

Table des matières

Introduction : les métiers d'Ernest Coumet, par Catherine Goldstein

Mersenne, Frenicle et l'élaboration de l'analyse combinatoire dans la première moitié du xvii^e siècle, par Ernest Coumet

PRÉFACE

Occasion de cette étude. L'analyse combinatoire élémentaire. Définitions et propriétés fondamentales. Plan général de cette étude.

PRÉAMBULE : LES TRAVAUX DE MERSENNE EURENT PEU D'ÉCHOS APRÈS SA MORT

1. Sur Aimé de Gagnières

(a) Les recueils manuscrits de la Bibliothèque nationale, fonds français 12357 et 12458.

(b) L'identité du copiste. Hommage de Pascal à Aimé de Gagnières à propos d'un problème de combinaison.

(c) Contenu des notes de lecture relevées par Aimé de Gagnières dans les œuvres de Mersenne.

2. À propos de Frenicle : l'*Abrégé des combinaisons* édité en 1693. Notes manuscrites de Mersenne concordant avec des textes de l'*Abrégé*. Deux groupes de manuscrits correspondant à deux parties de l'*Abrégé*.

PREMIÈRE PARTIE : Émergence de l'analyse combinatoire à travers les « usages » des « combinaisons »

Introduction	
Chapitre 1 : Premiers contacts de Mersenne avec les « combinaisons ». Esprit général des <i>Quaestiones in Genesim</i> et de <i>La Vérité des sciences</i>	
A. Le texte des <i>Quaestiones in Genesim</i> . Lutte de Mersenne contre la Cabale.	
1. Occasion d'un exposé sur les « combinaisons ». Critique de Pic de la Mirandolédotfill	
2. Règles de calcul	
(a). Combinaisons.....	
(b). Permutations.	
(c). Essai d'appliquer à un même mot ces deux types de « <i>commutatio</i> ».	
3. Textes de cabalistes sur les « commutations » des lettres de l'alphabet. différents résultats correspondant à des types de calculs distincts.	
4. Critiques de Mersenne contre les procédés des cabalistes. Nature combinatoire de ces procédés.	
B. Un texte de la <i>La Vérité des sciences</i> . Plagiat par Mersenne d'un texte de Clavius. .	
1. Analyse du texte de Clavius.	
(a). Combinaisons.....	
(b). Règle de la proposition double.	
(c). Permutations.	
(d). Un projet de calcul ambigü : calcul de $A(22, 22)$	
2. Comparaison entre le texte de Clavius et sa reprise par Mersenne.	
C. Usage des « combinaisons » selon Leurechon.	
1. Présentation d'un texte de Leurechon (appartenant aux <i>Selectae propositiones</i> de 1622) repris par Mersenne dans <i>La Vérité des sciences</i>	
2. L'inventaire de Leurechon.	
(a). Permutations.	
(b). Langage et écriture.....	
(c). Un vers célèbre.	
(d). Logique.	
(e). Musique et peinture.....	

3. L'adaptation de Mersenne. Un passage sur le jeu d'échecs.	
Conclusion du chapitre 1.	
Chapitre 2 : Des merveilles alphabétiques aux langues artificielles. L'alphabet, invention admirable selon Cicéron et Galilée.	
1. Cryptographie et alphabets.	
(a). Intérêt porté à la cryptographie dans le milieu de Mersenne.	
(b). Mersenne et les « chiffres ».	
(c). Manipulations alphabétiques en cryptographie.	
2. Un texte de Guldin. Présentation du texte. Calcul des Arrangements simples de 22 lettres. Bibliothèques aux dimensions de l'univers.	
3. Mersenne : langues artificielles.	
(a). De la critique de la langue adamique aux langues artificielles.	
(b). Conditions imposées à la meilleure langue possible. « Art des caractères » et « art de combiner ».	
Chapitre 3 : Vers l'art de combiner. Usage des combinaisons.	
A. Texte de Matan sur l' <i>ars combinandi</i>	
1. Texte anonyme publié par Mersenne : l'auteur en est Matan.	
2. Procédé méthodique d'énumération de Permutations. Calcul des Permutations simples et de Permutations avec répétitions.	
3. L'« utilité » de l' <i>ars combinandi</i>	
(a). Anagrammes et mots soumis à des métathèses.	
(b). Calculs combinatoires de Xénocrate et Chrysippe.	
(c). La polygraphie de Trithème. Mention d'autres arts.	
B. De la fécondité de certains « usages » pour le calcul combinatoire. L'art de combiner : règles mathématiques et « usages ».	
1. Atomes. Comparaisons entre les atomes et les lettres de l'alphabet.	
2. Anagrammes. Succès et diversité des anagrammes. Cabale et annagrammatisme. Mersenne et les anagrammes.	
3. Le problème du plus beau des chants.	
(a). L'antinomie du plus beau des chants.	

