véritablement attisé son intérêt pour la théorie des nombres, faisant de lui « un homme nouveau ». Dedekind hérite d'ailleurs de son sens très aigu de la rigueur, et de l'idée centrale que l'arithmétique enveloppe l'algèbre et l'analyse : en effet, d'après Dirichlet, un théorème d'algèbre ou d'analyse peut toujours s'énoncer comme un théorème sur les nombres entiers.
- Terminons cette liste non exhaustive par Bernhard Riemann (1826-1866), qui étudie avec Dedekind à Berlin et à Göttingen, et tisse avec lui une profonde amitié. Dedekind estime d'ailleurs beaucoup les travaux riemanniens, et revendique de nombreux points communs entre leurs visions respectives des mathématiques. Plus précisément, il semblerait que la théorie des fonctions de Riemann ait servi de modèle à Dedekind, du moins dans sa présentation : elle s'attache à « mettre en évidence les concepts les plus généraux », ce qui nous l'avons constaté est typique de Dedekind. Elle pourrait donc l'avoir quelque peu poussé à effectuer un travail similaire à l'échelle de la théorie des nombres, en dégageant des « concepts fondamentaux simples ». Par exemple, RIEMANN (1869) a proposé une nouvelle définition de l'espace abstrait dans son mémoire d'habilitation « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie », qui est caractérisé de manière *intrinsèque* par sa métrique. Une telle définition ne suppose en effet rien de donné ou d'intuitif sur le concept même d'espace

ou sur les constructions que l'on peut y effectuer. C'est exactement l'idée qu'a suivie Dedekind pour sa définition du nombre : elle doit lui être inhérente et ne se rapporter « ni à l'espace, ni au temps de notre expérience physique ».

La notion riemannienne de *variété* serait d'ailleurs, selon les historiens, l'ancêtre des « systèmes » de Dedekind. Elle s'entend de manière très large comme un cas particulier de collection d'objets, dont les éléments sont unis par un mode de liaison spécifique, permettant de passer de l'un à l'autre. Notons cependant que ce concept ne s'entend pas totalement comme une approche ensembliste au sens de Dedekind ou de Cantor, ces derniers préférant « neutraliser » ces modes de liaison pour se recentrer sur les éléments en eux-mêmes. Il n'en reste pas moins que la variété riemannienne a très probablement influencé les deux mathématiciens, qui emploient parfois le terme allemand *Mannigfaltigkeit* pour désigner un ensemble quelconque.

À travers ces trois mathématiciens, on retrouve en fait une véritable « approche conceptuelle », qui fait la tradition de l'université de Göttingen au XIX^e siècle. Si Gauss et Dirichlet peuvent en être vus comme les pères fondateurs, ce sont Dedekind et Riemann qui la perpétuent à travers leurs travaux, malgré une réception qui n'est pas toujours des plus chaleureuses. Globalement, elle marque la préférence de l'idée au calcul, du concept à la présentation algorithmique, s'opposant ainsi à l'approche plus « calculatoire » de l'école de Berlin. Elle bouleverse ainsi le mode de pensée : si les objets manipulés sont en surface les mêmes dans les deux cas, leur traitement et leurs définitions s'y présentent de façon sensiblement différente. Dans cet esprit, Dirichlet donne pour la première fois des méthodes non constructives en théorie des nombres, ou des preuves d'existence sans moyen de construction. De même, Riemann et Dedekind placent tous deux les mathématiques à un niveau d'abstraction supérieur, en recourant à des collections de fonctions ou de nombres pour éviter au maximum les calculs.

Prenons garde cependant à ne pas tomber dans une opposition tranchée entre ces deux conceptions des mathématiques. Celle dont se défend Dedekind ne rejette en aucun cas le calcul : elle lui préfère simplement le concept qui doit être en état d'anticiper, voire de prédire les résultats que fournissent les procédures algorithmiques. Le concept prescrit en fait un environnement, une structure permettant de dominer l'objet en question et donc de posséder un coup d'avance dans sa compréhension par rapport à un calcul direct.

Que signifie d'ailleurs le terme « concept » au sens de Dedekind ? Bien qu'elle n'en fournisse aucune définition précise, H. Benis Sinaceur y voit « le fruit d'une opération mentale repérant et reliant des propriétés réelles des choses ». Il s'agirait d'un mode de pensée qui trouve sa signification, sa compréhension, non dans un support linguistique ou dans un objet auquel il se réfère, mais bien en lui-même. Il sert donc avant tout à organiser et à structurer ce qui nous entoure, de manière objective : il doit cerner les propriétés réelles des objets.

Finalement, l'arithmétique jouit d'un statut d'une importance majeure : elle se positionne comme base de la science mathématique, et en même temps semble favoriser une approche plus axée vers les concepts et vers l'essence même des objets.

c. Tout réduire à l'arithmétique ?

Si l'arithmétique est bien entendue comme fondement de toutes les mathématiques, pourquoi alors ne pas les *réduire* à cette seule branche ? C'est en effet ce que préconise Kronecker, qui restreint tout de manière radicale aux entiers ; mais ce n'est point ce qu'envisage Dedekind.

Toutefois, je ne vois aucun gain à entreprendre effectivement – et tel n'était pas non plus le projet de Dirichlet – cette pénible transcription et à ne vouloir utiliser et reconnaître que les nombres naturels. Bien au contraire, les progrès les plus grands et les plus féconds en mathématiques et dans d'autres sciences sont dus avant tout à la création et à l'introduction de nouveaux concepts, qui sont rendues nécessaires par le fréquent retour de phénomènes complexes difficilement maîtrisables par les anciens concepts. (*Que sont et à quoi servent les nombres ?*, DEDEKIND [1888] [2008b](#), p. 139.)

Dedekind adopte en réalité la démarche opposée, qui consiste à tout *développer* à partir des entiers : l'arithmétique forme une base sur laquelle on peut créer des concepts généraux et abstraits, visant par exemple à unifier une théorie donnée. Ceci confirme donc les propos que nous venons de tenir, à savoir que l'intervention de l'arithmétique dans ce processus de « création » de concepts est essentielle. Mais il est important de souligner également que si la création y prend ses racines, elle ne s'entend pas simplement comme une somme de petits principes arithmétiques. Cela la réduirait finalement à une immense tautologie, et ne permettrait pas de progresser dans la connaissance de la théorie.

En conclusion, nous avons mis en évidence que pour Dedekind, la science mathématique repose sur l'arithmétique, mais qu'elle ne doit pas pour autant y être réduite : elle n'y trouverait aucun intérêt. Au contraire, l'arithmétique constitue un point de départ pour le développement de nouveaux concepts, tel celui d'idéal, nous autorisant alors à résoudre des problèmes d'origines diverses.

Il reste cependant à comprendre pourquoi l'arithmétique est profondément synonyme de rigueur dans les mathématiques dedekiniennes. Dans son idéal de présenter des mathématiques unifiées et solidement fondées, il est hautement probable que Dedekind ait tenté de répondre à cette question dans l'un de ces écrits, en remontant par exemple aux origines mêmes de l'arithmétique.

2.2 Aux origines de l'arithmétique

a. Une définition des entiers naturels

Il semblerait bien que Dedekind ait donné raison à notre intuition, en publiant *Que sont et à quoi servent les nombres ?* (1888) ; ce sera en quelque sorte la dernière étape de notre « remontée aux sources », qui va conférer rigueur et légitimité à l'arithmétique, comme base de tout développement mathématique.

Que sont et à quoi servent les nombres ? constitue d'une certaine manière le complément de *Continuité et nombres irrationnels* : ces deux écrits forment les deux pièces d'un projet visant à poser les fondements de l'arithmétique des entiers positifs, pour obtenir par « extension conservative » les nombres relatifs et rationnels, et enfin aboutir aux nombres réels.

Le premier est ainsi à placer logiquement en amont du second, qui considère acquise l'arithmétique des rationnels ; on peut alors s'étonner du fait qu'il ait été publié seize ans après *Continuité et nombres irrationnels*. Ceci peut s'expliquer par différentes raisons. Tout d'abord, *Que sont et à quoi servent les nombres ?* est le résultat de quinze années de réflexion, et n'a pas été écrit d'une seule traite : Dedekind a connu des moments de doute et d'interruption dans son travail, pensant même que son écrit ne verrait jamais le jour. Ensuite, la question du fondement de l'arithmétique des entiers naturels ne s'est pas toujours posée chez Dedekind : dans sa thèse d'habilitation de 1854, les entiers positifs sont considérés comme « la suite originaire de nombres », permettant d'engendrer tous les autres types de nombres. En d'autres termes, les nombres entiers formaient selon lui la donnée ultime et leur existence n'avait nullement besoin d'être démontrée.

Désormais, sa vision est toute autre : les entiers naturels positifs doivent être fondés car « ce qui est démontrable ne doit pas être admis sans démonstration ». Il s'agit là d'une démarche fondamentalement nouvelle par rapport à ses contemporains qui, à l'instar de Dedekind lui-même quelques années auparavant, placent les entiers naturels comme des entités allant de soi et ne nécessitant aucune définition préalable. H. Benis Sinaceur dresse le constat suivant : pour Brouwer ou Poincaré, les entiers naturels relèvent de l'intuition ; pour Helmholtz, ils sont issus de l'expérience ; pour Kronecker, ils sont tout simplement le fruit de l'intervention divine. Cette dernière affirmation résulte d'une interprétation littérale de la phrase de Kronecker que « Le bon Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme », que Philippe SÉGUIN (2023) rectifie : Kronecker affirme simplement qu'on ne peut rien dire de l'origine des nombres entiers.

Comment alors Dedekind va-t-il fonder la notion de nombre naturel, et l'arithmétique qui en découle ?

On constate tout d'abord que Dedekind veut placer l'arithmétique comme « simple partie de la logique » : il compte en particulier dégager le concept même de nombre

de toute représentation liée à l'espace et au temps, qui sont des notions totalement étrangères aux mathématiques et qui relèvent avant tout de la perception et de l'intuition. Au contraire, le nombre se veut une « émanation immédiate des lois de la pensée », entièrement « créé » par l'esprit.

Comment faut-il entendre tout ceci ? Pour définir les entiers naturels que nous connaissons, Dedekind va en fait chercher à les dépouiller de tout contenu particulier, pour en faire des éléments purement abstraits obéissant à une structure d'ordre. Les nombres entiers concrets seront ainsi les cas particuliers d'une arithmétique plus générale, ne faisant plus nécessairement intervenir des nombres, mais qui aura l'avantage de ne s'appuyer que sur des représentations de l'esprit, ou plus exactement sur des « opérations fondamentales de la pensée ».

b. Les opérations de la pensée

En effet, pour Dedekind, le concept de nombre est intrinsèquement lié à la nature même de l'esprit, et facilite le travail de la pensée. Ainsi selon lui, « tout homme, même s'il n'y prend pas clairement garde, est arithméticien ». Quoi alors de mieux pour expliciter les lois arithmétiques que des actes de la pensée ?

C'est donc comme véritables activités de l'esprit que doivent être comprises ces opérations, et non comme simples résultats d'un procédé effectif. Elles dépassent d'ailleurs assez largement la seule arithmétique, et précèdent finalement toute forme de création mathématique, quelle qu'en soit la forme. Selon M. Detlefsen (voir HAFNER 2014a), il s'agirait même des seules vérités non prouvables, ce qui en ferait des candidates sérieuses à l'idéal de rigueur dedekindien.

Ces opérations sont au nombre de deux, et force est de constater qu'elles posent dans le même temps les jalons de la théorie ensembliste.

- La première d'entre elles vise à saisir sous un même point de vue, à réunir en pensée des choses différentes : le concept qui en résulte est appelé *système*, ou ensemble. Il est ainsi permis d'assimiler une diversité de choses à une unité. Initialement, cette opération n'a suscité aucune question de fondement chez Dedekind, tant elle lui était naturelle et familière ; cependant, il ressentira ultérieurement la nécessité de prouver l'existence de systèmes infinis, qui rassemblent en une unité une infinité d'éléments. Bien qu'il n'y soit pas réellement parvenu, il n'a jamais remis en cause la capacité de l'esprit à créer ce type de concepts.
- La seconde consiste à mettre en relation, en correspondance, des choses différentes : elle donne naissance au concept d'*application*¹, qui permet en quelque sorte d'effectuer une traduction d'un langage à un autre, et de conserver ou

1. Nous préférons cette traduction à celle de représentation proposée par H. BENIS SINACEUR (2008, p. 11) pour le mot *Abbildung*, voir SÉGUIN 2022, p. 276, n. 30.

transporter des propriétés entre deux domaines. Nous pourrions dire qu'il s'agit de l'ancêtre de notre morphisme actuel, qui préserve les structures.

Comme l'écrit H. Benis Sinaceur, on ne peut que souligner « l'originalité épistémologique » et « l'acte inventif » de ces conceptions, qui placent ici Dedekind dans la veine d'un **formalisme** leibnizien. Ainsi, l'arithmétique des entiers naturels va pouvoir naître de ces deux actes fondamentaux de l'esprit, matérialisés par le système et l'application. En effet, Dedekind s'attache ensuite à développer les notions de chaîne et d'application semblable, entièrement fondées sur les deux concepts précédents, qui décrivent de manière parfaitement rigoureuse les lois arithmétiques générales auxquelles obéissent en particulier les entiers naturels. Il donne ainsi une nouvelle définition profondément abstraite du nombre, qui se dégage de nos nombres « intuitifs » usuels. C'est en ce sens-là que le nombre devient « une libre création de l'esprit humain ».

Nous ne décrivons pas davantage ici ces nouveaux concepts, qui nous éloigneraient de notre but initial. Néanmoins, nous avons à présent cerné ce qui fait de l'arithmétique un objet de rigueur chez Dedekind : non seulement elle se place comme partie de la logique, dépassant ainsi la seule arithmétique des entiers naturels et s'appliquant à toute sorte d'objets, mais elle repose de plus uniquement sur deux opérations de la pensée, le système et l'application. Sa définition ne nécessite donc aucun recours à des opérations arithmétiques, ce qui évite une démonstration pour le moins circulaire. Aussi solidement fondée, l'arithmétique peut ainsi soutenir toutes les mathématiques.

Elle se laisse alors développer dans le cadre des idéaux, ou dans celui d'autres concepts qui ne semblaient pas arithmétisables *a priori*, venant acquérir un degré de généralité sans précédent. Elle permet également un traitement de tous les cas sans exception, en unifiant une théorie donnée, ce qui en fait un puissant outil de généralité.

Remarquons également que le système et l'application, en plus de fonder rigoureusement l'arithmétique, ont aussi leur intérêt propre dans la définition de nouvelles structures, telles que l'idéal ou la coupure.

