

Introduction

Cet ouvrage s'adresse à celles et ceux qui ont à introduire la notion de vecteur dans leurs cours et qui, sans avoir de formation approfondie, souhaitent motiver leur enseignement en utilisant l'histoire.

La notion de vecteur est en général difficile à concevoir pour les élèves, mais probablement délicate aussi à aborder pour les enseignants et enseignantes. Les vecteurs sont présents dans les programmes de mathématiques et de sciences, en seconde, puis dans les enseignements de mathématiques et de physique de premières et terminales pour ce qui est du lycée général. Ils sont aussi présents en lycée professionnel et technologique, ceci de façon plus ou moins prégnante selon les années.

Ce travail sur les vecteurs, et plus particulièrement sur le produit scalaire, est issu de la rencontre des deux autrices, venant d'univers d'enseignement a priori quelque peu différents. Qu'est-ce qui a conduit la professeure de mathématiques en lycée professionnel à s'intéresser à l'histoire des mathématiques pour cette notion ? Avant 2009, le produit scalaire était au programme de très nombreuses spécialités de baccalauréat professionnel et donnait lieu à toute une classe d'exercices fréquemment proposés aux épreuves du baccalauréat et généralement bien réussis. Depuis la réforme de 2009 la préparation des élèves de Bac Pro aux classes de technicien supérieur est organisée autour d'un programme complémentaire. La notion de produit scalaire fait partie de ce curriculum. Face à ce chapitre les élèves étaient perplexes : c'est quoi au juste le produit scalaire ? À quoi ça sert ?

Pour répondre à cette deuxième question, la double casquette d'enseignante de Mathématiques et de Sciences permet d'illustrer l'usage du produit scalaire dans des exemples liés à la physique. Mais parfois il est difficile de trouver des contextes proches du milieu professionnel des élèves. Et comment répondre à la première question : qu'est-ce que vraiment le produit scalaire ? Où se situe le produit scalaire à l'intérieur des savoirs mathématiques ?

L'histoire des mathématiques nous a semblé une piste intéressante à explorer, tant sur le plan culturel que pour répondre aux questions qui étaient en jeu : mieux comprendre comment et pourquoi naît un objet mathématique, quelles sont les idées originelles qui ont permis l'invention de ces notions.

Nous sommes convaincues qu'un regard sur l'histoire, d'une façon générale, peut éclairer la matière enseignée, donner du sens à cet enseignement, et faire surgir d'autres questions, par exemple, pourquoi les notations ont évolué au fil du temps, comment les vecteurs et le produit scalaire ont pénétré peu à peu beaucoup d'autres domaines que les mathématiques...

Nous sentions bien d'ailleurs qu'il régnait quelques mystères du côté des vecteurs, du moins parmi les enseignantes et les enseignants : les unes ou les uns affirmaient que bien sûr tout cela venait de la mécanique et du concept de forces, d'autres, à propos du produit scalaire se disaient que peut-être c'était lié à la démonstration de l'orthogonalité ou de la non-orthogonalité, donc un peu mathématique tout de même...

Et d'ailleurs que pouvait-on lire dans deux publications reconnues du XX^e siècle ? Dans le Bulletin de l'Union des physiciens de 1975, Jean Rosmorduc écrivait

Implicitement la mécanique était porteuse, depuis Galilée, du concept de vecteur ; il restait à l'expliciter, un exemple de plus d'une notion mathématique directement dérivée de la réalité concrète¹.

Tandis que le collectif de mathématiciens Nicolas Bourbaki, affirmait, en 1974

La composition des forces et la composition des vitesses, bien connues en mécanique dès la fin du 17^e siècle, n'exercèrent aucune répercussion sur l'Algèbre, bien qu'elles renfermassent déjà en germe le calcul vectoriel. Il faut attendre en effet le mouvement d'idée qui, aux environs de 1800, conduit à la représentation géométrique des nombres complexes, pour voir utiliser en mathématiques pures l'addition des vecteurs. Cette opération est d'ailleurs introduite sans aucune référence à la mécanique ; le lien entre les deux théories n'est explicitement reconnu que par les fondateurs du calcul vectoriel, dans le deuxième tiers du 19^e siècle².