(b).	Avis divergents de correspondants de Mersenne.
(c).	Incertitude de Mersenne; Nouvelle orientation : chercher à parfaire les chants.
(d).	Tous les chants n'ont pas été faits. Constitution de répertoires. Réaction défavorable de Doni.
C.	Art de combiner et mathématiques.
1.	« Combinaisons » et arithmétique pratique. Rôle des exemples portant sur les lettres ou les notes.
2.	La passion pour les grands nombres. L'Arénaire. L'écriture des grands nombres et les nombres vus comme alignement de caractères.
	Conclusion de la première partie : la préhistoire du <i>De arte combinatoria</i> de Leibniz ...
	DEUXIÈME PARTIE : L'étude mathématique des combinaisons
	Introduction
	Chapitre 1 : Les notions fondamentales chez Mersenne. Il faut suivre l'analyse de Mersenne selon le fil de ses propres questions
A.	Permutations.
1.	Permutations simples : la « combinaison ordinaire ». Règle de calcul.
2.	Permutations avec répétitions. Une allusion de Jean Beaugrand. Règle lorsqu'une note se répète. Exemples pour d'autres cas. Un exemple d'application.
B.	Arrangements. Définition et règle de calcul.
C.	Combinaisons.
1.	Liens avec les arrangements. « Ôter l'ordre » de la Table des Arrangements. La Tables des Arrangements et des Combinaisons de 36 notes joue le rôle d'un schème opératoire.
2.	La règle de la progression double.
3.	Une énumération de Combinaisons.
4.	Propriété de symétrie des tables de Combinaisons.
D.	Combinaisons avec répétitions. Définition.
E.	Arrangements avec répétitions.
1.	On tient compte de l'ordre et de la répétition. Règle de calcul. Combinaison la plus générale.

2. Tous les mots de longueur inférieure ou égale à 22, formés avec 22 lettres. Panégyrique de la facilité et de l'universalité.

Chapitre 2 : Les notions fondamentales chez Frenicle. Les « sortes » de « combinaisons »

A. Classification générale des « combinaisons ».....

B. Permutations.

1. « Combinaison d'ordre » I : règle générale, preuve.

2. « Combinaisons d'ordre » II.

C. Combinaisons et Arrangements.

1. Rapport entre la « combinaison mêlée » I et la « combinaison de changement » I.

2. La formule directe des combinaisons.

3. Théorèmes.

D. Arrangements avec répétitions et Combinaisons avec répétitions.

1. « Combinaison mêlée » II : règle de calcul illustrée par les « variétés » obtenues avec des chiffres.

2. Exemples typiques de la « combinaison mêlée » II et de la « combinaison de changement » I. La première de ces « combinaisons » comme « combinaison générale ».

Chapitre 3 : Les combinaisons avec répétition

Introduction.

A. Premières approches.

1. *Chants où une note se répète plusieurs fois*

(a). Proposition XVII du *Livre second des chants*.

(b). Passage correspondant des *Harmonicorum libri*.

2. À propos d'une équivoque.

(a). Notes semblables et différentes : une critique d'Aimé de Gagnières.

(b). Une propriété de symétrie de longueur 22.

(c). Une table figurant dans les manuscrits d'Aimé de Gagnières.

3. Chants où plusieurs des notes distinctes peuvent se répéter (Proposition XVIII du *Livre second des chants*).

(a). Cas où on peut se ramener à ceux qui ont été examinés dans la Proposition XVII.