2.3 L'arithmétique au service des concepts

a. Un second concept dedekiniien : la coupure

Pour terminer cette partie, nous nous proposons justement de comparer deux concepts créés par Dedekind : l'idéal et la coupure. Nous essaierons surtout d'en percevoir les similitudes, et de constater à quel point l'arithmétique et la théorie ensembliste y exercent directement leurs influences.

Développons brièvement avant toute chose la notion de coupure, qui est explicitée par Dedekind dans *Continuité et nombres irrationnels*. Rappelons que cet écrit vise à construire rigoureusement l'ensemble des nombres réels.

Nous avons déjà précisé le fait qu'à tout nombre rationnel est associé un unique point sur une ligne droite L . Cependant, la réciproque est clairement fausse, puisqu'il existe des points de L qui ne correspondent à aucun nombre rationnel. Construire les réels revient donc de manière informelle à compléter l'ensemble des rationnels de manière à obtenir un ensemble aussi complet que la droite, aussi « continu » au sens de Dedekind ; il y aura alors en termes modernes une bijection entre l'ensemble des nombres réels et celui des points de la droite. Comment matérialiser cette idée de manière indépendante de la géométrie, qui nous l'avons vu ne rentre pas dans l'idéal de rigueur dedekinién ?

La réponse tient pour l'essentiel en deux points : l'arithmétique des nombres rationnels et la notion d'ensemble.

Dedekind commence par effectuer la remarque suivante : tout nombre rationnel a partage l'ensemble des rationnels R en deux ensembles ou « classes » A_1 et A_2 , telles que tout élément de A_1 est inférieur à tout élément de A_2 ; a est alors au choix le plus grand nombre de la classe A_1 ou le plus petit nombre de la classe A_2 .

Ceci lui donne l'idée de concevoir plus généralement une subdivision de R en deux ensembles A_1 et A_2 , telle que tout élément de A_1 est inférieur à tout élément de A_2 : la donnée d'un tel couple (A_1, A_2) sera ainsi appelée « coupure ». Il est alors clair d'après ce qui précède que tout nombre rationnel définit une coupure. Pour autant, toute coupure n'est pas opérée par un nombre rationnel.

En effet, soit A_2 l'ensemble des rationnels positifs dont le carré est supérieur strictement à 2, et soit A_1 l'ensemble formé de tous les autres rationnels. Vérifions que tout élément de A_1 est bien inférieur à tout élément de A_2 . Soit $a_1 \in A_1$; si $a_1 \leq 0$, il est directement plus petit que tout élément $a_2 \in A_2$ qui est positif par définition. Si $a_1 > 0$, son carré est inférieur ou égal à 2, donc il est plus petit que tout élément $a_2 \in A_2$ dont le carré est strictement supérieur à 2. (A_1, A_2) définit donc bien une coupure, pourtant elle n'est opérée par aucun nombre rationnel : on ne peut en trouver un dont le carré vaut 2.

Nous voyons ainsi apparaître une propriété « d'incomplétude » des rationnels : on ne peut associer à toute coupure un nombre rationnel. La coupure vient d'une certaine façon jouer arithmétiquement le rôle de la ligne droite. On peut alors définir les irrationnels de manière à rendre totale la correspondance entre nombre réel et coupure : pour toute coupure (A_1, A_2) non opérée par un rationnel, on crée un nouveau nombre α , dit irrationnel, qui lui sera associé. De cette manière, toute coupure est assimilée à un nombre réel, rationnel ou irrationnel, et inversement.

Pour achever cette construction, il reste à ordonner l'ensemble des réels et à y définir les opérations usuelles d'addition, de soustraction, de produit, etc. Il suffit pour cela de se ramener aux coupures qu'ils définissent, qui rappelons-le ne font appel qu'à

des nombres rationnels, auxquels nous savons appliquer en toute rigueur les lois arithmétiques. On obtiendra donc des opérations qui seront définies uniquement à partir de celles des rationnels, et qui plus encore viendront les prolonger.

b. Les points communs entre coupure et idéal

Quels parallèles pouvons-nous alors effectuer entre ce concept et celui d'idéal ?

- En premier lieu, ces deux concepts s'inscrivent clairement dans la logique d'arithmétisation de Dedekind. Non seulement, les problèmes posés sont à chaque fois traduits dans le langage propre à l'arithmétique, mais leurs solutions y trouvent également toute leur force. En effet, la théorie de la divisibilité des idéaux n'est considérée qu'à travers les règles de divisibilité sur les entiers algébriques, elles-mêmes fondées sur celles des rationnels ; quant à la notion d'idéal en elle-même, elle est définie uniquement *via* la stabilité par deux opérations arithmétiques : l'addition et le produit par un élément de l'anneau. De manière semblable, Dedekind parvient à retranscrire par le concept de coupure la complétude de la droite, et développe l'arithmétique des réels en s'appuyant une nouvelle fois sur celle des rationnels. Remarquons ici la manière dont tout est « développé » à partir des rationnels, et donc par extension à partir des entiers, conformément à ce que souhaite Dedekind.
- Bien entendu, on note l'usage dans les deux cas de l'opération de pensée relative au système, qu'il place à la base même de ses concepts, et l'aisance avec laquelle il pense et manipule les ensembles infinis. En effet, l'idéal est lui-même une collection potentiellement infinie d'éléments d'un domaine, tandis que la coupure consiste en une partition de l'ensemble des rationnels en deux sous-ensembles infinis. Dedekind est ainsi, avec Cantor, l'initiateur de la théorie ensembliste qui a révolutionné le fondement même des mathématiques et de la logique.
- En outre, on constate le souci de rigueur dans la définition de ces concepts, qui ne sont fondés que sur des faits préalablement démontrés et établis, tout en refusant de considérer des « êtres inexistantes » tels les nombres idéaux, ou des « objets intuitifs » telle la ligne droite comme bases du raisonnement ; cela pourrait selon Dedekind conduire à des « conclusions précipitées » quant à la nature des lois ou des objets employés. Tout au plus sont-ils admis comme moyens heuristiques. En particulier, on se doit d'établir les propriétés souhaitées à partir des domaines initiaux, et de vérifier que les lois trouvées coïncident avec celles de départ : l'arithmétique est ainsi étendue par ses propres outils, ce qui assure de ne faire intervenir aucun élément étranger. On retrouve alors cette forme d'induction, suggérée par une sorte de principe de permanence semblable à celui de Peacock, permettant de passer du particulier au général : c'est ce procédé qui permet de guider la création d'un concept et de lui conférer sa pertinence. Nous y reviendrons dans la dernière partie.

- Enfin, on notera cette volonté constante chez Dedekind de dégager les propriétés à la fois les plus générales et les plus simples possibles. Ainsi les nombres réels doivent être engendrés par une seule définition, et non successivement comme racines d'équations, logarithmes, etc. De manière analogue, Dedekind cherche à déterminer des propriétés communes servant à définir tous les nombres idéaux, qui selon lui ne doivent pas être vus isolément à travers les propriétés A , B , C , etc. qui leur sont associées.

En conclusion, l'arithmétique, à la fois comme fondement et outil du développement mathématique, occupe comme nous le supposons une place prépondérante dans la vision dedekinienne. Fondée par ailleurs sur deux opérations de la pensée, le système et l'application, elle devient partie de la logique, ce qui en fait une discipline consistante et rigoureuse, permettant d'asseoir les mathématiques sur des bases solides. L'arithmétique conjuguée à ces deux activités de l'esprit humain participe à la genèse de différents concepts, tels l'idéal et la coupure, qui atteignent alors un degré incontestable de généralité.

Profitons-en pour signaler également que Dedekind a développé ses idées sur l'idéal et la coupure simultanément, c'est-à-dire vers 1858. Il est cependant probable qu'il ait *d'abord* conçu l'idéal comme être incarnant une propriété de divisibilité, *puis* la coupure comme être incarnant la propriété d'égalité des rapports.

On peut finalement se demander ce qui, outre l'intervention de l'arithmétique, conduit à la création d'un concept. Il nous semble en effet nécessaire, pour saisir pleinement toute la puissance de l'idéal, de comprendre comment s'effectue et doit s'entendre ce processus inventif, et surtout ce qui le rend viable et rigoureux. Ce sera l'axe central de notre troisième et ultime partie.

3. La création de concepts

Les réflexions précédentes nous ont amenée à constater le rôle primordial des concepts dans les mathématiques dedekiniennes, qui interviennent à différents moments du raisonnement mathématique, tant dans la quête des fondements en arithmétique (système, application) que dans le développement de nouvelles théories (idéal). Nous devons à présent, pour compléter cette étude, comprendre comment procède la « création » de ces concepts : est-elle soumise au hasard ? De quoi relève sa rigueur ? Quel est son intérêt ?

Nous allons voir que cette création, qui peut sembler de prime abord relativement aléatoire, consiste véritablement en un processus élaboré et réglé de manière stricte par ce que Dedekind voit comme des « nécessités internes » aux mathématiques. Elle vient ainsi répondre de manière pertinente à différents problèmes posés par cette science, en conjuguant deux grands principes qu'il affectionne particulièrement : la généralité et la rigueur. Elle place par la même occasion notre mathématicien dans une position innovante par rapport à ses contemporains, à la croisée du **logicisme**, du **kantisme** et du **constructivisme** notamment.

Cette partie utilisera différentes ressources : le mémoire d'habilitation de Dedekind, intitulé « Sur l'introduction de nouvelles fonctions en mathématiques », ainsi que les articles BENIS SINACEUR 2007, HAFFNER 2014a, McCARTY 1995, KITCHER 1986.

3.1 Le rôle de l'induction : du particulier au général

a. L'élaboration des concepts en science

Nous avons déjà noté, que ce soit lors de la création de l'idéal, ou de celle de la coupure, l'intervention d'un processus inductif, qui vient généraliser des propriétés initialement valables sur des domaines restreints ; il est donc en ce sens à rapprocher du principe de permanence dont nous avons traité en première partie.

Le texte à portée épistémologique de Dedekind, « Sur l'introduction de nouvelles fonctions en mathématiques », vient justement éclairer cette vision particulière du développement mathématique, et ce qui fait la singularité de cette science parmi toutes les autres. Nous serons ainsi, à la suite de l'examen détaillé de ce texte, plus à même de saisir ce fameux procédé de création qui sous-tend les concepts.

Dans un premier temps, Dedekind s'intéresse de manière générale aux relations qu'entretiennent la science et la vérité. Pour lui, la vérité est fondamentalement extérieure à nous, et « immuable » : elle constitue l'objectif ultime, l'idéal que l'on cherche à atteindre, et qui par définition ne dépend pas de l'être humain lui-même. La science, quant à elle, est le moyen le plus précieux pour accéder à la vérité, et forme « la marche de la connaissance humaine ». Elle est soumise au libre arbitre de chacun, et peut revêtir ainsi des formes très diverses : deux individus ne vont pas aborder le problème sous le même angle et useront d'outils différents, tout en tirant finalement des conclusions semblables. Bien que souvent imparfaite, comme acte propre à l'humain, elle représente le fonctionnement de notre esprit, qui ne peut percevoir d'emblée la vérité : notre entendement reste limité et progressif.

Ainsi cette diversité propre à la science fait naître différents concepts, nous permettant « d'encadrer » l'objet que l'on cherche à étudier. Dedekind présente ainsi l'exemple des classifications du matériau en minéralogie, ou celui de la jurisprudence en droit, qui ont en commun cette volonté d'organiser le système et de synthétiser les connaissances de manière uniforme, mais surtout efficace. En effet, le concept doit avant tout s'avérer un outil pertinent, et non un simple objet visant à regrouper les similitudes. De cette manière, une classification des matériaux suivant leur couleur n'apporterait rien de spécifiquement intéressant pour leur étude ; on se doit alors de distinguer les critères les plus judicieux pour fonder le concept. Or dans ces cas précis, seule l'expérience peut nous enseigner si les hypothèses choisies sont convenables : la science « ne répond que par la suite » aux concepts que l'on a posés, pour valider ou non leur viabilité.

Le droit présente également une certaine analogie avec les mathématiques, et constitue de ce fait un parallèle pertinent. Il s'agit de constituer un ensemble de règles régissant la conduite de l'homme en société. Ce domaine se veut donc une tentative de regroupement et de systématisation de ces règles, dans un corpus logique et non contradictoire. L'intérêt est alors d'énoncer, dans le cadre d'une société donnée, des lois générales permettant de saisir toute la diversité des situations particulières auxquelles l'humain peut se trouver confronté. On retrouve ici un souci de généralité et de rigueur profondément caractéristique des mathématiques. Par ailleurs, le droit se trouve en perpétuelle évolution, et ne peut se contenter de se reposer sur ses acquis : il doit tenir compte des bouleversements sociaux et culturels, et s'y adapter tout en conservant une certaine cohérence avec les lois précédemment établies. Le cas de la jurisprudence montre ainsi le besoin de modifier parfois les concepts introduits ; en effet, il peut arriver que leur définition, posée au départ trop étroite ou trop large, ne réponde plus efficacement aux situations présentées : au gré des

découvertes, le concept se trouve ainsi ajusté, repensé, et gagne ainsi en puissance et en généralité.

C'est finalement ce qui permet le progrès dans la science d'après Dedekind, car son développement « réagit toujours sur le système par lequel on tente d'en concevoir l'organisme ». Notons la connotation biologique du dernier terme, qui montre comme le souligne H. Benis Sinaceur « l'autonomie relative du système et sa capacité interne à se transformer » selon les principes d'action et de rétroaction.

b. Le cas particulier des concepts en mathématiques

On ne voit donc aucune raison pour que les mathématiques ne connaissent pas elles aussi un procédé de création de concepts. Mais si le principe demeure identique, son fonctionnement est cependant tout autre.

Les définitions initiales, appliquées à un domaine limité, viennent, comme on a pu le constater à travers l'idéal ou la coupure par exemple, atteindre un degré de généralité supérieur sur des domaines plus vastes. Mais alors que dans les autres sciences, ces élargissements peuvent s'effectuer de différentes manières, il n'en va pas de même en mathématiques ; comme l'explique Dedekind, l'extension d'une définition n'est en rien soumise à l'arbitraire.

Au contraire elles résultent selon une nécessité contraignante des définitions antérieures plus limitées, lorsqu'on applique le principe de considérer comme *universellement valides* les lois qui proviennent des définitions initiales et sont caractéristiques des concepts qu'elles désignent. Alors inversement, ces lois deviennent la source des définitions généralisées, lorsqu'on pose la question : comment concevoir la définition générale de manière à ce que la loi caractéristique découverte continue d'être satisfaite ? (« Sur l'introduction de nouvelles fonctions en mathématiques », DEDEKIND [1854] 2008c, p. 224-225.)

