Préface

L'approche constructive aux mathématiques a connu une renaissance, en grande partie grâce à la parution du livre d'Errett Bishop *Foundations of constructive analysis* en 1967, et aussi grâce à l'influence subtile de la prolifération d'ordinateurs avec de grandes capacités de calcul. Bishop a démontré que les mathématiques pures peuvent être développées d'un point de vue constructif tout en maintenant la continuité avec la terminologie et l'esprit classiques ; une bien plus grande partie des mathématiques classiques a pu être préservée par rapport à ce que l'on pouvait croire possible, et aucun théorème faux en mathématiques classiques n'en a résulté, comme cela avait été le cas pour d'autres écoles constructives, comme le constructivisme russe ou l'intuitionnisme. Les ordinateurs ont créé une conscience largement partagée de la notion intuitive de procédure effective, et de celle de calculs exécutables en principe. Ils ont en outre stimulé l'étude de l'algèbre constructive en vue de son implémentation, ainsi que du point de vue de la théorie des fonctions récursives.

En analyse, les problèmes de constructibilité apparaissent immédiatement parce que nous devons commencer avec les nombres réels, et qu'il n'y a pas de procédure finie pour décider si deux nombres réels sont égaux ou pas (les nombres réels ne forment pas un ensemble discret). Le principal obstacle pour les mathématiques constructives était en direction de l'analyse, alors que plusieurs mathématiciens, notamment Kronecker et van der Waerden, avaient fait d'importantes contributions à l'algèbre constructive. Heyting, travaillant en algèbre intuitionniste, s'est concentré sur les problèmes liés aux structures algébriques sur les nombres réels ; il y a développé une partie de l'analyse plutôt qu'une théorie des structures algébriques discrètes. De manière paradoxale, c'est en algèbre que le plus souvent nous nous heurtons à des arguments sauvagement non constructifs comme ceux qui établissent l'existence d'idéaux maximaux, ou l'existence de plus que deux automorphismes du corps des nombres complexes.

Dans ce livre, nous présentons les notions de base de l'algèbre moderne d'un point de vue constructif. Les sujets les plus avancés ont été dictés par nos préférences et par nos limitations, et par la disponibilité de traitements constructifs dans la littérature. Quoique le livre soit par nécessité à peu près auto-contenu, il n'est pas censé être une première introduction à l'algèbre moderne ; le lecteur est présumé avoir quelque familiarité avec le sujet classique.

Il est important de garder à l'esprit que l'algèbre constructive est de l'algèbre ; en fait, c'est une généralisation de l'algèbre classique en ce que nous ne supposons pas la loi du tiers exclu, exactement comme la théorie des groupes est une généralisation de la théorie des groupes abéliens en ce que la commutativité n'est plus supposée. Une démonstration constructive d'un théorème est en particulier une démonstration de ce théorème. Tout théorème dans ce livre peut être compris comme se référant à l'univers conventionnel du discours mathématique, et les démonstrations sont acceptables dans cet univers (aux fautes éventuelles de raisonnement près). Nous ne nous limitons pas à une classe restreinte d'« objets constructifs » comme le font les théoriciens des fonctions récursives et nous n'introduisons pas non plus de principes classiquement faux comme le font les intuitionnistes.

Nous exprimons nos remerciements à Abraham Seidenberg, Gabriel Stolzenberg, Larry Hughes, Bill Julian et Steve Merrin pour leurs suggestions.

Ray Mines
Fred Richman
New Mexico State University

Wim Ruitenburg
Marquette University