(b). Cas qui se résolvent dans un raisonnement direct élémentaire.	
B. Cas général.	
1. Exemple soluble à l'aide des règles précédentes : chants de longueur 4.	
2. Calcul de $K(n, p)$. Cas où ne jouent plus les analogies. Table des mots de longueur 7. Formule générale.	
C. Rapports entre les calculs de $K(n, p)$ et $G(n, p)$	
1. Reprise en considération de l'ordre	
(a). On tient compte de l'ordre : passage de $K(n, p)$ à $G(n, p)$	
(b). Passage inverse.	
2. Parallélisme entre les deux méthodes indirectes pour calculer $K(n, p)$ et $G(n, p)$	
D. Méthode directe pour calculer $K(n, p)$	
1. Présentation d'un calcul.	
2. « Ôter l'ordre » de la table des $G(n, p)$	
(a). Caractère équivoque de cette expression.	
(b). Méthode directe et méthode indirecte.	
E. Frenicle : la formule directe donnant $K(n, p)$	
1. Texte de l' <i>Abrégé des combinaisons</i>	
(a). Calculs de $K(36, 12)$ et $K(6, 100)$. Clcul de $K(n, p)$	
(b). Liens entre Combinaisons simples et Combinaisons avec répétitions.	
2. Une tentative de calcul avortée : croyance à un passage aisé de $G(n, p)$ à $K(n, p)$	
3. Mersenne a eu du mal à comprendre le propos de Frenicle.	
F. Un problème sur le jeu de dés. Manière de faire différents points avec trois dés : Richard de Fournival, Galilée. Le texte de l' <i>Abrégé des combinaisons</i> . Mersenne et Aimé de Gagnières.	
Conclusion.	
Chapitre 4 : Le triangle arithmétique	
Introduction.	
A. Cardan et Tartaglia.	
1. Cardan.	

(a).	Construction de la table.....	
(b).	Les « <i>numeri angulares</i> ». La formule directe donnant $C(n, p)$	
2.	Tartaglia : circonstances extraordinaires de son invention.	
(a).	Le problème : calcul de $K(6, n)$. Solution de Montmort.	
(b).	Construction et propriétés de la table.	
B.	Mersenne.	
1.	Une table construite à propos d'un problème particulier	
2.	Construction de la table. Avantage de la méthode directe pour obtenir $C(36, 1)$, $C(36, 2)$,	
3.	Un autre mode de lecture : trouver des nombres « <i>uno intuitu</i> ».	
4.	La table comme procédé de calcul.	
(a).	Attitude critique à l'égard de la table.	
(b).	Mersenne ne l'a pas considérée comme un objet mathématique.	
C.	Frenicle. Liens entre $C(n, p)$ et $K(n, p)$	
1.	« Les puissances triangulaires »	
(a).	Les « ordres numériques » chez Pascal. Définition par Frenicle des « puissances triangulaires ».	
(b).	Texte de Fermat.	
(c).	Sur le choix de l'expression « puissance ».	
2.	Quelques propriétés importantes	
3.	Une erreur de lecture de Mersenne.	
	Conclusion.	
	Chapitre 5 : Les combinaisons multiples	
	Introduction.	
	A. Mersenne : variations de chants.	
1.	Variations des temps des notes.	
2.	Exemples.	
	B. Mersenne : mots « utiles » et mots « inutiles »	

1. Le problème : les contraintes de la prononciation. Relativité des classifications des voyelles et des consonnes. Système I et système II.	
2. Illustration de la méthode par des exemples.	
3.	
(a). Système I : 16 consonnes, 5 voyelles.	
(b). Système II : 19 consonnes, 10 voyelles.....	
4. Nombres très grands de mots très longs.....	
C. Frenicle : les « combinaisons multiples ». Leur place dans la classification des combinaisons.	
1. Exemples portant sur des Permutations.	
2. Exemples portant sur des Arrangements.	
3. Exemples portant sur des Combinaisons.	
4. Exemples portant sur des Permutations : assemblages de lettres pour former des dictions.	
Conclusion.	
Conclusion de la deuxième partie	
1.	
(a). Les points d'analyse combinatoire traités par Hérigone.	
(b). Les résultats atteints par Mersenne et Frenicle ne se réduisent pas à l'extension de recettes de calcul connues avant eux.	
2.	
(a). Parallèle entre les classifications des « combinaisons » de Frenicle et de Jacques Bernoulli.	
(b). Difficultés surmontées et mises à jour d'un réseau simple de relations entre des notions et entre des règles de calcul.	
TROISIÈME PARTIE : Énumérations et numérations	
Introduction	
Chapitre 1 : Énumérations de permutations	
Introduction.	