Il semble ainsi que pour Dedekind, les mathématiques possèdent des exigences internes, qui la déterminent complètement. Elles caractérisent elles-mêmes leurs propres contraintes, et savent nourrir et enrichir leurs définitions, selon des règles bien définies ; en particulier, elles considèrent le principe suivant : les lois valables sur le domaine restreint doivent être préservées dans leurs extensions généralisées. Le principe de permanence se trouve ici quelque peu appliqué à l'ensemble des mathématiques, dépasse la première version « arithmétique » de Peacock, et se place en fait comme fil conducteur de la genèse du concept. Créer un concept, c'est trouver la structure qui va permettre de conserver les lois initiales, tout en leur donnant une portée plus générale.

Dedekind soumet ainsi le développement mathématique à une véritable induction, passant du particulier au général, mais qui n'est en rien le fruit du hasard : un lien

de nécessité articule et relie chaque étape de la construction à la suivante, faisant émerger un raisonnement en « chaîne », selon les dires du mathématicien¹.

Pour illustrer ce principe d'induction, Dedekind expose l'exemple de la multiplication par un nombre négatif. Initialement, la multiplication ne résulte que de l'addition répétée d'un multiplicande, un certain nombre de fois : ce nombre est appelé multiplicateur. Ainsi dans cette définition, le multiplicateur est nécessairement un entier positif, afin de s'entendre comme répétition d'un même acte. On cherche donc à étendre cette multiplication aux multiplicateurs entiers négatifs, dans le souci de conserver l'opération initiale valable pour les entiers positifs. Comment s'y prendre concrètement ?

Considérons un multiplicateur positif a et un multiplicande c : on cherche à définir le résultat de $(a + 1) \times c$. Or

$$(a + 1) \times c = \underbrace{c + \cdots + c}_{a \text{ fois}} + c = a \times c + c.$$

Puis par récurrence, on a pour tout entier positif b

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

Plaçons-nous dans le cas où $a > b$; alors $a - b > 0$, et remplaçons a par $a - b$ dans l'égalité ci-dessus. On obtient

$$a \times c = ((a - b) + b) \times c = (a - b) \times c + b \times c$$

et donc

$$(a - b) \times c = a \times c - b \times c.$$

On obtient ainsi un théorème de la soustraction dans le cas particulier où $a > b$, ce qui correspond en fait à un énoncé « d'algèbre arithmétique » au sens de Peacock : les symboles sont ici « généraux dans leur forme mais pas dans leur valeur ». Ceci permet l'application du principe de permanence ; la loi devient donc universellement valide, en particulier dans le cas où $a - b < 0$. En prenant $a = 0$, on obtient donc l'égalité cherchée pour $-b$ négatif :

$$(-b) \times c = -(b \times c).$$

1. Cette induction est à ne pas confondre avec le principe de récurrence. La notion de chaîne sert aussi à définir rigoureusement les nombres naturels, ce qui suggère une analogie avec sa vision arithmétique. Si l'on revient quelques instants sur son texte *Que sont et à quoi servent les nombres ?*, on constate ainsi la présence du « théorème de la définition par induction » (théorème 126), qui justifie de manière rigoureuse, pour la première fois dans l'histoire des mathématiques, l'engendrement par induction des opérations arithmétiques fondamentales. Il est en ce sens plus fort que le raisonnement par récurrence, puisqu'il donne légitimité à toutes les définitions récursives. Bien qu'il n'explique ni ne justifie l'usage de l'induction dans la création des concepts, on peut tout de même noter sa place de choix dans la démarche dedekinienne, ainsi que l'influence directe de l'arithmétique sur son raisonnement mathématique.

On voit comment opère ici cette induction : elle préserve la définition d'origine relative au domaine restreint des entiers positifs, et par les lois arithmétiques sur cet ensemble et le principe de permanence, l'étend au domaine plus large des entiers négatifs. On insiste ici sur le fait que la définition initiale demeure intacte.

c. Les limites de l'induction

Cependant, il existe des cas où la définition initiale, faute de pouvoir se généraliser aisément, doit être totalement abandonnée au profit d'une autre, plus pertinente. C'est le cas de celle de l'intégration. On peut bien entendre la voir comme l'opération inverse de celle de la différentiation, c'est-à-dire comme une opération formelle permettant de passer de la dérivée aux primitives. Cependant, comment établir en toute généralité une réciproque à l'opération « mécanique » de différentiation, un vrai processus qui rend systématiquement légitime et possible le passage de l'une à l'autre ? On resterait très probablement enfermé dans cette conception qui rend dépendante l'intégration de la différentiation, et qui ne permet pas de répondre convenablement à ce besoin de généralité, si l'on n'acceptait pas la vision de l'intégrale comme limite d'une somme d'infiniment petits. C'est ce concept qui confère une vraie autonomie à l'opération d'intégration, sans pour autant rompre ses liens avec la différentiation. La définition initiale n'est donc pas pleinement satisfaisante, et doit être pour ainsi dire corrigée voire délaissée pour celle-ci.

On trouve ici un cas où les mathématiciens viennent réagir sur leur propre définition et marquer leurs faiblesses, ce qui nous permet de revoir nos concepts sous une autre approche, et de retrouver « les bonnes définitions » qui serviront de base au développement de la théorie. Cet exemple incarne également les limites du principe de permanence : la création ne peut systématiquement se réduire en une pure et simple application de ce dernier. S'il s'avère être un outil souvent efficace, il doit être utilisé avec parcimonie et prudence. La généralisation d'un résultat ne peut s'effectuer aveuglément, mais demande au contraire une véritable réflexion sur les conséquences qu'elle impliquera, ou sur sa pertinence. On voit donc que la création est guidée par d'autres forces que la permanence des formes, et requiert en particulier un génie propre au mathématicien, ou pourrait-on dire une forme d'intuition. Celle-ci n'est donc pas à proscrire totalement : si les constructions dedekiniennes se veulent, comme nous le verrons, des produits issus intégralement de la raison, il ne faut pas nier et minimiser le rôle suggestif de l'intuition dans cette entreprise.

On en conclut donc que la création de concepts en mathématiques se matérialise comme un raisonnement en « cascade », un processus réellement inductif, qui n'a rien d'aléatoire ou de fortuit. Une fois les bonnes définitions posées, il est possible de les généraliser et d'assurer une parfaite cohérence de toute une théorie. Alors que dans les autres sciences, l'expérience vient guider cette création, c'est ici ce que Dedekind *ressent* comme une exigence interne aux mathématiques qui joue ce rôle,

en particulier le principe de permanence, qui « révèle les conditions nécessaires pour que les lois dans certaines situations deviennent, modulo certaines précisions, universellement valides ». Il semble en effet opportun de préciser que cette « nécessité contraignante », si chère à Dedekind, n'est pas pour autant une vérité indiscutable qui fait loi : des mathématiciens comme Kronecker ou Edwards par exemple ne la jugent pas indispensable.

Notons également la capacité des mathématiques à rebondir sur ses définitions d'origine, à souligner leur défaillance, dès qu'elles semblent trop restreintes ou inadaptées à l'étude : c'est alors au mathématicien qu'il revient de les corriger, de les repenser, pour retrouver des définitions aisément généralisables. Le mathématicien n'est donc pas simplement soumis au principe de permanence, comme on aurait pu le croire initialement, il est également un formidable acteur de l'élaboration de sa science.

3.2 Le lien entre rigueur et généralité

a. L'idéal de rigueur : le « principe de Dedekind »

Les concepts chez Dedekind semblent avant tout tisser des liens étroits entre les notions de rigueur et de généralité. En effet, un concept doit permettre d'embrasser d'un seul coup toute une théorie pour pouvoir la saisir dans sa globalité, tout en atteignant « le plus haut degré de perfection » en termes de rigueur. Il semble donc que l'on ne puisse penser la rigueur qu'à travers le général, et c'est cette relation que nous essayons à présent d'explicitier.

Revenons tout d'abord sur une affirmation de Dedekind que nous avons déjà citée auparavant, qui forme l'ouverture de *Que sont et à quoi servent les nombres ?*

En science, ce qui est démontrable ne doit pas être admis sans démonstration. (*Que sont et à quoi servent les nombres ?*, DEDEKIND [1888] 2008b, préface de la 1^{re} édition.)

Commencer une définition des nombres naturels par des exigences aussi fortes n'est pas anodin. Comme l'explique M. Detlefsen (voir HAFNER 2014a), la meilleure justification possible d'une proposition prouvable est une preuve : Dedekind ne conçoit rien de rigoureux qui ne soit pas démontré. C'est ce que Detlefsen appelle « le principe de Dedekind ».

Chaque étape du raisonnement mathématique doit être construite sur des principes antérieurs démontrés, et non plus simplement démontrables : admettre un résultat en apparence trivial peut conduire à des conclusions hâtives, et dans les cas les plus critiques, à un effondrement total du système. Il est donc important de s'assurer, même si cela peut sembler fastidieux, que toutes les définitions ou propriétés intermédiaires ont été prouvées, pour rester dans un cadre purement rigoureux. Ainsi au

stade ultime, une preuve ne peut être acceptée comme rigoureuse que si elle repose sur des prémisses indémontrables. Et selon Dedekind, ces prémisses ne peuvent être constituées que par les « lois de la pensée ». On comprend ainsi que l'arithmétique soit fondée sur les opérations de système et d'application, caractéristiques de l'esprit humain et donc en ce sens non prouvables.

Une preuve effectuée en toute rigueur se doit ainsi de remonter jusqu'aux vérités indémontrables, « aussi longues que puissent être les inférences ». Cette analyse « à rebours » du raisonnement se préserve ainsi de toute intuition, et vient infirmer ou confirmer ce qui a pu être établi. Il apparaît ici ce que l'on pourrait appeler le « **logicisme** » de Dedekind, un engagement de rigueur visant à déterminer ce qui est acceptable ou non dans le raisonnement mathématique.

Un second problème vient maintenant se poser. Dedekind souhaite selon ses mots *définir* les nombres naturels ; pour autant, son écrit débute par son principe qui nous pousse à tout *démontrer* dans un idéal de rigueur ; ainsi, Dedekind prouve-t-il ou définit-il l'arithmétique ? Ces verbes sont-ils pour lui simplement synonymes ? On peut interpréter cet usage comme un « jeu de langage » entre les deux termes. En effet, si l'on réfléchit à ce qu'entend Dedekind par démontrer, on se rend rapidement compte qu'il s'agit au fond de définir : pour prouver l'existence d'un certain objet, on va chercher à en donner une définition *via* des concepts antérieurs déjà rigoureusement fondés. Sans aucune définition viable, il serait impossible d'obtenir des démonstrations sans lacunes ni circularités. Il s'agit finalement d'une quasi-équivalence entre ces deux verbes, ce qui explique la confusion qui en résulte parfois.

Plus encore dans la vision dedekinienne, *définir* ne signifie ni plus ni moins que *créer*. Il convient ici de préciser que le terme *définition* n'est pas à prendre dans les écrits dedekiniens au sens « nominal » mais bien au sens « réel » : le but n'est pas tant de fixer le sens d'un terme, mais bien d'exprimer son essence même et ses propriétés fondamentales, notamment en engendrant ou en créant ce qu'elle définit. C'est en ce sens que la coupure donne une « véritable définition de la continuité », que le nombre s'entend comme une « libre création de l'esprit humain », ou que la définition par induction justifie les opérations arithmétiques en les engendrant de manière itérative. Ce n'est donc pas un hasard si les deux verbes sont souvent employés conjointement dans ses écrits. Le concept vient ainsi « cristalliser » de nouveaux points de vue sur des objets déjà connus des mathématiciens : Dedekind *n'a pas inventé* les nombres réels, qui ont pu être appréhendés intuitivement par le biais de constructions géométriques. Il les a *définis* de manière totalement innovante par rapport à ses prédécesseurs grâce au concept arithmétique de coupure. Cette dernière semble notamment se distinguer de la théorie des grandeurs d'Eudoxe de Cnide (bien que Lipschitz ne soit pas de cet avis). Un lecteur moderne peut bien sûr voir dans la définition eudoxienne de l'égalité de deux rapports de grandeurs homogènes une affinité avec la notion de coupure. En effet, après quelques ajustements, cette définition revient finalement à dire que si A et B sont deux grandeurs

incommensurables, l'ensemble des rationnels du type $\frac{m}{n}$, avec m et n entiers, se divise en deux sous-ensembles disjoints :

- le sous-ensemble U formé des éléments vérifiant $\frac{m}{n} < \frac{A}{B}$;
- le sous-ensemble V formé des éléments vérifiant $\frac{m}{n} > \frac{A}{B}$.

(U, V) définit donc bien une coupure engendrée par un élément non rationnel. Néanmoins, cette similitude n'apparaît que de manière rétrospective, le point de vue ensembliste n'étant pas celui d'Eudoxe. De plus, Eudoxe semble davantage admettre l'existence de rapports irrationnels, et cherche à comprendre comment calculer avec ces êtres : le souci d'une justification, d'une *définition* du nombre réel, sans recours à la notion de grandeur en particulier, n'apparaît pas clairement. Celle-ci demeure l'œuvre originale et intégrale de Dedekind.

De cette façon, si les objets eux-mêmes ne sont pas des découvertes, c'est la manière de les présenter, de les caractériser, donc de les définir, qui constitue réellement quelque chose de créatif.

Le concept émanant ainsi (plus ou moins directement) des lois de la pensée et des définitions qui en découlent, la création y trouve toute son objectivité : nous aurons en effet l'occasion de constater que Dedekind accorde grand crédit à la rationalité de la pensée humaine dans la dernière section.

Créer un concept, c'est donc avant tout chercher à le définir correctement : une fois cela fait, il répondra forcément aux exigences de rigueur, et pourra servir à son tour de base solide pour un développement ultérieur.

Retenons donc ce qui caractérise la rigueur chez Dedekind : il s'agit avant tout de ramener de manière effective toutes les propriétés à des vérités plus simples et indémontrables, de manière à poser des définitions pertinentes et précises. Le développement qui en suivra n'en sera que « plus sûr et plus aisé », puisque chaque étape du raisonnement sera clairement comprise et maîtrisée.

les mathématiques dedekiniennes peuvent donc être représentée de manière imagée – et selon ses propres termes – comme une « compréhension en escalier », qui traduit l'idée d'une démarche très progressive. Elle peut d'ailleurs évoluer dans les deux sens : on gravit un palier lorsqu'on élargit un concept, en posant des définitions nouvelles ou remaniées ; et à l'inverse, il suffit de redescendre de quelques marches pour s'assurer que l'idéal de rigueur est toujours satisfait, et vérifier que les définitions ainsi posées reposent bien sur des prémisses démontrées. Bien entendu, il n'est pas toujours nécessaire de faire « régresser » le raisonnement jusqu'aux vérités indémontrables, ce qui serait une perte de temps considérable : il faut au contraire tirer profit des concepts déjà fixés et préalablement établis par d'autres mathématiciens pour faciliter le travail. Car finalement, le concept est avant tout un outil permettant le développement de nouvelles théories, et non un objet contribuant au **réductionnisme**.

b. Une quête de généralité

Un second aspect que nous allons à présent étudier est celui de la généralité, qui s'affiche comme un véritable but des mathématiques dedekiniennes. On peut en effet résumer les travaux de Dedekind en deux grandes tendances : démontrer des résultats ayant le plus grand degré de généralité possible (cas de la théorie des entiers algébriques), et redéfinir les concepts d'une théorie en toute généralité (cas de l'idéal).