Le concept de vecteur résulte des histoires croisées de la physique et des mathématiques, comme beaucoup d'autres concepts au demeurant, et cette histoire peut être un peu différente selon les époques et les lieux. L'enseignement présente des difficultés supplémentaires : enseigne-t-on le même vecteur en sciences physiques et en mathématiques ? Sera-t-il éventuellement le même en collège et en lycée ? Les programmes de mathématiques de 2019 en terminale générale ont aussi totalement abandonné la partie nombres complexes, sauf en option *mathématiques expertes*. Cela offrait un autre regard sur les vecteurs et pouvait contribuer à élargir le questionnement. En lycée professionnel, ils restent toujours présents. Un regard croisé sur les pratiques et les conceptions entre le lycée d'enseignement général, et le lycée professionnel nous a semblé pertinent. De fait, en lycée professionnel,

1 Rosmorduc, Jean, *Bulletin de l'Union des physiciens*, n° 578 (1), p. 234-235.

2 Bourbaki, Nicolas, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1974, p. 71.

l'enseignant ou l'enseignante sera chargé-e à la fois des sciences physiques et mathématiques. Au cours de nos réflexions, cet échange nous a semblé encore plus riche pour aborder le produit scalaire, qui est l'objet principal de cet ouvrage.

Nous avons donc adressé à l'histoire la question des vecteurs, mais surtout notre question principale : le produit scalaire, pourquoi, comment ? Quelle est cette chose étrange qui donne un nombre à partir de deux vecteurs ? Comment aborder cette première rencontre avec une opération binaire externe pour qu'elle ait du sens ? Passer totalement du côté du repérage et des coordonnées, comme certains programmes y incitaient fortement ? Est-ce la solution ? Du coup, le vecteur se réduirait peut-être à un outil sans âme, et son enseignement perdrait immensément de son intérêt.

Nous ne répondrons que très partiellement à toutes ces questions, et nous nous situons de fait dans l'instant donné de cette publication, mais nous sommes persuadées que ce que nous vous proposons ici, issu de nos expériences dans les classes du secondaire, général et professionnel, pourra nourrir positivement les enseignements futurs.

Les interrogations précédentes touchent les idées de vecteurs et produit scalaire à utiliser lors de problèmes concrets ou en tant que théorie mathématique. Ainsi, nous nous appuyerons pour les activités de classe sur la dialectique outil-objet de Régine Douady (1984)³ :

Dialectique outil-objet : C'est un processus cyclique organisant les rôles respectifs de l'enseignant et des élèves, au cours duquel les concepts mathématiques jouent alternativement les rôles d'outils pour résoudre un problème et d'objet prenant place dans la construction d'un savoir organisé.

En effet, il nous paraît important de bien préciser l'intention de l'enseignant ou de l'enseignante et la construction progressive de la notion en tant qu'objet mathématique.

Pour aider chacune, chacun à bien se situer, nous donnons d'abord une présentation générale de l'histoire des concepts de vecteurs et de produit scalaire. Nous vous proposons ensuite des activités et exercices testés en classe, fondés sur une perspective délibérément historique et basés sur des textes originaux. Une deuxième partie sera développée autour de l'apport de l'interdisciplinarité « mathématiques et sciences » avec des activités de classes bivalentes et une analyse historique de la situation permettant d'éclairer ce qui est en jeu dans ce cas. Tous les exercices et activités visent à donner du sens aux notions.

Pour chaque activité, il sera précisé quel type d'utilisations outil/objet est envisagé a priori.

3 Douady, Régine, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 7, n° 2, p. 5-31, 1986.

En fin de partie, sont donnés des compléments historiques et des textes permettant aux enseignantes et aux enseignants d'aller plus loin.