A. Le <i>Manuscrit des chants de 8 notes</i> : un volume comportant 40320 chants. Jugement de Peiresc. Offres d'utilisation de Mersenne.	
B. Une remarque de Descartes sur les anagrammes : un texte des <i>Regulae</i> . Facilité des exercices combinatoires selon Descartes.	
C. Énumérations du Père Dobert.	
D. Numération des permutations de n notes.	
1. Un chant étant donné, déterminer son numéro.	
(a). Deux exemples préliminaires. Un exemple de Mersenne.	
(b). Règle générale. Cas particuliers.	
2. Un numéro étant donné, déterminer le chant auquel il correspond. Premier exemple. Deuxième exemple.	
3. Une méthode « naturelle » d'énumération : nombres ordonnés selon leur grandeur.	
Conclusion d'après un exposé de C.-A. Laisant.	
1. Numérotation factorielle.	
2. Application à la classification des Permutations. Liens entre celles-ci et la numérotation factorielle. Solution des deux problèmes de Mersenne.	
Chapitre 2 : « Combinaisons générales » et permutations	
Introduction.	
A.	
1. Problème I : un mot étant donné, trouver son numéro.	
2. Problème I' : un numéro étant donné, trouver le mot correspondant.	
B. Problèmes analogues aux problèmes I et I' pour les mots de même longueur.	
1. Problème II.	
2. Problème II'.	
C. Frenicle : traitement des mêmes problèmes.	
1.	
(a). Problème I.	
(b). Problème I'.	
2.	

(a). Problème II.	
(b). Problème II'.	
D. Analogie entre les procédures précédentes et le système de numération à base 22.	
1. Mersenne.	
(a). Analogie, mais absence du zéro.	
(b). Intérêt historique de l'analogie. Mersenne a lu ses dictionnaires comme des nombres.	
2. Frenicle : chiffres du système décimal servant à illustrer des Arrangements avec répétitions. Le système décimal comme un certain système d'écriture.	
Chapitre 3 : Énumérations et numérations	
Introduction.	
A. Langues artificielles.	
1. Lettre de Peiresc.	
2. Capacité indéfinie de dénomination des langues artificielles.	
3. « Un paradoxe d'une autre force que celui d'Archimède ».	
B. Cryptographie.	
1. Les procédures I et II comme systèmes cryptographiques.	
2. Construction d'alphabets ayant un nombre réduit de caractères.	
(a). Vigenère et Bacon.	
(b). Mersenne.	
3. Un système cryptographique de représentation des nombres chez Cardan. ...	
CONCLUSION GÉNÉRALE	
APPENDICE	
1. Textes manuscrits de Mersenne	
A. Extraits de la <i>Suite manuscrite des Quaestiones in Genesim</i> , 2.	
B. Extraits du <i>Manuscrit des chants de 8 notes</i>	
C. Notes manuscrites portées par Mersenne sur son exemplaire de main de l' <i>Harmonie universelle</i>	
1. Notes portées dans les marges du <i>Livre second des chants</i>	

1. Note portée à la fin de l' <i>Harmonie universelle</i>	
2. Notice sur Frenicle	
3. Notice sur les manuscrits de l' <i>Abrégé des combinaisons</i> de Frenicle	
A. Manuscrits des Archives de l'Académie des sciences.	
1. Le manuscrit F-a.	
2. Le manuscrit F-b.	
B. Manuscrits de la Bibliothèque nationale.	
1. Bibliothèque nationale, fonds français, nouvelles acquisitions, 51176.	
2. Bibliothèque nationale, fonds français, nouvelles acquisitions, 5175.	
C. Sur la provenance de ces manuscrits.	
4. Notice sur Aimé de Gagnières	
BIBLIOGRAPHIE	
INDEX	
TABLE DES MATIÈRES	
Appendice : S.D. Poisson élève à l'École polytechnique : quelques documents inédits, par Ernest Coumet	