Nous avons déjà longuement détaillé le rôle crucial de l'arithmétique dans ce processus. Contentons-nous simplement de rappeler ici que l'arithmétique acquiert toute sa généralité en s'émancipant des entiers naturels : elle atteint un niveau d'abstraction tel qu'elle peut s'appliquer à toute sorte d'objets mathématiques, ce qui en fait un outil d'une portée considérable pour étendre nos théories, pouvant se « transférer » d'un cadre à un autre. Si l'on remonte aux origines mêmes de l'arithmétique, on retrouve les deux opérations de la pensée « indémontrables », que sont le système et l'application. On constate une nouvelle fois leur parfaite généralité, en tant qu'activités de l'esprit humain, qui non seulement « s'appliquent objectivement à toute pensée », mais qui de plus lui sont essentielles. De telles opérations, universelles et élémentaires, forment nécessairement ce que le mathématicien possède de plus général pour fonder tout raisonnement. L'arithmétique résultant elle-même de tels concepts, il n'est donc pas étonnant qu'elle bénéficie du même degré de généralité.

On entend donc pour l'instant l'idée de généralité comme l'universalité des opérations et des concepts, qui ne dépendent plus des objets manipulés et peuvent s'adapter à toute situation. Mais on note également une autre conception dans la pensée dedekinienne : celle d'uniformité.

On remarque à maintes reprises la volonté de Dedekind de donner une seule et unique définition pour tous les éléments d'une théorie donnée ; par exemple, il souhaite dégager un trait commun à tous les idéaux, permettant de les déterminer d'un seul coup, et non de manière isolée comme l'auraient fait les propriétés A , B , C , etc. de Kummer. Un autre exemple est donné par sa définition la plus générale du nombre entier qui, nous l'avons vu, est un élément α vérifiant une équation de la forme

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0,$$

où les a_i sont des éléments de $\mathbb{Z}$. On constate en effet que tout entier, qu'il soit par exemple naturel, rationnel, ou de Gauss vérifie cette définition, et que Dedekind a par son intermédiaire saisi l'essence même du nombre entier.

Dedekind cherche donc systématiquement à fournir des définitions qui viennent englober d'un seul mouvement tous les objets concernés, sans exception et sans distinction des cas : c'est seulement à ce titre qu'elles pourront être vues comme générales.

Ce souhait d'uniformité nécessite cependant quelques nuances.

- Tout d'abord, il dépend du *contexte* dans lequel on évolue : quand Dedekind parle de « théorie générale des idéaux », il faut ainsi comprendre qu'elle est développée pour tous les corps de nombres, et rien d'autre. Le cadre d'étude est donc clairement fixé au préalable, et vient déterminer le degré de généralité et d'uniformité que l'on cherche à atteindre.
- Enfin, la quête de la généralité doit présenter une utilité, et non devenir systématique : une définition uniforme doit avant tout répondre aux besoins de la théorie, et s'avérer à la fois maniable et féconde. Elle doit également faire preuve d'une rigueur implacable : si une généralisation conduit au moindre doute quant à sa validité, ou présente des difficultés trop importantes, elle ne doit pas être effectuée, et on cherchera une autre définition pour nous amener de manière sûre au résultat.

Citons pour illustrer ce phénomène un passage de l'article « Théorie des fonctions algébriques d'une variable » de Dedekind et Weber, traduit par E. Haffner, qui se veut une tentative de redéfinir en toute rigueur les résultats obtenus par Riemann en 1851.

Bien sûr, tous ces résultats peuvent être obtenus de la théorie de Riemann avec un investissement de moyens bien plus limité et comme cas particuliers d'une présentation générale beaucoup plus étendue ; mais il est alors bien connu que fonder cette théorie sur une base rigoureuse offre encore certaines difficultés, et tant qu'il n'aura pas été possible de surmonter complètement ces difficultés, il se pourrait que l'approche que nous avons adoptée, ou au moins une qui y soit apparentée, soit la seule qui puisse conduire réellement avec une rigueur et une généralité suffisantes à ce but pour la théorie des fonctions algébriques. (« Théorie des fonctions algébriques d'une variable », DEDEKIND et WEBER [1882] [2019](#), p. 74.)

c. Généralité et rigueur, deux principes interdépendants

Il faut encore, après avoir précisé le sens donné par Dedekind aux notions de généralité et de rigueur, caractériser le lien qui les unit. Car il semblerait que la généralité, plus encore qu'épauler la rigueur, en soit une réelle condition. Pourquoi une définition rigoureuse doit-elle impérativement être générale ?

Nous avons dans ce qui précède compris que toutes les théories que développe Dedekind s'appuient sur des fondements qui sont eux-mêmes des plus généraux : système et application pour l'arithmétique, coupure pour les nombres irrationnels, idéal pour les entiers algébriques, etc. Les définitions qui en résulteront posséderont donc la même généralité, et auront plusieurs avantages : elles viendront saisir l'intégralité d'une théorie d'un seul trait, elles ne souffriront d'aucune circularité

ni lacune, et ne feront intervenir « aucun élément étranger » dans le raisonnement. Une définition générale d'un concept soigneusement sélectionné est donc la clé de la rigueur dedekinienne : non seulement elle sera sûre et viable, mais toutes les démonstrations qui suivront le seront également.

En effet, effectuer le « bon choix de concept », au sens du plus judicieux et efficace, permet d'obtenir des démonstrations qui vont directement découler des définitions, de manière certaine et naturelle : comme l'a écrit Dedekind lui-même, les lois se trouvent « dérivées des seules conditions » de la définition. De ce fait, la création du concept n'est pas uniquement un moyen d'asseoir les mathématiques sur des bases solides : elle autorise le développement rigoureux des différentes théories, en fournissant des démonstrations complètes et valides. Tout dépendra donc du soin que l'on portera à la sélection d'un concept, ainsi qu'à l'établissement des définitions, en gardant à l'esprit un souci de simplicité, de généralité et de fécondité. Les mathématiques s'en trouveront ainsi facilitées, stimulées, et atteindront un véritable idéal de rigueur, conforme à ce que souhaite Dedekind.

Finalement, rigueur et généralité peuvent être décrites de manière distincte : mais c'est ensemble qu'elles unissent leur force pour construire de manière sûre l'ensemble des mathématiques. Elles viennent guider la création de concepts, ainsi que les définitions qui en dépendent, en assurant leur universalité, leur uniformité, et surtout leur pertinence et leur validité. Elles se posent ainsi un double objectif : à la fois une recherche des fondements, visant à prouver toutes les étapes intermédiaires du raisonnement jusqu'à atteindre les vérités indémontrables, et un souci du développement futur des théories, en opérant les bons choix stratégiques pour qu'il puisse s'effectuer le plus logiquement et sûrement possible.

3.3 La position novatrice de Dedekind

Pour achever cette étude, nous nous proposons d'essayer de définir la place qu'occupe Dedekind au sein de sa discipline, et de confronter sa vision des mathématiques à celle de ses contemporains.

Les questions soulevées dans cette partie relèvent parfois plus de la philosophie ou de la psychologie que des seules mathématiques, et de ce fait présentent une réelle complexité. Néanmoins, nous verrons qu'une telle analyse permet de saisir nombre de subtilités propres à la création dedekinienne qui, loin de se borner à définir de nouveaux concepts, inscrit sa science dans toute une dimension psychologique, où la compréhension des mécanismes de la pensée joue un rôle primordial.

a. Dedekind : un constructiviste caché ?

Laissons à présent la parole à Dedekind, qui aborde brièvement le sens qu'il donne à sa « création ».

[...] je crois qu'une analyse rigoureuse de la force créatrice sur laquelle l'esprit crée à partir d'éléments déterminés un nouvel élément déterminé [...] conduira certainement à donner une forme irréprochable aux fondements de mon écrit. (*Que sont et à quoi servent les nombres ?*, DEDEKIND [1888] 2008b, préface de la 3^e édition (1911).)

Un tel discours fait étrangement penser à celui que tient l'initiateur du courant intuitionniste L. E. J. Brouwer (1881-1966), qui voit lui aussi les mathématiques comme une « libre création de l'esprit », faisant intervenir une intuition se rapprochant d'une « permanence dans le changement » ou du « discret dans le continu ». Une telle conception est en particulier rattachée à une certaine forme de **constructivisme** : on doit être capable de déterminer une suite d'opérations mentales qui rend évidente l'existence des objets, ou autrement dit, ce qui est démontré doit l'être *effectivement*. Dedekind, qui est né cinquante ans avant Brouwer, serait-il alors un précurseur de ces mathématiques dites « constructives » ?

Effectivement, dans *Continuité et nombres irrationnels*, Dedekind insiste sur le fait que l'esprit humain « crée » les nombres réels. L'idée n'est pas de décrire des entités préexistantes, tels des domaines d'objets abstraits, parmi lesquels se trouvent les réels, mais bien de voir ces nombres comme des « produits d'actes constructifs ». Plus précisément, ce sont les mécanismes de cette construction qui intéressent Dedekind, puisqu'il veut dégager les processus arithmétiques qui y sont à l'œuvre, et non se contenter des termes purement géométriques de ses prédécesseurs.

Si la tentation est donc grande de répondre par l'affirmative à notre question initiale, et de voir dans la démarche dedekinienne quelques traits constructivistes, le problème est en réalité bien plus complexe à cerner. Une étude approfondie conduit en fait à un certain nombre de divergences entre Dedekind et les représentants du constructivisme.

Un premier exemple immédiat de cette rupture est celui de la place accordée à l'intuition. En effet, pour Brouwer, toute construction arithmétique ou géométrique est entièrement dépendante du temps. Or une telle conception ne répond pas aux exigences de Dedekind : faire intervenir l'intuition au centre des preuves et des constructions représente un réel danger pour le raisonnement, qui peut d'un instant à l'autre perdre toute sa rigueur. C'est selon l'expression de D. C. McCarty l'incarnation d'un « démon cartésien pour les mathématiques ». Précisons cependant qu'elle ne doit pas pour autant se trouver totalement exclue de la science mathématique : elle joue en effet un rôle capital en *suggérant* la création et l'élaboration de nouveaux concepts, seulement elle ne suffit pas à en assurer la viabilité. Le nombre dans sa

définition finale se voit ainsi exempt de tout recours à l'espace et au temps, autant dans sa construction que dans sa conception.

Mais c'est peut-être en analysant les rapports de Dedekind avec l'un de ses contemporains, et aujourd'hui considéré comme un constructiviste avant l'heure, Leopold Kronecker (1823-1891), que la thèse de mathématiques dedekiniennes constructives semble davantage s'effondrer. La première chose qu'il convient de préciser est que ces deux mathématiciens partagent les mêmes centres d'intérêt. En effet, ils puisent non seulement leur inspiration chez les mêmes auteurs (Gauss, Dirichlet, Galois, Abel, Kummer), mais travaillent également sur les mêmes sujets : la généralisation des résultats de Kummer aux corps de nombres bien sûr mais aussi aux corps de fonctions, la clarification des fondements de l'analyse, et l'unification de la théorie de Galois et de la théorie des nombres. Pour autant, il semblerait qu'ils ne se soient rencontrés qu'une seule fois, et que même leur correspondance ait été très réduite. On peut donc s'étonner qu'ils n'aient pas cherché à échanger davantage, compte tenu de leurs objectifs communs. En réalité, si leurs influences sont semblables, il n'en va pas de même de leur personnalité ou de leur vision des mathématiques.

Alors que Kronecker est issu d'un milieu aisé, et rattaché aux individus les plus éclairés et les plus influents de Berlin, lui permettant de graver rapidement les échelons, Dedekind passe le plus clair de sa vie dans sa ville natale de Brunswick, et refuse nombre de nominations qui l'obligeraient à s'en éloigner. Le premier d'entre eux est doté d'un caractère bien trempé et de convictions fortes qui lui valent de nombreuses querelles avec ses contemporains, tandis que le second est d'un naturel plutôt réservé et ne manque jamais de saluer le talent des autres mathématiciens.

Mais plus encore que leurs tempéraments, c'est leur approche des mathématiques qui les oppose fondamentalement. À vrai dire, elles sont si différentes qu'ils ne voient pas eux-mêmes l'intérêt d'une quelconque collaboration. En ce qui concerne la théorie des nombres en particulier, Kronecker trouve que la terminologie et les méthodes de Dedekind rendent son travail difficile à suivre. Inversement, Dedekind affirme qu'il « ne se liera jamais d'amitié » avec la méthode qu'emploie Kronecker, dite des coefficients indéterminés, qui viendrait selon lui « troubler la pureté » de sa théorie des idéaux.

C'est donc séparément et indépendamment l'un de l'autre qu'ils élaborent leurs propres théories, en s'évitant soigneusement pour ne pas alimenter des rumeurs de plagiat.

L'un des principaux points de discorde entre Dedekind et Kronecker – si ce n'est le plus important – est la possibilité ou non de construire des « systèmes infinis », des collections rassemblant une infinité d'objets. Notons que ce problème se présente dans nombre de travaux dedekiniens, que ce soit pour l'idéal ou pour la coupure. Pour Kronecker, de telles totalités se placent « au-delà des pouvoirs constructifs des êtres finis » que nous sommes. On se souvient qu'il vise quant à lui, pour la théorie des nombres idéaux, la construction concrète d'un anneau plus large,

contenant de manière effective tous ces nombres inexistants. Ce besoin de calculer pratiquement ces nombres est profondément lié à la pensée constructiviste : dans ce cadre, il est donc entre autres hors de question de considérer, encore moins de manipuler, des collections infinies d'éléments que l'on ne peut obtenir de manière actuelle. Comment être certain que leur existence est légitime, puisqu'on ne peut les construire effectivement ? C'est peut-être en partie pour répondre à ces arguments que Dedekind a proposé une construction des nombres naturels qui présuppose celle des ensembles infinis dans *Que sont et à quoi servent les nombres ?*. Certes, il n'est pas nécessaire pour comprendre ce qu'est un nombre naturel de se baser sur des notions ensemblistes. Néanmoins, pour saisir ces entités dans une certaine uniformité et non plus comme objets particuliers et isolés, Dedekind favorise cette définition plus conceptuelle, qui rattache implicitement l'idée de nombre naturel à celle de système infini. Dans une telle vision, on ne peut ainsi accepter de considérer des nombres naturels ou rationnels, et refuser dans le même temps d'en former des systèmes infinis, puisque ce sont eux qui en conditionnent l'existence ; cela légitime par exemple le concept de coupure.

Par ailleurs, Dedekind accorde une vraie place aux opérations de la pensée, non par les objets qu'elles permettent d'obtenir, mais par leur propre statut d'activités humaines : elles garantissent selon lui l'objectivité des concepts, leur réalité propre. Non seulement le système infini est selon lui préalable à la construction des nombres naturels, donc indispensable à toute forme d'arithmétique, mais son caractère effectif ne lui importe nullement : ce qui compte est qu'il soit correctement défini. L'intérêt est avant tout d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes qui permettront de désigner les éléments simultanément, et non un par un. On retrouve ici l'idée qu'une « bonne » définition, judicieusement choisie, autorise un développement sûr et fructueux du raisonnement. En fait, Dedekind reproche essentiellement à Kronecker sa restriction finitiste, en voulant à tout prix « imposer à la libre construction de concepts mathématiques certaines limitations qui [lui] paraissent injustifiées ».

Se pose également la question des limites de la construction, et la place du mathématicien dans ce processus. Selon Kronecker, il nous est parfaitement possible de découvrir ces limites *a priori*, puisque cette construction est fondamentalement nôtre : le fait qu'elle soit le fruit de notre esprit nous permettrait ainsi d'en saisir la teneur et les bornes, simplement en s'y engageant. Pour Dedekind, c'est en portant une réflexion sur les mathématiques déjà développées, et en les systématisant, que l'on définit les capacités de la construction mentale. Celle-ci ne nous est pas transparente et immédiate, mais résulte d'un examen soigneux des mathématiques que nous connaissons. Exercer cette science ne suffit pas à en comprendre le processus de construction, il faut aussi porter un regard sur ce qui a déjà été établi.

De nombreuses anecdotes montrent ainsi que les tensions entre les deux hommes ont été palpables, et que Kronecker a parfois tenté de freiner son rival ou a dénié sa priorité dans des résultats de théorie des nombres. Entre autres, Kronecker – surnommé sarcastiquement par Cantor « le petit despote » – aurait volontairement retardé la

publication de l'article de Dedekind et Weber dans le Journal de Crelle, dont il est l'éditeur, le temps que son propre ouvrage de théorie des nombres *Grundzüge* voie le jour. Il aurait également accusé Dedekind d'être en possession de ses résultats sur les entiers algébriques depuis des années, ce que ce dernier réfute : tout au plus a-t-il connaissance de la voie choisie par Kronecker, ce à quoi il fait allusion dans « Sur la théorie des nombres entiers algébriques », mais en aucun cas cela n'influence sa propre approche. Enfin, il semblerait que certains propos de Kronecker dans une lettre de 1880 aient profondément bouleversé Dedekind, au point d'avoir une « franche discussion » avec lui cette même année. Néanmoins, il n'en reste pas moins que les deux hommes ont globalement évolué dans des rapports très cordiaux, et ont conservé une vraie estime l'un pour l'autre, en revendiquant le caractère indépendant de leurs travaux. Plus encore, Dedekind n'a pas tenu rigueur à Kronecker de ses quelques « débordements », et n'a jamais fait montre d'animosité à son égard – au grand dam de Cantor et Frobenius, qui ont tenté en vain de le convaincre de la déloyauté de son rival. Il affirme ainsi, quelques années après la mort de Kronecker, conserver de lui « un souvenir chaleureux et plein de reconnaissance ». Un bel exemple de respect malgré la différence.

Que conclure de toutes ces remarques ? La création dedekinienne ne semble pas coïncider avec un procédé constructiviste au sens strict du terme : si Dedekind parle d'une « construction » des réels, il ne s'agit pas pour autant de les obtenir de manière effective, mais de poser des définitions correctes et rigoureuses permettant de développer sa théorie. Insistons donc une nouvelle fois sur le fait que « créer » n'équivaut ni plus ni moins qu'à « définir ». La création revêt ainsi un caractère beaucoup plus libre chez Dedekind, qui autorise entre autres l'emploi de systèmes infinis, pourvu qu'ils répondent de manière légitime et rigoureuse aux problèmes posés. Plus que la nature même des objets créés, c'est celle des opérations permettant de les obtenir qui sont au cœur de la conception dedekinienne. Le caractère infini des systèmes lui importe peu, au sens où il résulte d'une application des lois de la pensée, lois qui lui sont fondamentales : dénier les ensembles infinis, c'est quelque part dénier une partie des capacités de l'activité humaine. La rigueur ne correspond plus à tout construire, à tout calculer systématiquement, mais plutôt à identifier la nécessité d'un concept et à s'assurer que les définitions qui en résultent seront cohérentes. On s'éloigne ainsi complètement de l'intuitionnisme brouwerien, qui se borne aux lois régissant l'expérience possible. La libre création dedekinienne transcende les limites constructivistes, et plus généralement se détache de toutes les contraintes propres aux activités humaines (construire, prouver, affirmer), indissociables du temps et de l'espace.

b. Dedekind : **kantisme** ou **logicisme** ?

S'il n'est donc pas pertinent d'associer Dedekind au courant constructiviste, peut-être pourrions-nous trouver un autre modèle qui lui corresponde davantage. Dans

cette tentative, plusieurs pistes auraient certainement mérité d'être explorées, mais nous avons fait le choix « stratégique » de nous concentrer sur deux approches, très intimement liées, qui semblent réunir plusieurs critères chers à Dedekind : la théorie kantienne de la connaissance, et le **logicisme** de Gottlob Frege (1848-1925).

Si nous souhaitons les présenter dans un même élan, c'est avant tout dans un souci de cohérence : nous pourrions constater que les conceptions frégréenne et dedekinienne des mathématiques se sont construites en réaction à certains principes kantien, tout en demeurant finalement distinctes. C'est donc de la comparaison simultanée de Dedekind avec Kant et Frege, en effectuant des allers et retours entre leurs différents points de vue, que l'on peut espérer tirer les conclusions les plus précises sur le sens de la « création ».

Nous devons donc commencer par expliciter quelque peu la philosophie de Kant, en particulier ce qu'il expose dans sa *Critique de la raison pure* (1781). Initialement, cette œuvre se voulait une refondation de la métaphysique sur des bases solides, pour en faire une science rigoureuse.

L'un des piliers de sa théorie est la position du sujet pensant comme « centre » de la connaissance, qui ne se conforme pas à l'objet qui lui est présenté, mais qui au contraire vient lui imposer ses règles. Placer ainsi l'homme comme acteur de sa connaissance n'est pas sans rejoindre le processus de la création dedekinienne, où le mathématicien vient poser ses propres définitions pour saisir l'essence d'un objet.

En ce qui concerne à présent les mathématiques, Kant les inscrit dans le champ des « jugements synthétiques *a priori* » : non seulement elles apportent une connaissance nouvelle de l'objet en question, mais elles ne font de plus jamais appel à l'expérience, de par leur caractère nécessaire et universel.

On agit donc dans le cadre du « transcendantal », dans ce qu'il est possible de connaître sans recourir à l'expérience. Car si « *d'un point de vue chronologique*, nulle connaissance ne précède en nous l'expérience, et [que] c'est avec celle-ci que tout commence [...], il n'en résulte pas pour autant qu'elle dérive dans sa totalité *de* l'expérience. » En fait, l'expérience vient amorcer la connaissance : les sens nous permettent d'appréhender le monde, d'en acquérir certaines représentations, qui nous encourageront à mieux le connaître. Pour autant, nous pouvons parfaitement être dotés d'une capacité à connaître qui nous est propre, ne dépendant aucunement de l'expérience, mais qui se trouve simplement mise en éveil par cette dernière. C'est ainsi que Kant souhaite séparer notre propre contribution à la connaissance des impressions sensibles qui nous sont suggérées par l'expérience. Notons que cette opération est loin d'être une évidence : cela nécessite qu'un « long exercice nous y ait rendus attentifs et ait donné la capacité de l'isoler ».

Remarquons d'ailleurs que chez Kant, comme chez Dedekind, la logique correspond « aux lois pures de la pensée », et les nombres demeurent des « libres créations de l'esprit humain ».

Si pour le moment les deux hommes semblent partager la même conception des mathématiques, la suite de l'analyse va montrer une nette différence de point de vue. Kant développe ensuite son « esthétique transcendantale », où il établit que toute connaissance requiert deux principes : l'intuition et la raison. En effet, il nous faut à la fois pouvoir recevoir des représentations du monde extérieur, et y appliquer des « concepts purs » issus de l'esprit seul. Or ce qui intéresse ici Kant plus particulièrement, ce ne sont pas les formes d'intuition dites empiriques (qui relèvent des sens) mais celles qui rendent possible l'expérience elle-même, qui la précèdent, autrement dit celles qui sont *a priori*. Selon lui, elles tiennent en deux notions : l'espace et le temps.

Ainsi la science mathématique fait agir ses concepts issus de la raison sur une intuition, mais qui n'est en rien relative aux sens, donc qui est *a priori* ; elle évolue donc nécessairement chez Kant avec l'idée du temps et de l'espace. Pour ce qui est par exemple du nombre, même s'il l'identifie comme « schème de la grandeur » et qu'il voit sa science comme « pure synthèse intellectuelle que nous nous représentons dans la pensée », il n'en demeure pas moins que le temps et l'espace sont nécessaires à son appréhension ; on se représente ainsi les nombres au moyen d'un dénombrement successif, fondé sur l'intuition du temps qui s'écoule.

Dedekind n'entend pas tout à fait les choses de cette oreille, ne serait-ce que dans sa vision du nombre, qui devient un objet purement conceptuel, se détachant de toute notion temporelle ou spatiale ; en fait, la création chez Dedekind doit s'opérer dans le domaine de la raison, et non dans celui de l'intuition.

Apportons tout de même quelques nuances à ce propos ; comme nous l'avons dit précédemment, l'intuition – ou tout au moins celle qui est dite *a priori* – n'est pas rejetée en tant que telle dans la création mathématique. Par quels moyens pourrait-on alors identifier les vérités indémontrables, ou même les fameuses lois de la pensée, si l'on refuse que l'esprit « intuite » et se base sur sa propre faculté de connaître ? Comment pourrait-on même avoir l'idée d'élaborer un nouveau concept, sans aucune forme d'intuition pour nous le suggérer ? Il n'en reste pas moins que les concepts mathématiques doivent trouver une réelle consistance, et répondre à des critères de rigueur. Or dans les mathématiques dedekiniennes, l'intuition n'assure pas systématiquement la validité du raisonnement, car elle est potentiellement source d'erreurs et de conclusions précipitées : si elle amorce la création, elle ne doit pas pour autant laisser des traces dans la construction ou la définition des concepts. Dedekind doit donc réarranger les principes kantien, dont l'organisation est encore trop proche du **constructivisme**, en transférant les mathématiques de l'intuition à la raison. Pour faire court, si Dedekind s'accorde avec Kant sur la « liste » des opérations mentales dont nous disposons, il ne croit pas en cette « répartition des tâches ».

C'est ce « transfert » de l'intuition à la raison qui nous pousse à présent à évoquer Frege, qui trouve lui aussi les fondements de son entreprise dans l'épistémologie kantienne. S'il s'accorde avec Kant sur le caractère *a priori* des mathématiques, il

rompt avec ce dernier lorsqu'il s'agit de définir le statut de l'arithmétique. En effet, comme pour Dedekind, elle ne peut reposer sur l'intuition. Plus précisément, il soutient que sa connaissance se fonde en fait sur une connaissance des vérités logiques. Le programme de Frege est donc de construire l'arithmétique en la faisant dériver des seules lois logiques, en restant dans le domaine de l'*a priori*, c'est-à-dire sans recourir à l'expérience : cela requiert d'identifier les lois logiques premières, de spécifier les règles d'inférence qui assureront que de ces lois découlera toujours une connaissance *a priori*, et de montrer que cela suffit à déterminer pleinement l'arithmétique. Frege s'inscrit donc dans un projet « *aprioriste* » dans la veine de Kant, mais qui demande de corriger la source de l'arithmétique, et donc quelque part de réformer les mathématiques si l'on souhaite à terme les présenter comme science *a priori*.

Ainsi, Dedekind et Frege semblent tous deux s'accorder sur la nécessité de réorganiser la vision kantienne des mathématiques, sans pour autant toucher à ses fondements. Par ailleurs, on peut s'empresse de remarquer la référence constante à la logique dans les écrits de Dedekind : il recommande très souvent de « ne pas renoncer à la logique », dénonce le manque notable de logique dans les manuels et chez ses contemporains dans ses lettres à Lipschitz, et va même jusqu'à opposer logique et intuition dans la définition des entiers naturels. Il affirme également, comme nous l'avons déjà souligné, que l'arithmétique est une partie de la logique. Aurions-nous donc enfin trouvé, dans le **logicisme** de Frege, le cœur de la vision dedekinienne ?

Malheureusement, il y a de grandes chances que cette conclusion ne soit qu'un leurre. Si l'on cherche à éclaircir le sens des termes « *a priori* » et « logique » tels qu'ils sont employés par Dedekind, on pourra en effet avoir la (mauvaise) surprise de constater qu'il diffère sensiblement de celui de Frege.

Tout d'abord, Dedekind répond-il vraiment à un engagement « d'*apriorisme* » comparable à celui de Frege ? On peut se permettre d'en douter, notamment après l'examen de ses travaux sur la continuité des réels. En effet, s'il expose une caractérisation arithmétique de cette continuité et non plus géométrique, ce n'est pas tant pour la placer comme une connaissance *a priori* que pour faire progresser notre compréhension des problèmes de limites et répondre à nos besoins. Dedekind s'inscrit ainsi dans un souci de faire évoluer sa science, tandis que Frege s'attache à la faire découler de la logique. On obtient déjà une première idée selon laquelle la logique est pour Dedekind plus un moyen qu'une fin en soi.

En quoi l'arithmétique est-elle alors pour Dedekind une science *a priori* ? En réalité, le terme « *a priori* » peut revêtir plusieurs significations distinctes.

1. Un premier sens, probablement le plus connu, est celui qu'utilise Frege : une connaissance *a priori* est vue comme une connaissance obtenue sans aucune référence à l'expérience, au monde sensible.
2. Un second sens répond à l'idée de ce qui est préalable à la pensée : une proposition *a priori* est alors ici une proposition sans laquelle on ne peut penser, sans laquelle toute connaissance est impossible.

3. Un troisième sens est cette fois relié à l'idée de nécessité : le sujet impose ses conceptions, son mode de pensée sur les données de l'expérience, donc toute forme d'expérience *doit* porter en elle ces modèles. Dans cette voie, une proposition *a priori* est une proposition vraie dans tous les mondes où l'expérience est possible, le caractère vrai n'étant que le résultat de l'esprit qui « inflige » ses vues à l'expérience.

Si l'on combine ces deux ultimes définitions de l'*a priori*, il s'avère que nous obtenons en substance celle de Dedekind. Elle traduit d'ailleurs de manière étonnante le fonctionnement de la pensée et son rapport au sensible. En effet, Dedekind conçoit l'idée de prérequis à la pensée, c'est-à-dire de concepts ou de propositions sans lesquels toute pensée est impossible : tout sujet pensant a en lui certaines vérités mathématiques, certaines opérations, qui sont fondamentales à sa pensée et auxquelles il se doit de croire, même s'il ne les possède pas explicitement dans sa conscience. Ainsi, nous ne naissons pas avec une connaissance actuelle des mathématiques, mais avec des « croyances tacites » qui vont nous guider dans notre représentation du monde. Il est donc important de remarquer une nouvelle fois que Dedekind ne rejette pas totalement l'intuition : elle est nécessaire pour posséder les mathématiques de manière explicite, et permet principalement d'en amorcer la connaissance en acte, sans pour autant altérer la nature des objets ou le contenu des résultats obtenus. Ceci constitue une nette différence avec Frege, qui stipule que l'empirisme ne permet pas d'accéder à la science mathématique de par le rôle trop important qu'y joue selon lui la perception. On peut noter, comme le fait P. KITCHER (1986), que le phénomène évoqué par Dedekind s'apparente quelque peu à l'apprentissage des langues. Nous possédons en nous des principes innés gouvernant une grammaire universelle, valable pour toutes les langues, dont nous n'avons qu'une connaissance tacite. Or il est évident que nous ne sommes pas capables de parler immédiatement n'importe quelle langue. Ceci demande, pour les maîtriser en acte, d'exercer ces principes *via* une pratique concrète, ici par la communication avec autrui. Dans cette analogie, les deux opérations fondamentales de la pensée de Dedekind et plus généralement l'arithmétique jouent finalement le rôle de la grammaire universelle, et les mathématiques celui du langage. Le nombre est alors une libre création de l'esprit, dérivant du système et de l'application, et calculer correspond à un véritable prototype de la pensée ; ceci pourrait ainsi se résumer par « déduire, c'est calculer ». Chez Frege, au contraire, « calculer, c'est déduire » : selon ses termes, « chaque proposition arithmétique est une loi logique », l'arithmétique n'étant finalement qu'une forme de logique sophistiquée.

Par ailleurs, si l'arithmétique est vue comme une science *a priori*, c'est aussi parce que ses lois doivent être vraies dans n'importe quel monde où l'on peut penser : c'est en pensant que l'on effectue les opérations mentales qui confèrent véracité à l'arithmétique. En ce sens, l'arithmétique décrit une structure formelle que l'on impose à l'expérience, et qui ne dépend pas de la nature des objets du monde sensible : sa véracité ne sera en rien modifiée dans un autre monde, puisqu'elle est conditionnée

par l'esprit même. Les opérations associées au système et à l'application sont ainsi si fondamentales qu'elles interviennent dans tous les aspects de toutes les expériences que l'on peut concevoir.

Notons enfin que pour Frege, il existe des objets logiques indépendants de la pensée que l'on en a, ou de la formulation que l'on en donne : le nombre en fait d'ailleurs selon lui partie. Ceci est contraire à la vision de Dedekind, pour lequel l'objectivité des concepts, leur réalité profonde, ne doit en aucun cas se justifier par une existence d'objets mathématiques ou logiques *a priori*, en dehors de la pensée. L'objectivité provient uniquement de la rationalité de la pensée humaine, des « nécessités » qu'il juge internes aux mathématiques, de la généralisation des concepts et des acquis de l'histoire. Le concept de nombre n'est pas extérieur à nous, puisqu'il est directement le fruit de notre entendement.

Que représente donc la logique pour Dedekind ? Ce n'est en fait ni plus ni moins que la science qui étudie les opérations de l'esprit, celles qui rendent toute pensée possible. De cette façon, si l'on souhaite parler du « **logicisme** de Dedekind », il ne faut en aucun cas faire un amalgame avec celui de Frege, qui revêt un caractère beaucoup plus strict et plus technique : selon lui, la logique est une discipline normative, qui nous indique la manière dont on se doit de penser si l'on veut atteindre la vérité – ou plus généralement si l'on veut penser tout court. Selon les termes de H. Benis Sinaceur, il vaudrait mieux parler pour Dedekind « d'arithmétisme ensembliste ». On comprend ainsi les critiques de Frege à l'encontre des notions fondationnelles de Dedekind de système et d'application, qui n'ont pour lui rien de logique ou d'*a priori*, et ne peuvent donc revendiquer d'asseoir l'arithmétique sur des bases rigoureuses : il n'accorde tout simplement pas la même signification à chacun de ces deux termes. Dans la même idée, Dedekind et Frege se distinguent dans leur usage du terme « concept » : si chez le premier, il s'agit d'une opération ou entité mentale, il revêt un sens beaucoup plus restreint chez le second, qui y voit « une fonction dont la valeur est toujours une valeur de vérité ». On reste donc chez Frege dans un cadre logiciste pour le moins rigide, qui ne semble pas s'adapter à la « libre création » dedekinienne.

Par ailleurs, s'ils s'accordent tous deux sur le fait qu'un monde sans arithmétique est « impensable », puisque tout objet de la pensée peut être collecté et compté, ils n'en tirent pas les mêmes conséquences. Frege y voit d'office le caractère *a priori* de l'arithmétique, au sens premier du terme. Pour Dedekind, il faut au contraire réfléchir à cette impossibilité et chercher à la comprendre, afin de déterminer ce qui dans notre pensée la conditionne, et pourquoi un tel monde est à ce point unimaginable.

On discerne à présent ce qui distingue Dedekind de Frege. Chez Dedekind, il s'agit presque d'une analyse psychologique : la création n'est pas tant une affaire de quête de fondements ou de réductions à des principes de base, qu'une volonté d'expliquer et de traduire les mécanismes de la raison en jeu dans la pensée mathématique. De cette manière, les termes ultimes du raisonnement dedekinien ne s'incarnent pas dans des

axiomes ou des règles, mais vont bien au-delà en cernant quels procédés mentaux se cachent derrière ces formes. Finalement, l'analyse de Dedekind va au-delà de celles de Kant ou de Frege dans la mesure où elle dégage les principes sous-tendant l'expérience ou l'intuition ; les deux penseurs les ont considérés comme allant de soi, et aucun des deux n'a donc pu dévoiler « la partie immergée de l'iceberg ». Dedekind montre par exemple que le simple fait de compter ne se réduit pas à une évidence, mais relève de processus mentaux très complexes qu'il faut mettre à jour. On sort ainsi de mathématiques de l'exposition et de la présentation (donc basées sur l'intuition), pour en obtenir une nouvelle forme, fondée cette fois sur la représentation et l'organisation (ne dépendant que de la raison).

Dans cette vision, les deux opérations de système et d'application sont une mathématisation des lois fondamentales de l'entendement. Si ces dernières sont certainement identifiées par une forme d'intuition pure, la formulation ensembliste dans laquelle elles s'incarnent en font les créations premières de la raison humaine. Le reste du développement mathématique demeure ainsi immanent à la raison : elle seule doit être employée au cœur des preuves et des constructions, s'imposant comme garante de la rigueur, l'intuition étant réduite au statut de guide de la création. Soulignons d'ailleurs que ces deux opérations mentales dépassent très largement le cadre des mathématiques, et sont simplement des associations d'idées, des représentations très générales applicables à n'importe quelles entités : cela les place donc bien en amont de tout développement mathématique, ce qui légitime pleinement le choix de Dedekind.

On peut enfin clore cette analyse de la création en se posant une dernière question : de quelle nature sont les objets mathématiques créés, s'ils sont dans leur construction finale dénués de toute intuition ? Un élément de réponse peut être découvert en revenant aux écrits de Kant, en particulier à un autre pan de sa *Critique* : la « dialectique transcendantale ». En effet, Kant explique ici qu'il est dans la nature de la raison de chercher à connaître des objets placés en dehors de l'expérience (sensible ou intelligible), c'est-à-dire des entités suprasensibles ne correspondant à aucune intuition. Ces objets sont appelés « Idées transcendantales », et se résument à trois grands principes : Dieu, la liberté, et l'âme. Cependant, elles ne peuvent être soumises pour Kant à une véritable connaissance, car elles conduisent à des problèmes insolubles.

Pourtant, c'est bien dans le monde kantien des Idées que Dedekind vient ranger ses objets mathématiques, puisqu'ils sont vus comme le fruit de la raison même, où l'intuition ne peut pas intervenir en tant que telle. En résumé, comme l'explique D. C. McCarty, Dedekind prône des mathématiques antikantiennes, fondées sur une raison « pure » qui, elle, est essentiellement kantienne.

Les objets mathématiques sont ainsi des éléments avec un statut spécial et particulier, directement produits par la raison et détachés du monde réel et sensible. Ceci peut nous donner la clé de la « libre création » : il s'agit avant tout d'un acte qui demeure

« transcendantal » dans son procédé, et où les seules définitions donnent naissance aux éléments mathématiques. Si l'intuition permet souvent d'initier cette création, les concepts finalement obtenus n'en dépendent aucunement. Création, au sens où la raison seule les fait émerger ; libre, car séparée de toute référence au monde naturel et aux nécessités causales qui le régissent.

Que retirer de ce long examen ? Essentiellement une leçon : en essayant de ranger Dedekind dans un certain courant mathématique, nous allons tout droit à l'échec. La vision dedekinienne, si elle s'alimente de principes kantien, si elle reprend certaines caractéristiques des logicistes et des constructivistes, n'en reste pas moins unique. Elle se trouve au carrefour de toutes ces tendances, sans jamais s'y réduire. Elle doit notamment son originalité à sa dimension psychologique : comprendre les mécanismes de la pensée est un préalable indispensable pour faire des mathématiques à la fois de manière rigoureuse et efficace. En ce sens, la création chez Dedekind prend un caractère profondément humain, et accorde une grande confiance en les capacités de la raison, dont l'arithmétique forme un prototype.

C'est donc ce juste équilibre entre libre création et nécessité, entre rigueur et généralité, entre mathématiques et psychologie qui fait de Dedekind un mathématicien innovant, parfois incompris, comme le montrent ses échanges avec Lipschitz et la critique de Kronecker, mais profondément conscient des enjeux de sa science, et soucieux d'en cerner tous les rouages.

Conclusion

L'étude de l'émergence de l'idéal, qui peut apparaître simple au premier abord, se révèle en réalité truffée de subtilités. Ceci provient en particulier du fait que, pour pouvoir saisir ce concept dans toute sa puissance, il est nécessaire de le replacer dans la vision mathématique de son auteur.

Il nous faut tout d'abord comprendre que pour Dedekind, la genèse de l'idéal ne correspond en rien à un phénomène aléatoire, soumis au hasard. Bien au contraire, ce concept s'inscrit dans un souhait d'établir à la fois des fondements rigoureux et généraux, tout en ayant un regard porté vers le développement ultérieur du raisonnement. Il doit avant tout unifier et uniformiser la notion de divisibilité pour toutes les catégories d'entiers algébriques, et permettre des démonstrations plus sûres et plus aisées, qui se préserveront d'éléments étrangers à la théorie, ou d'entités inexistantes telles que les nombres idéaux.

Le rôle de l'arithmétique dans cette entreprise est bien évidemment prépondérant : il ne se trouve pas meilleure base pour édifier la science mathématique, puisqu'elle repose sur deux opérations de la pensée, le système et l'application, qui lui confèrent un caractère modulable et universel. Elle s'adapte ainsi parfaitement à des objets tels que les idéaux, et autorise pour l'essentiel les mêmes lois opératoires que sur les entiers relatifs.

Mais le plus frappant chez Dedekind reste la dimension philosophique et psychologique qui emplit la « libre création » de ses concepts, et plus généralement l'ensemble de ses mathématiques : au carrefour entre **logicisme**, **constructivisme** et **kantisme**, sans jamais pouvoir se revendiquer d'un courant précis, il propose une nouvelle façon d'exercer cette science. L'homme devient pleinement acteur des mathématiques, en faisant usage de sa seule raison pour les développer, afin d'aboutir à une théorie implacable de rigueur. C'est lui qui vient poser les « bonnes » définitions à la source des concepts, en effectuant des choix judicieux, mais qui demeurent guidés par une forme de nécessité contraignante, inhérente à la vérité qui nous est extérieure. Libre ne doit pas ainsi s'entendre comme anarchique ou arbitraire, mais plutôt comme une rupture avec les lois de la nature et ses expériences relevant du possible. C'est donc finalement, plus que les axiomes eux-mêmes, l'analyse des mécanismes de la

pensée qui se place en amont de tout raisonnement mathématique et qui assure un véritable sens à tout concept.

Parfois violemment critiqué, Dedekind n'en reste pas moins un mathématicien très attaché à sa science, qu'il n'a jamais dissociée de son histoire ni de son caractère proprement humain, et dans laquelle il a véritablement laissé son empreinte. De par son originalité épistémologique, Dedekind constitue l'un des fondateurs de l'algèbre moderne – en particulier de la théorie des structures –, insérée dans la théorie des ensembles développée conjointement avec Cantor, et qui sera ensuite développée par David Hilbert (1862-1943) et Emmy Noether (1882-1935), faisant ainsi la célébrité de l'école de Göttingen dans le premier tiers du xx^e siècle.

Annexe

Un parti pris contre l'idéal

Cette étude s'est jusqu'à présent contentée de retracer l'histoire de l'idéal à travers le point de vue de son créateur. En ressort donc une conception de l'idéal comme un outil de développement majeur et incontournable pour la théorie des entiers algébriques, et même plus généralement pour l'algèbre moderne ; le nombre idéal se trouve ainsi relégué au second plan, tout comme la notion de congruence qui ne sert plus que d'outil intermédiaire pour les démonstrations.

Néanmoins, dans cette version des faits, subsistent quelques questions : souvenons-nous que Dedekind, dans sa première version de 1871, a tout d'abord adopté le formalisme de Kummer, et a parfaitement réussi par ce biais à généraliser les résultats de ce dernier aux corps de nombres. Pourquoi alors avoir à tout prix souhaité changer de présentation qui, même si elle n'atteint pas le degré le plus élevé de la rigueur dedekinienne, fonctionne ? Placer l'idéal au centre de sa démarche n'en est-il pas plus vague ou plus complexe ? Sa création était-elle alors vraiment indispensable ? Certains auteurs n'entendent ainsi pas l'idéal comme un outil d'une réelle pertinence, et pensent en ce sens que la vision initiale de Dedekind n'en était que plus satisfaisante. Dans un souci de totale objectivité, et pour ne pas se réduire à un éloge de l'idéal, nous souhaitons ainsi explorer cette vision, qui a des arguments tout aussi valables que ceux de Dedekind, et qui mérite d'être entendue. Nous nous baserons pour cela sur l'article EDWARDS [1980](#), qui prend le contrepied de la théorie des ensembles.

A.1 L'idéal en 1871 : quelques remarques

Dans un souci de saisir toute la problématique de l'idéal et de retracer le cours de son évolution, nous nous pencherons sur la première version de Dedekind, publiée dans le X^e supplément de la *Zahlentheorie* de Dirichlet, pour en dégager les principales caractéristiques et ainsi aborder plus sereinement les critiques d'Edwards.

L'objectif de Dedekind est tout d'abord de transférer l'étude des lois de la divisibilité pour les entiers algébriques à celle des idéaux, en dépassant les difficultés que posent selon lui les nombres idéaux de Kummer. Notons que le concept d'idéal est introduit avant tout ici pour servir la théorie des formes quadratiques binaires ; il est donc davantage considéré comme un outil intermédiaire plutôt que comme un objet propre.

Si effectivement, le concept d'idéal y est défini pour la première fois, reformulant d'une nouvelle manière les résultats de Kummer, Dedekind semble finalement effectuer plus une transformation dans la forme que dans le fond à proprement parler. Nous allons rapidement constater qu'il ne rompt pas réellement avec le formalisme kummerien, quitte à contredire ses propres principes.

Le point le plus frappant dans cette présentation est certainement l'emploi d'une notion « temporaire », celle d'*idéal premier simple*, qui disparaît totalement dans la version de 1876-1877. De quoi s'agit-il ?

Soit O un anneau d'entiers, et soient $\mu, \nu \in O$. Lorsque les solutions $\pi \in O$ de la congruence

$$\nu\pi \equiv 0 \pmod{\mu}$$

forment un idéal premier de O , de tels idéaux $\mathfrak{p}$ sont alors dits simples.

Dedekind définit ensuite une notion similaire pour une puissance de μ et ν : si $r \in \mathbb{N}$, les solutions $\rho \in O$ de la congruence

$$\nu^r \rho \equiv 0 \pmod{\mu^r}$$

forment un idéal appelé puissance r -ième de $\mathfrak{p}$, noté $\mathfrak{p}^r$.

Il s'ensuit alors de ces différentes notions toute une série de théorèmes, semblables à ceux valables pour les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$, dont les preuves n'emploient que la divisibilité et les propriétés des congruences. Cela lui permet finalement d'aboutir au résultat suivant : « tout idéal premier est simple ». En d'autres termes, il y a donc équivalence entre idéal premier et idéal simple.

Pourtant, une fois ce résultat obtenu, la terminologie d'idéal « simple » est complètement abandonnée, au profit de celle d'idéal « premier ». Pourquoi avoir alors fait ce détour ?

En fait, si l'on examine la suite du développement, on constatera que si le terme d'idéal simple est absent, c'est pourtant sa caractérisation qui est utilisée lorsqu'il est question d'idéaux premiers. Dans les preuves de tous les théorèmes – en particulier le théorème de décomposition en idéaux premiers – on retrouve cette représentation très explicite, se rapprochant fortement des tests de divisibilité de Kummer. Où est donc passée la « méthodologie dedekiniennne », qui préconise de ne pas s'attacher aux présentations particulières des objets, mais à leurs propriétés intrinsèques ?

On peut également noter de façon assez surprenante que la preuve du théorème de factorisation en idéaux premiers n'utilise pas la définition du produit de deux idéaux,

qui n'apparaît que bien plus tardivement dans le supplément. Ainsi, l'arithmétique ne semble pas sous-tendre la théorie des idéaux, mais découler au contraire des développements précédents. Ce sont avant tout les notions de congruence et de primalité (plus précisément de puissance d'idéaux premiers) qui occupent une place phare dans l'exposition de 1871.

Cette version, qui est encore loin de répondre à toutes les exigences de Dedekind, n'aurait-elle pas pour autant suffi pour résoudre les problèmes de divisibilité des entiers algébriques ? N'est-elle pas déjà trop avancée pour les besoins de la théorie ? L'idéal présente-t-il même un réel intérêt ?

A.2 L'idéal : un concept indispensable ?

La discussion qui précède nous pousse donc à nous demander si l'idéal apporte foncièrement quelque chose de nouveau à la théorie des entiers algébriques. Nous allons présenter ici quelques objections à son élaboration, en suivant les propos d'EDWARDS (1980).

- Tout d'abord, il semblerait que Dedekind ait été profondément intrigué par l'une des définitions de Kummer, pour le moins obscure : celle de « nombre complexe idéal ». Il s'agirait en fait d'une façon de parler d'un produit fini de facteurs premiers idéaux. Cette notion le pousse ainsi à définir l'idéal comme un ensemble d'éléments divisibles par un nombre complexe idéal donné. Il s'attache ensuite à démontrer ce qu'il considère comme le théorème fondamental de sa théorie, à savoir qu'il existe une bijection entre les nombres complexes idéaux, et les idéaux $\neq \{0\}$; il va lui permettre de fonder sa théorie des idéaux sur les théorèmes relatifs aux facteurs premiers idéaux.

Mais une nouvelle fois, Dedekind utilise pour le prouver la notion d'idéal premier simple. Autrement dit, il utilise les représentations « particulières » qu'il souhaite justement éviter en déterminant un substitut au nombre (complexe) idéal. La notion d'idéal, qui devrait être au contraire centrale dans le théorème et utilisée comme un objet d'une grande généralité, est non seulement soigneusement évitée, mais également en substance aussi explicite que le nombre idéal. On voit donc mal en quoi il fournit un éclairage nouveau à la théorie, sachant que l'on retrouve les mêmes problématiques propres au nombre idéal.

- On peut bien sûr parler également du concept très controversé de « système infini ». Fonder une théorie sur une telle notion ne manque pas d'audace et demeure déroutant pour les lecteurs de Dedekind. Rappelons qu'à ce moment de l'histoire, la théorie des ensembles de Cantor n'a pas encore vu le jour ; si bien que ce serait dans ces travaux sur l'idéal que la vision ensembliste aurait connu sa première occurrence. On peut se demander ainsi pourquoi Dedekind n'a pas plutôt considéré, à l'instar de Gauss dans ses « congruences », des représentants des classes qui auraient évité le recours à des totalités infinies. De

plus, il définit initialement l'idéal simplement comme un « ensemble infini », sans aucune autre indication sur la façon dont il doit être décrit ou engendré. On en vient donc à penser que Dedekind remplace le facteur premier idéal, qui est un objet explicitement défini (trop pour lui ?), par l'idéal formé de tous les entiers qu'il divise, qui reste une notion très « vague » : quels systèmes d'entiers forment des idéaux ? Comment les déterminer ? Ce souci de généralité vient donc de pair avec l'émergence de notions pour le moins floues aux yeux des lecteurs de l'époque.

- Enfin, si Dedekind revendique plus tard la « simplicité » de l'idéal, il semblerait pourtant qu'il lui ait causé beaucoup plus de difficultés qu'il n'y paraît, comme en témoigne sa correspondance avec Lipschitz de 1876. Nous proposons ici la traduction d'un passage.

Bien qu'à l'époque j'avais constamment le but à atteindre sous les yeux, ce n'est qu'après des efforts réellement indicibles que je suis parvenu à progresser pas à pas et à combler toutes les lacunes ; j'avais continuellement la sensation d'être suspendu à une échelle avec la crainte de ne plus réussir à atteindre le barreau suivant, et si je n'avais pas devant moi ma présentation de ces démonstrations de l'époque sous forme imprimée ou écrite, cela me donnerait maintenant encore une fois une grande peine d'agencer tous les ingrédients de la démonstration, chacun à sa juste place, pour que le but soit réellement atteint. (Lettre à Lipschitz du 29 avril 1876, FRICKE, NOETHER et ORE 1932, p. 466.)

Ces commentaires viennent ainsi porter une forme de préjudice à sa propre approche : comme le précise Edwards, une nouvelle méthode, pour être pertinente, doit s'avérer simple et naturelle, tout en apportant une part de lumière sur des points ardu. Ici, l'idéal ne semble pas selon lui avoir ouvert des horizons nouveaux à la théorie des entiers algébriques : il n'en résulte ni simplification, ni amélioration réelle. Au contraire, les nombres idéaux constituent pour lui une approche très simple, qui demande bien moins de technique que l'idéal, pour finalement aboutir au même résultat.

Analysons à présent le revirement de Dedekind et la place qu'occupe l'idéal dans sa théorie. On y distingue trois moments.

- En 1871, Dedekind voit l'idéal comme un moyen de reformuler la théorie de Kummer, lui donner un « nouvel habillage », sans changer pour autant les fondements du nombre complexe idéal ; il l'aurait ainsi introduit « par peur que l'adoption d'une terminologie habituellement utilisée pour des nombres réellement existants puisse inspirer le doute sur la rigueur des méthodes employées dans les preuves ». À ce stade, l'idéal cherche seulement à expliciter le statut des nombres idéaux.

- Dans son introduction à « Sur la théorie des nombres entiers algébriques » (1876), il écrit que le fait qu'à chaque idéal corresponde un nombre complexe idéal est « de la plus grande importance ¹ ». L'idéal commence ainsi à se placer comme objet central du raisonnement.
- Puis il en vient finalement à se détacher totalement de la notion de nombre idéal : « cette confirmation m'a conduit naturellement à fonder toute la théorie [de la factorisation des entiers d'un corps de nombres] sur cette définition simple, entièrement délivrée de toute obscurité et de l'admission des nombres idéaux. »

À travers cette évolution, Edwards pense ainsi que l'objection de Dedekind à la théorie de Kummer provient, et ce dès le départ, entièrement de considérations philosophiques et esthétiques, et aucunement d'une difficulté pratique ou logique quelconque relative aux nombres idéaux : l'idéal serait seulement là pour remplir ses propres critères de rigueur, mais n'apporterait rien à la théorie elle-même. Cela vient quelque part à l'encontre de la « création » des concepts, qui doit se révéler féconde.

Il concède tout de même que le fait de se recentrer sur l'idéal aurait permis à Dedekind de mieux cerner la nature même des entiers algébriques, et d'en proposer une définition générale. Mais selon lui, les préoccupations fondationnelles de Dedekind, et son insistance sur ses principes philosophiques l'ont quelque part conduit trop loin en créant l'idéal, qui n'est pas forcément l'outil le plus approprié pour la théorie des entiers algébriques.

A.3 La réception de la théorie des idéaux

Il reste ainsi un dernier point à développer : la publication et la réception de la théorie des idéaux de Dedekind. On ne pourra nier qu'elle est d'une grande puissance, mais qu'elle revêt par la même occasion un caractère ardu ; on constatera également qu'elle dépasse très largement le but initial, qui était l'extension des résultats de Kummer aux corps de nombres.

Dedekind a pour la première fois introduit sa théorie des idéaux à la fin de la seconde édition de la *Zahlentheorie* de Dirichlet, pensant ainsi toucher un large public... ce qui n'a malheureusement pas été le cas. Il en vient même à croire que sa théorie des idéaux n'intéresse que lui, et que personne n'a pris ni ne prendra la peine de la lire.

Comme l'explique Edwards, cela n'a rien de bien surprenant en soi, pour plusieurs raisons : un matériau aussi complexe et innovant placé à la fin d'un ouvrage traitant de théorie élémentaire des nombres ne peut qu'avoir un effet décourageant, particulièrement pour les personnes les plus novices. Quant aux lecteurs plus expérimentés, ils ne s'attendent pas à trouver grande nouveauté à cet endroit du livre.

1. Notons que la démonstration de ce résultat nécessite le principe du tiers exclu.

Mais pour Dedekind, le problème n'est pas tant là : il vient avant tout de la brièveté de son exposition. Il se résout alors à publier le fameux traité « Sur la théorie des nombres entiers algébriques » en y incluant davantage de détails. Même s'il maintient que cette version de sa théorie reste en substance la même que l'originale de 1871, il existe une différence de taille : dans la seconde, le produit de deux idéaux est introduit dès le départ, ainsi que la correspondance division-inclusion, constituant alors la pierre angulaire de la théorie. L'idéal devient un objet d'étude propre, et se trouve détaché du « nombre complexe idéal ». Dedekind développe ainsi toute une théorie de l'idéal, en particulier son arithmétique, ainsi que le concept de « module » (au sens de sous-groupe additif).

Pour autant, même si cette vision de l'idéal est pour le moins fructueuse, encourageant de nombreuses avancées en algèbre (théorie des treillis entre autres), on peut s'accorder avec Edwards sur la difficulté à concevoir cette approche comme la plus simple qui soit pour embrasser les problèmes de factorisation des entiers algébriques : c'est une théorie longue, technique, et tellement générale qu'elle sort presque du cadre fixé par le problème de départ. On revient ainsi sur l'idée que l'idéal est peut-être un concept trop avancé pour des problèmes d'unicité de décomposition, qui peuvent être résolus « plus simplement » par l'approche initiale de Dedekind, au sens où il n'est pas nécessaire dans ce dernier cas de développer toute une théorie abstraite sur les objets employés.

Concluons cependant ce propos en disant que la notion de simplicité d'un concept demeure relativement subjective, et dépend fortement de notre éducation mathématique. Ainsi, Noether exprime son désaccord avec ces arguments : pour elle, la première version était encore « trop complexe », et les généralisations du xx^e siècle justifient pleinement l'approche par la théorie des idéaux. Et en réfléchissant bien, la théorie des entiers algébriques est aujourd'hui présentée aux étudiants par le biais de structures telles que l'idéal et l'anneau, permettant un exposé concis et systématique. L'histoire a donc quelque part donné raison à l'idéal, qui est resté fermement ancré dans l'apprentissage de l'algèbre.

Glossaire des différents courants mathématiques

A

axiomatique (méthode —) Mode d'exposition fondé sur des propositions sans démonstration, ou axiomes, à partir desquelles on cherche à déterminer par des règles déductives les autres résultats, ou théorèmes, de la théorie considérée.

On distingue deux formes d'axiomatique. Dans celle dite formelle, les mots et signes intervenant dans ces axiomes sont dépouillés de leur signification habituelle du langage courant ; les objets mathématiques ne sont soumis à aucune réalité métaphysique, seules les relations précisées explicitement par les axiomes comptent. Elle s'oppose à l'axiomatique dite matérielle, que l'on trouve par exemple dans les *Éléments* d'Euclide, dans laquelle les définitions et axiomes premiers s'appuient sur des réalités sensibles. Néanmoins, les axiomes fixent intégralement dans les deux cas le cadre de la déduction : toute affirmation non issue des axiomes est proscrite, ce qui signifie entre autres que l'on ne peut recourir à l'expérience sensible ou à des représentations subjectives une fois les notions premières établies (voir p. 31).

C

constructivisme Philosophie des mathématiques très largement influencée par l'intuitionnisme ; il rejoint d'ailleurs ce courant dans le rapport entre mathématicien et objet mathématique. Le constructiviste voit l'objet mathématique comme le résultat des constructions mentales du mathématicien, et non comme une entité existant « par elle-même ». Plus concrètement, le constructiviste cherche à établir des démonstrations qui, en même temps qu'elles assurent l'existence d'un objet, en

donnent une construction explicite. Il est à noter qu'il existe plusieurs écoles constructivistes qui ne s'accordent pas toutes sur l'ensemble des constructions admises. Cependant, la logique employée, dite *intuitionniste*, est le plus souvent une logique classique dont le principe du tiers exclu est retiré (voir p. 21).

F

formalisme Au sens moderne, présentation des théories scientifiques dans le cadre d'un système formel, qui permet de caractériser sans ambiguïté les relations entre les objets mathématiques. La question de la nature même des objets ou de leur existence est ici soigneusement contournée : pour le formaliste, seul compte ce qui a pu être démontré et obtenu *via* un assemblage de symboles qui respectent des règles fixées à l'avance.

Les premières conceptions du formalisme remontent à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), qui considère le calcul comme la véritable forme du raisonnement rigoureux, qui ne se limite pas aux seules grandeurs numériques : il peut s'étendre à d'autres types d'objets. Cela pousse Leibniz à tout exprimer selon une « caractéristique universelle » qui remplacerait le travail de connaissance par le calcul analytique : il n'y a alors aucune distinction entre forme et signification, puisqu'il cherche à représenter symboliquement les idées elles-mêmes.

Le formalisme s'est ensuite véritablement constitué au *xix^e* siècle, notamment grâce aux algébristes anglais (dont Peacock) et allemands : il vise plus globalement à définir des structures opératoires « abstraites » permettant de réduire le sens des concepts d'origine à leurs règles d'usage. On peut ainsi construire des calculs dits « symboliques » qui s'éloignent des domaines numériques de base (calcul vectoriel, matriciel, etc.). Le langage tient donc une place prépondérante dans le formalisme, sans pour autant se réduire à un moyen d'expression vide de sens.

Il s'oppose ainsi à l'intuitionnisme, et constitue une anticipation du mouvement logiciste (voir p. 28).

I

intuitionnisme Philosophie des mathématiques développée par L. E. J. Brouwer (1881-1966) au début du *xx^e* siècle, concevant les mathématiques comme une science décrivant nos constructions mentales, dont les objets sont des produits de l'esprit humain. Pour Brouwer, « il n'y

a pas de vérité sans expérience de la vérité » : autrement dit, toute vérité mathématique demande à être (ré)éprouvée pour soi-même, et ne tient plus à un simple langage formel.

De plus, la logique intuitionniste est plus faible que la logique classique. En particulier, les intuitionnistes rejettent le *principe du tiers exclu* : une proposition n'est plus nécessairement soit vraie soit fausse de manière déterminée et absolue. Pour pouvoir conclure, on doit bénéficier d'une procédure de décision permettant de savoir dans quel cas on se situe. De manière formelle, on n'a donc pas que $(\text{non}(\text{non } A)) \implies A$.

Notons que les mathématiques qui se basent sur ces deux formes de logique ne sont pas en contradiction pour autant : elles ne parlent pas des mêmes objets ou en donnent des définitions différentes. S'il existe bien des différences dans la conception du continu par exemple, cela ne remet pas pour autant en cause la validité des énoncés obtenus.

L'intuitionnisme se voit donc comme un courant opposé au formalisme et a grandement influencé le constructivisme ; certains assimilent d'ailleurs les deux notions, tandis que d'autres considèrent l'intuitionnisme comme cas particulier du constructivisme. Cependant, l'intuitionnisme brouwerien se distingue des mathématiques constructives en accordant la primauté au sens et au « mental », à ce qui est pensé ; un constructiviste se placera d'emblée dans le langage naturel qui autorise l'accès aux objets mathématiques (voir p. 58).

K

kantisme (ou criticisme) Système de philosophie fondé à la fin du XVIII^e siècle par Emmanuel Kant (1724-1804). Sa philosophie théorique est marquée par sa critique de la raison humaine, et son souhait d'en mesurer la portée et les limites. Elle considère la vérité comme accessible à l'entendement, sous condition qu'elle résulte « des lois correctes de la pensée », s'opposant ainsi à la fois aux sceptiques et aux dogmatiques. La connaissance naît quant à elle de l'intervention conjointe d'une matière empirique et d'une forme (ou concept) fournie par l'entendement. Enfin, ce système voit comme inabordable la recherche de l'absolu (voir p. 5).

L

logicisme Théorie selon laquelle les mathématiques sont une extension de la logique ; dans sa forme plus radicale, elle consiste à réduire l'objet mathématique à une pure construction logique, au sens du calcul des

prédicats : il s'agit de formuler des énoncés à l'aide de variables, prédicats, connecteurs et quantificateurs n'agissant que sur les variables, et de déterminer ceux qui sont valides.

Il est initié par Gottlob Frege (1848-1925) et Bertrand Russell (1872-1970). En particulier, dans son ouvrage *Les Fondements de l'Arithmétique* (1884), Frege tente de dériver l'arithmétique de la logique. Mais la découverte du paradoxe de Russell en théorie des ensembles oblige Frege à renoncer à son projet. Enfin, le théorème d'incomplétude de Gödel (1930) viendra, après la mort de Frege, porter le coup de grâce au programme initial du logicisme.

Il constitue dans un certain sens une forme de réductionnisme (voir p. 5).

R

réductionnisme Au sens précis du terme, conception épistémologique selon laquelle une théorie peut être « absorbée » par une autre. Par exemple, le logicisme de Frege peut s'apparenter à une forme de réductionnisme, puisqu'il souhaite réduire l'arithmétique à la seule logique.

Au sens courant, le terme prend une connotation plus péjorative, et s'entend comme une méthode tenant à réduire la complexité à un seul facteur, relevant ainsi d'une sorte « d'économisme ». Il acquiert alors une dimension presque simpliste (voir p. 51).

Bibliographie

- BENIS SINACEUR, Hourya (octobre 2007). « Nécessité et fécondité des définitions : les fondements de la théorie des nombres de Richard Dedekind (1831-1916) ». In : *Définition : rôles et fonctions en logique et mathématiques*. Sous la dir. de D. MIÉVILLE et P. JORAY. Travaux de logique 19. Centre de recherches sémiologiques (CdRS), Université de Neuchâtel, octobre 2007, p. 29-72 (cf. p. 32, 44).
- éd. (2008). *Richard Dedekind : La création des nombres*. Collection Mathesis. Paris : Librairie Philosophique J. Vrin, 2008 (cf. p. 22, 32, 39, 78).
- DEDEKIND, Richard (1876-1877). « Sur la théorie des nombres entiers algébriques ». In : *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*. 1^{re} s. 11, p. 278-288, 310 (1876), 2^e s. 1, p. 17-41, 69-92, 144-164, 207-248, 278-288 (1877) (cf. p. 9).
- (2008a). « Continuité et nombres irrationnels ». In : *Richard Dedekind : La création des nombres*. Sous la dir. d'Hourya BENIS SINACEUR. [1872] 2008, p. 57-89 (cf. p. 33).
- (2008b). « Que sont et à quoi servent les nombres ? » In : *Richard Dedekind : La création des nombres*. Sous la dir. d'Hourya BENIS SINACEUR. [1888] 2008, p. 131-216 (cf. p. 37, 49, 55).
- (2008c). « Sur l'introduction de nouvelles fonctions en mathématiques ». In : *Richard Dedekind : La création des nombres*. Sous la dir. d'Hourya BENIS SINACEUR. Mémoire paru de manière posthume en 1932. [1854] 2008, p. 221-233 (cf. p. 46).
- DEDEKIND, Richard et Heinrich WEBER (2019). *Théorie des fonctions algébriques d'une variable*. Collection Mathesis. Texte introduit, traduit et annoté par Emmylou Haffner. Paris : Librairie Philosophique J. Vrin, [1882] 2019 (cf. p. 53).
- DURAND, Marie-José (1990). « Genèse de l'Algèbre symbolique en Angleterre : une influence possible de J. Locke ». In : *Revue d'histoire des sciences* 43, p. 129-180. DOI : [10.3406/rhs.1990.4163](https://doi.org/10.3406/rhs.1990.4163) (cf. p. 26).
- EDWARDS, Harold M. (1975). « The background of Kummer's proof of Fermat's Last Theorem for regular primes ». In : *Archive for History of Exact Sciences* 14, p. 219-236. DOI : [10.1007/BF00327448](https://doi.org/10.1007/BF00327448) (cf. p. 12).
- (1980). « The genesis of ideal theory ». In : *Archive for History of Exact Sciences* 23, p. 321-378. DOI : [10.1007/BF00327914](https://doi.org/10.1007/BF00327914) (cf. p. 9, 22, 68, 70).
- FRICKE, Robert, Emmy NOETHER et Øystein ORE, éd. (1932). *Richard Dedekind : Gesammelte mathematische Werke*. T. 3. Braunschweig : Friedr. Vieweg & Sohn, 1932 (cf. p. 71).
- HAFFNER, Emmylou (2014a). « D'un point de vue rigoureux et parfaitement général : pratique des mathématiques rigoureuses chez Richard Dedekind ». In : *Philosophia Scientiæ* 18.1, p. 131-156. DOI : [10.4000/philosophiascientiae.919](https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.919) (cf. p. 39, 44, 49).
- (2014b). « The "Science of Numbers" in action in Richard Dedekind's works: between mathematical explorations and foundational investigations ». Thèse de doct. Université Paris Diderot, 2014 (cf. p. 12).
- KITCHER, Philip (1986). « Frege, Dedekind, and the philosophy of mathematics ». In : *Frege synthesized*. Sous la dir. de L. HAAPARANTA et J. HINTIKKA. Dordrecht : D. Reidel, 1986, p. 299-343 (cf. p. 44, 62).
- MCCARTY, David Charles (1995). « The mysteries of Richard Dedekind ». In : *From Dedekind to Gödel: essays on the development of the foundations of mathematics*. Sous la dir. de Jaakko HINTIKKA. Dordrecht : Kluwer, 1995, p. 53-96. DOI : [10.1007/978-94-015-8478-4_4](https://doi.org/10.1007/978-94-015-8478-4_4) (cf. p. 44).
- NEUWIRTH, Stefan (2021). « Lorenzen's reshaping of Krull's Fundamentalsatz for integral domains (1938-1953) ». In : *Paul Lorenzen : mathematician and logician*. Sous la dir. de Gerhard HEINZMANN et

- Gereon WOLTERS. Collection Logic, Epistemology, and the Unity of Science 51. Articles présentés à la conférence tenue à l'université de Constance les 8 et 9 mars 2018. Cham : Springer, 2021, p. 141-180. DOI : [10.1007/978-3-030-65824-3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-65824-3) (cf. p. 1).
- PENGELLEY, David et Fred RICHMAN (2015). « Euclide avait-il besoin de l'algorithme d'Euclide pour démontrer l'unicité de la factorisation ? » In : *Repères IREM* 98. Traduction d'un article paru dans l'*American Mathematical Monthly* 113 (2006), p. 196-205, p. 53-64 (cf. p. 10).
- RIEMANN, Bernhard (1869). « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie ». In : *Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie II*. Vol. 3. Traduit de l'allemand par J. Hoüel, p. 309-327. DOI : [10.1007/BF02422984](https://doi.org/10.1007/BF02422984) (cf. p. 1, 35).
- SÉGUIN, Philippe (2022). « “Nous sommes de race divine !” La création de l'infini actuel au XIX^e siècle : Poe, Cantor, Dedekind ». In : *Eurêka ! Récits savants de découverte et d'invention*. Sous la dir. de Laurence DAHAN-GAIDA. Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences. Paris : Hermann, 2022, p. 259-278 (cf. p. 39).
- (2023). « Dieu a-t-il créé les nombres ? Problèmes de traduction, transcription et interprétation en histoire des mathématiques ». In : *Sciences, circulations, révolutions : Festschrift pour Philippe Nabonnand*. Sous la dir. de Pierre Édouard BOUR, Manuel REBUSCHI et Laurent ROLLET. Collection Tributes 50. London : College Publications, 2023, p. 655-666 (cf. p. 38).
- SINACEUR, Mohammed Allal (1978). « Naissance du formalisme mathématique ». In : *Dedekind : Les nombres : que sont-ils et à quoi servent-ils ?* Ornicar ?, 1978, p. 7-41 (cf. p. 9).
- WIKIPÉDIA (2022). *George Peacock*. [En ligne]. 2022 (cf. p. 27).

Liste des illustrations

2.1	Le rapport entre le côté et la diagonale d'un carré.	33
-----	--	----

Cette revue est à la fois le bulletin de liaison de l'IREM de Besançon et une revue scientifique à destination d'un public national et international intéressé par la recherche sur l'enseignement des mathématiques : elle assume à la fois un enracinement local autour de Besançon, de l'enseignement primaire à l'université, et un public francophone international.

Elle a vocation à publier :

- les productions de l'IREM de Besançon et des autres IREM ;
- les actes de colloques des IREM ;
- les articles d'enseignants et chercheurs du Département de mathématiques de Besançon et d'autres lieux de recherche et d'enseignement des mathématiques.

Elle promeut l'interdisciplinarité et invite le regard des sciences de l'éducation, de l'histoire, de la sociologie, de l'anthropologie, de la philosophie, de la physique, de la biologie pour maintenir les mathématiques vivantes.

La variété du public visé engage la revue à être particulièrement ambitieuse quant à l'accessibilité des textes publiés tout en maintenant leur qualité scientifique.

Soumettez vos articles à mathematiquesvivantes@univ-fcomte.fr !

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCHE-COMTÉ
Université Marie et Louis Pasteur
47 rue Mégevand – 25030 BESANCON CEDEX – France

Page 1 de couverture : Michaël Klopfenstein

Page 4 de couverture : Julie Gillet

Impression
L'Imprimeur Simon à Ornans

Dépôt légal : 4^e trimestre 2025



Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
de l'Université Marie et Louis Pasteur

Département de Mathématiques - UFR Sciences et Techniques

16 route de Gray - 25030 BESANCON CEDEX - France

Tél. : 03 81 66 62 25 - Courriel : iremfc@univ-fcomte.fr

Site : <http://www-irem.univ-fcomte.fr/>

SOMMAIRE

Gwennaëlle VIDAL

L'émergence du concept d'idéal chez Richard Dedekind

Presses universitaires de Franche-Comté

<https://presses-ufc.univ-fcomte.fr>

UNIVERSITÉ
MARIE & LOUIS
PASTEUR

ISSN 1141-913X - 5 €

